УДК 517.968.519.6

Т.С. ПОЛЯНСКАЯ, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА НА ОТРЕЗКЕ $[0,2\pi]$ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Рассмотрена система интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром, к которой приводит ряд задач дифракции волн. Проведена дискретизация этой системы на основе метода дискретных особенностей. Введены пары гильбертовых пространств и операторы, в них, соответствующие заданной и дискретной задачам. С их помощью доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению системы интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральные уравнения, логарифмическое ядро, метод дискретных особенностей.

Введение. Ряд задач математической физики приводит к необходимости решать интегральные уравнения и системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическими особенностями [1]. В статье рассмотрен и обоснован численный метод дискретных особенностей [2, 3] решения таких систем интегральных уравнений на отрезке $[0,2\pi]$.

Основная идея метода дискретных особенностей применительно к системе заключается в следующем: решение системы интегральных уравнений ищем в специально выбраных точках, которые соответсвуют узлам квадратурных формул для интегралов с логарифмическими ядрами.

Причём применяются две различные квадратурные формулы: одна для интеграла с логарифмическим ядром, другая для регулярной части уравнения (с теми же самыми узлами). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая аппроксимирует заданную систему интегральных уравнений.

Постановка задачи. Операторные обозначения. Рассматривается система интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|v_i(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_0^{2\pi}K_{ij}(\varphi_0,\varphi)v_j(\varphi)\,d\varphi=f_i(\varphi_0),$$
$$\varphi_0\in[0,2\pi],\ i=\overline{1,m} \tag{1}$$

относительно неизвестных функций $v_i(\varphi)$, $i=\overline{1,m}$.

Здесь $K_{ij}(\varphi_0,\varphi)$, $f_i(\varphi_0)$ – $2\pi-$периодические по всем переменным функции, $f_i(\varphi_0)\in C^{\mu,\gamma}_{[0,2\pi]}$, $K_{ij}(\varphi_0,\varphi)\in C^{\mu,\gamma}_{[0,2\pi]}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной $(i,j=\overline{1,m})$.

Через $C^{\mu,\gamma}_{[0,2\pi]}$ обозначен класс μ раз непрерывно дифференцируемых на $[0,2\pi]$ функций, $\mu-$е производные которых удовлетворяют *условию Гёль-*

дера с показателем γ $(0<\gamma\le 1)$.

Введем вектор-функции $\vec{v}(\varphi)=\{v_i(\varphi)\}_{i=1}^m$, $\vec{f}(\varphi_0)=\{f_i(\varphi_0)\}_{i=1}^m$ и операторы

$$\left(\hat{L}\vec{v}\right)(\varphi_0)=\left\{\left(Lv_i\right)(\varphi_0)\right\}_{i=1}^m\equiv\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|v_i(\varphi)\,d\varphi\right\}_{i=1}^m,$$

$$\left(\hat{K}\vec{v}\right)(\varphi_0)=\left\{\sum_{j=1}^m\left(K_{ij}v_j\right)(\varphi_0)\right\}_{i=1}^m\equiv\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^m\int_0^{2\pi}K_{ij}(\varphi_0,\varphi)\,v_j(\varphi)\,d\varphi\right\}_{i=1}^m.$$

С помощью этих обозначений систему (1) можно записать в виде операторного уравнения

$$(\hat{L}+\hat{K})\vec{v}=\vec{f}\ .$$

В рассматриваемых задачах оператор $\hat{L}+\hat{K}$ непрерывно обратим в паре пространств

$$(\vec{L}^2_{[0,2\pi]},\vec{L}^2_{[0,2\pi]}),$$

где $\vec{L}^2_{[0,2\pi]}$ – гильбертово пространство вектор-функций $\vec{u}(\varphi)=\{u_i(\varphi)\}_{i=1}^m$ со скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v})=\sum_{i=1}^m\int_0^{2\pi}u_i(\varphi)\overline{v}_i(\varphi)d\varphi$, $\left\|\vec{u}\right\|_I$ – норма, порождённая этим скалярным произведением.

