

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Литвин Олег Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Литвин Олег Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Lytvyn Oleg Mykolayovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Нечуйвітер Олеся Петрівна** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

**Нечуйвітер Олеся Петровна** – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

**Nechuiviter Olesia Petrivna** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

**Каргапольцева Ганна Вікторівна** – асистент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

**Каргапольцева Анна Викторовна** – асистент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

**Kargapoltseva Ganna Viktorivna** – Asistant, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

УДК 539.3

**Е. С. МАЛАХОВ, А. В. ВОРОПАЙ**

### ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН

Рассматривается система из трех струн, контактирующих между собой в некоторых точках так, что перемещения в этих точках совпадают. Моделирование нестационарных колебаний струн осуществляется на основе волновых уравнений. Обратная задача сводится к решению системы трех интегральных уравнений Вольтера I-го рода, для которой осуществляется дискретизация. Блочная система линейных алгебраических уравнений решается с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова.

**Ключевые слова:** система струн, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, регуляризирующий алгоритм, интегральное уравнение Вольтера, идентификация сил.

**Введение и постановка задачи.** В работе [1] изложена постановка прямой задачи для нестационарных колебаний системы трех струн, и подробно описана методика её решения. В указанной работе на основе одномерных волновых уравнений определяются зависимости контактных сил, возникающих между струнами, с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Данная работа будет посвящена решению обратной задачи для исследуемой механической системы. В качестве примера при вычислениях исследуются нестационарные поперечные колебания системы канатов, моделируемых струнами, с параметрами, которые выбирались согласно [2]. Отметим, что в настоящей работе, как и в [1] предполагалось, что длины струн не меняются во времени, в случае моделирования продольных колебаний канатов и их систем можно использовать подход, аналогичный изложенному в монографии [3]. Рассматривается система из трех закрепленных струн, имеющих конечную длину. Как показано на рис. 1, несущую струну большей длины подкрепляют две другие струны, параллельные между собой, и меньшей длины для того, чтобы снизить нагрузку, которая приходится на несущую струну. К несущей струне приложена сосредоточенная нагрузка  $F(x, t) = P(t)\delta(x - x_3)$ , которая вызывает нестационарные колебания исследуемой системы, где  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака,  $x_3$  – точка приложения нагрузки. Точки пересечения третьей и первой струны обозначим  $x_1$ , третьей и второй –  $x_2$ , точки наблюдения –  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно. Отметим, что могут прикладываться несколько различных нагрузок в произвольных точках исследуемой системы. В этом случае метод решения задачи требует небольших изменений.

При решении *прямой задачи* причины, вызывающие колебания – *внешние возмущающие нагрузки*  $P_i(t)$ , известны, а необходимо найти следствия (их косвенное проявление), а именно изменение  $u(t)$  линейных перемещений точек струн во времени.

В случае *обратной задачи* известными являются перемещения одной из струн во времени  $u_s(t)$  в одной из ее точек, а необходимо по этим перемещениям найти изменение внешних возмущающих нагрузок (определить неизвестные силы по их косвенным проявлениям). При решении обратной задачи для системы струн кроме внешней возмущающей нагрузки необходимо также определить неизвестные силы контактного взаимодействия.

© Е. С. Малахов, А. В. Воропай, 2016

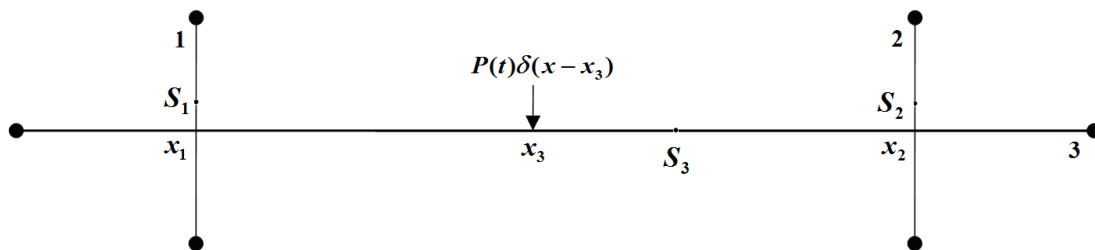


Рис. 1 – Исследуемая система струн.