Дискретизация системы. Обозначим $(P_{n_i}u)(\varphi)$ – тригонометрический интерполяционный полином порядка n_i функции $u(\varphi)$ с узлами интерполирования $\{\varphi_{k_i}^{n_i}\}_{k_i=0}^{2n_i}=\left\{2\pi k_i/(2n_i+1)\right\}_{k_i=0}^{2n_i}$.

Приближённое решение системы (1) ищем в виде вектор-функции

$$\vec{v}_{\overline{n}}(\varphi)=\left\{v_{in_i}(\varphi)\right\}_{i=1}^m=\left\{\left(P_{n_i}v_{in_i}\right)(\varphi)\right\}_{i=1}^m,\ \ \overline{n}=(n_1,n_2,...,n_m),$$

из системы приближенных интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|v_{in_i}(\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^m\int_0^{2\pi}(P_{n_i\varphi_0}P_{n_j\varphi}K_{ij})(\varphi_0,\varphi)v_{jn_j}(\varphi)d\varphi=f_{in_i}(\varphi_0),$$

$$i=\overline{1,m},\qquad(2)$$

где $f_{in_i}(\varphi_0)=(P_{n_i}f_i)(\varphi_0)$.

Рассматривая $i-$тое $(i=\overline{1,m})$ уравнение системы (2) в узлах интерполирования многочлена $(P_{n_i}f_i)(\varphi_0)$ – точках $\{\varphi_{k_i}^{n_i}\}_{k_i=0}^{2n_i}$, получаем систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_{k_i}^{n_i}}{2}\right|v_{in_i}(\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^m\int_0^{2\pi}(P_{n_i\varphi_0}P_{n_j\varphi}K_{ij})(\varphi_{k_i}^{n_i},\varphi)v_{jn_j}(\varphi)d\varphi=$$

$$= f_{in_i}(\varphi_{k_i}^{n_i}), \quad k_i = \overline{1, n_i}\,, \; i = \overline{1, m}\,.$$

Вычисляя здесь, с учетом тождества

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(P_n\left(uv\right)\right)\left(\varphi\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(P_n u\right)\left(\varphi\right) \cdot \left(P_n v\right)\left(\varphi\right) d\varphi\,,$$

интегралы с помощью квадратурных формул [4]

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right| \left(P_n u\right)\left(\varphi\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left(P_n u\right)\left(\varphi_k^n\right)\left[\ln 2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos p\left(\varphi_0 - \varphi_k^n\right)}{p}\right],$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(P_n u\right)\left(\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left(P_n u\right)\left(\varphi_k^n\right),$$

и учитывая, что

$$\left(P_{n_i\varphi_0} P_{n_j\varphi} K_{ij}\right)\left(\varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{k_j}^{n_j}\right) = K_{ij}\left(\varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{k_j}^{n_j}\right) \text{ и } f_{in_i}\left(\varphi_{k_i}^{n_i}\right) = \left(P_{n_i} f_i\right)\left(\varphi_{k_i}^{n_i}\right) = f_i\left(\varphi_{k_i}^{n_i}\right)$$

получаем систему

$$-\frac{1}{2n_i+1} \sum_{r_i=0}^{2n_i} v_{in_i}\left(\varphi_{r_i}^{n_i}\right)\left[\ln 2 + \sum_{p=1}^{n_i} \frac{\cos p\left(\varphi_{k_i}^{n_i} - \varphi_{r_i}^{n_i}\right)}{p}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2n_j+1} \sum_{r_j=0}^{2n_j} K_{ij}\left(\varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{r_j}^{n_j}\right) v_{jn_j}\left(\varphi_{r_j}^{n_j}\right) = f_i\left(\varphi_{k_i}^{n_i}\right)$$

$k_i = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, m}$. Перегруппировывая здесь слагаемые, окончательно получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений функций $v_{in_i}(\varphi)$ в узлах интерполирования

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2n_j+1} \sum_{r_j=0}^{2n_j} v_{jn_j}(\varphi_{r_j}^{n_j}) \left[K_{ij}(\varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{r_j}^{n_j}) - \delta_{ij}\left(\ln 2 + \sum_{p=1}^{n_i} \frac{\cos p(\varphi_{k_i}^{n_i} - \varphi_{r_i}^{n_i})}{p}\right)\right] =$$

$$= f_i(\varphi_{k_i}^{n_i})\,, \tag{3}$$

$k_i = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, m}.$

Очевидно, однозначная разрешимость СЛАУ (3) эквивалентна однозначной разрешимости системы приближённых интегральных уравнений (2).

Доказательство однозначной разрешимости СЛАУ.

Обозначим $(K_{ijn_in_j} v_{jn_j})(\varphi_0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} (P_{n_i\varphi_0} P_{n_j\varphi} K_{ij})(\varphi_0, \varphi) v_{jn_j}(\varphi) d\varphi$ и введём оператор $\hat{K}_{\overline{n}}$:

$$(\hat{K}_{\overline{n}}\vec{v}_{\overline{n}})(\varphi_0)=\left\{\sum_{j=1}^{m}(K_{ijn_in_j}v_{jn_j})(\varphi_0)\right\}_{i=1}^{m}.$$

Запишем систему (4) в виде операторного уравнения

$$(\hat{L}+\hat{K}_{\overline{n}})\vec{v}_{\overline{n}}=\vec{f}_{\overline{n}},$$

где $\vec{f}_{\overline{n}}(\varphi_0)=\{f_{in_i}(\varphi_0)\}_{i=1}^{m}$.

Оператор $\hat{L}+\hat{K}_{\overline{n}}$ действует из пространства $\Pi_{\overline{n}}$ в пространство $\Pi_{\overline{n}}$, где $\Pi_{\overline{n}}\subset\overline{L}^2_{[0,2\pi]}$ – конечномерное подпространство, состоящее из всех вектор-функций вида [4]

$$\vec{u}_{\overline{n}}(\varphi)=\{u_{in_i}(\varphi)\}_{i=1}^{m},$$

где $u_{in_i}(\varphi)\in\Pi_{n_i}$, $i=\overline{1,m}$.

Здесь $\Pi_{\overline{n}}\subset\overline{L}^2_{[0,2\pi]}$ – конечномерное подпространство всех тригонометрических полиномов порядка не выше n. Докажем, что оператор $\hat{L}+\hat{K}_{\overline{n}}$ непрерывно обратим в паре пространств

$$\left(\Pi_{\overline{n}},\Pi_{\overline{n}}\right), \tag{4}$$

и оценим разность между точным решением $\vec{v}(\varphi)$ системы (1) и приближённым решением $\vec{v}_{\overline{n}}(\varphi)$, найдённым из системы (2).

Для этого нам нужно оценить $\left\|\vec{f}-\vec{f}_{\overline{n}}\right\|_I$ и $\left\|\left(\hat{L}+\hat{K}\right)-\left(\hat{L}+\hat{K}_{\overline{n}}\right)\right\|_{\Pi_{\overline{n}}\to\Pi_{\overline{n}}}$.

Пусть $n=\min\{n_1,n_2,...,n_m\}$. Тогда, пользуясь *теоремами Джексона* [5], получаем: при $n>\mu$

$$\left\|\vec{f}-\vec{f}_{\overline{n}}\right\|_I\le D\left(\vec{f}\right)n^{-\mu-\gamma}\sqrt{m},$$

где $D(\vec{f})$ – некоторая константа, не зависящая от $\overline{n}$.

Далее, в [3] с помощью теорем Джексона доказано, что при $n>\mu$ выполняются неравенства

$$\left\|\left(K_{ij}-K_{ijn_in_j}\right)v_{jn_j}\right\|\le D\left(\hat{K}\right)\frac{1}{n^{\mu+\gamma}}\left\|\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I,$$

где $D(\hat{K})$ – некоторая другая константа, не зависящая от $\overline{n}$.

Тогда

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\left(K_{ij}-K_{ijn_in_j}\right)v_{jn_j}\right\|\le\sum_{j=1}^{m}\left\|\left(K_{ij}-K_{ijn_in_j}\right)v_{jn_j}\right\|\le\sum_{j=1}^{m}D\left(\hat{K}\right)n^{-\mu-\gamma}\left\|\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I=$$
$$=D\left(\hat{K}\right)n^{-\mu-\gamma}m\left\|\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I.$$

Окончательно получаем:

$$\left\|((\hat{L}+\hat{K})-(\hat{L}+\hat{K}_{\bar{n}}))\vec{v}_{\bar{n}}\right\|_I=\left\|(\hat{K}-\hat{K}_{\bar{n}})\vec{v}_{\bar{n}}\right\|=\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\|\sum_{j=1}^{n}(K_{ij}-K_{ijn_in_j})v_{jn_j}\right\|^2\right\}^{1/2}\le$$

$$\le\left\{\sum_{i=1}^{m}(D(\hat{K})n^{-\mu-\gamma}m\left\|\vec{v}_{\bar{n}}\right\|_I)^2\right\}^{1/2}=D(\hat{K})n^{-\mu-\gamma}m^{3/2}\left\|\vec{v}_{\bar{n}}\right\|_I.$$

Отсюда

$$\left\|\left(\hat{L}+\hat{K}\right)-\left(\hat{L}+\hat{K}_{\bar{n}}\right)\right\|_{\Pi_{\bar{n}}\to\Pi_{\bar{n}}}=\left\|\hat{K}-\hat{K}_{\bar{n}}\right\|_{\Pi_{\bar{n}}\to\Pi_{\bar{n}}}\le D\left(\hat{K}\right)m^{\frac{3}{2}}n^{-\mu-\gamma}.$$

Выберем $\bar{N}=\{N_1, N_2, ..., N_m\}$ такое, чтобы при

$$N=\min(N_1, N_2, ..., N_m)>\mu$$

выполнялось неравенство

$$p_{\bar{N}}=\left\|\left(\hat{L}+\hat{K}\right)^{-1}\right\|_{\bar{L}^2\to\bar{L}^2}\left\|\hat{K}-\hat{K}_{\bar{N}}\right\|_{\Pi_{\bar{N}}\to\Pi_{\bar{N}}}<1.$$

Тогда при любом $\bar{n}$ таком, что $n\ge N$, выполнено неравенство

$$p_{\bar{n}}=\left\|\left(\hat{L}+\hat{K}\right)^{-1}\right\|_{\bar{L}^2\to\bar{L}^2}\left\|\hat{K}-\hat{K}_{\bar{n}}\right\|_{\Pi_{\bar{n}}\to\Pi_{\bar{n}}}<1.$$

Теперь, пользуясь результатом, приведенным в [6, стр. 19], получаем, что при любом $\bar{n}$ таком, что $n\ge N$, оператор $\hat{L}+\hat{K}_{\bar{n}}$ непрерывно обратим в паре пространств (4), то есть система (2) имеет единственное решение $\vec{v}_{\bar{n}}(\varphi)$.

Кроме того, если $\vec{v}(\varphi)$ – это точное решение системы (1), то имеет место оценка

$$\left\|\vec{v}-\vec{v}_{\bar{n}}\right\|_I\le\left\|\left(\hat{L}+\hat{K}\right)^{-1}\right\|_{\bar{L}^2\to\bar{L}^2}\frac{1}{1-p_{\bar{n}}}\left[D\left(f\right)\frac{\sqrt{m}}{n^{\mu+\gamma}}+p_{\bar{n}}\left\|\vec{f}\right\|_I\right],$$

где $p_{\bar{n}}\le\left\|(\hat{L}+\hat{K})^{-1}\right\|_{\bar{L}^2\to\bar{L}^2}$, $D(\hat{K})m^{3/2}n^{-\mu-\gamma}=\beta_{\bar{n}}$, $\beta_{\bar{n}}=\underline{O}(1/n^{\mu+\gamma})$ при $n\to\infty$.

Отсюда следует, что

$$\left\|\vec{v}-\vec{v}_{\bar{n}}\right\|_I\le\sigma_{\bar{n}},$$

где $\sigma_{\bar{n}}=\underline{O}(1/n^{\mu+\gamma})$ при $n\to\infty$.

Выводы. На основе численного метода дискретных особенностей приближенного решения интегральных уравнений построена система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая заданную систему интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Доказано, что при некоторых предположениях о гладкости ядер регулярных частей и правых частей уравнений этой системы интегральных уравнений соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, получена оценка скорости сходимости приближённого решения к точному в среднем.

Список литературы: 1. *Tsalamengas J.L.* «Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case», IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. 58, 2010. – P. 3265 – 3274. **2.** *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент – М.: ТОО «Янус», 1995 – 520 с. **3.** *Гандель Ю.В.*, *Еременко С.В.*, *Полянская Т.С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитых волн: Учеб. Пособие. Ч.II. – Харьков, 1992. – 145 с. **4.** *Гандель Ю.В*. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть 1. Введение в методы вычисления сингулярних и гиперсингулярных интегралов. – Харьков – Херсон, 2001 год. – 92 с. **5.** *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. – М. Л.: ГТТИ, 1949. – 688 с. **6.** *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231 с.

Bibliography (transliterated): 1. Tsalamengas, J. L. "Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case." *IEEE Trans. Antennas Propagat.* Vol. 58. 2010. 3265–3274. Print. **2.** Lifanov, I. K. *Metod singuljarnyh integral'nyh uravnenij i chislennyj jeksperiment*. Moscow: TOO «Janus», 1995. Print. **3.** Gandel', Ju. V., S. V. Eremenko and T. S. Poljanskaja. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnyh tokov. Obosnovanie chislennogo metoda diskretnyh osobennostej reshenija dvumernyh zadach difrakcii jelektromagnityh voln: ucheb. posobie.* Vol. II. Kharkov, 1992. Print. **4.** Gandel', Ju. V. *Lekcii o chislennyh metodah dlja singuljarnyh integral'nyh uravnenij. Uchebnoe posobie*. Vol. 1. *Vvedenie v metody vychislenija singuljarnyh i gipersinguljarnyh integralov*. Kharkov – Kherson, 2001. Print. **5.** Natanson, I. P. *Konstruktivnaja teorija funkcij*. Moscow – Leningrad: GTTI, 1949. Print. **6.** Gabdulhaev, B. G. *Optimal'nye approksimacii reshenij linejnyh zadach*. Kazan': Izd. Kazansk. un-ta, 1980. Print.

Поступила (received) 04.03.2015

УДК 631.37

А.Ю. РЕБРОВ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ТРАКТОРНЫХ ШИН ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Предложен метод идентификации современных тракторных радиальных шин с использованием математической модели, построенной на универсальной характеристике шин. Метод позволяет идентифицировать шины по норме слойности и контурной площади пятна контакта, а также использовать математическую модель для теоретических исследований эффективности отечественных и зарубежных сельскохозяйственных тракторов, оборудованных современными радиальными шинами, в том числе категорий IF и VF. Для адекватного моделирования радиальной деформации и площади пятна контакта шин категорий IF и VF, которые характеризуются высокой эластичностью, предложено скорректировать математическую модель на основе универсальной характеристики шин.

Ключевые слова: радиальные тракторные шины, универсальная характеристика шин, норма слойности, контурная площадь пятна контакта.

Введение. Совершенствование сельскохозяйственных технологий неразрывно связано с внедрением инновационных технологий в различных сферах сельскохозяйственного производства. При создании новой тракторной техники, анализе и прогнозировании ее эффективности, крайне важны характеристики современных двигателей, трансмиссии и, несомненно, пнев-