**Прямая задача.** Для начала рассмотрим вспомогательную задачу о колебаниях одной струны под действием нескольких приложенных сосредоточенных нагрузок, которые обозначим

$$F_1(x,t), \dots, F_N(x,t), \text{ где } F_n(x,t) = R_n(t)\delta(x-x_n), \text{ } n \in [1, N].$$

Эти колебания описываются одномерным волновым уравнением [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^N F_n(x,t) \tag{1}$$

со следующими краевыми и начальными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{du(x,0)}{dt} = 0. \tag{2}$$

Как было показано в статье [1], при одной приложенной сосредоточенной нагрузке имеем следующее решение задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1}{\omega_k} \cdot \int_0^t R(\tau) \sin(\omega_k(t-\tau)) d\tau \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_1) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x). \tag{3}$$

В случае нескольких нагрузок, действующих на струну, можно обобщить формулу (3) следующей зависимостью:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_i(x,t-\tau) \cdot R_i(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где

$$K_i(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_i}{\omega_k} \cdot \sin(\omega_k t) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_i) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x).$$

Возвращаясь к задаче с тремя струнами, построим схему прямой задачи (рис. 2); при этом учтем влияние взаимодействия струн введение соответствующих реакций.

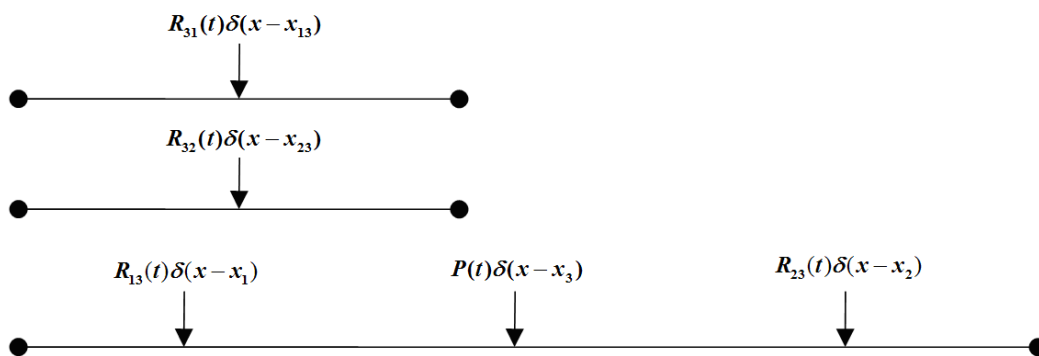


Рис. 2 – Струны под действием нагружения и контактных сил ( $R_{ij}$  – сила контакта  $i$ -ой и  $j$ -ой струн).

Выпишем систему уравнений, описывающую колебания системы струн, предварительно воспользовавшись условием антисимметричности контактных сил  $R_{ij} = -R_{ji}$  и обозначением  $R_i = (R_{13}(t) \ R_{23}(t) \ P(t))^T$ :

$$\begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_1} R_1(t)\delta(x-x_{13}); & a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_2} R_2(t)\delta(x-x_{23}); \\ a_3^2 \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_3} [R_1(t)\delta(x-x_1) + R_2(t)\delta(x-x_2) + R_3(t)\delta(x-x_3)], \end{cases} \tag{5}$$

где  $x_{13}$  – координата точки первой струны, в которой она контактирует с третьей;  $x_{23}$  – точка второй струны, в

которой она контактирует с третьей.

Система (5) дополняется нулевыми начальными и краевыми условиями вида (2), а так же кинематическими условиями контакта (равенствами перемещений в точках контакта):

$$u_1(x_{13}, t) = u_3(x_1, t), \quad u_2(x_{23}, t) = u_3(x_2, t). \tag{6}$$

На основе (4) можно выписать следующие соотношения для каждой из струн

$$u_1(x, t) = -\int_0^t K_{11}(x, t-\tau) \cdot R_1(\tau) d\tau; \quad u_2(x, t) = -\int_0^t K_{22}(x, t-\tau) \cdot R_2(\tau) d\tau; \quad u_3(x, t) = \sum_{n=1}^3 \int_0^t K_{3n}(x, t-\tau) \cdot R_n(\tau) d\tau, \tag{7}$$

где введены ядра

$$K_{in}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_i}{\omega_{ik}} \cdot \sin(\omega_{ik}t) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_n) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x),$$

в которых  $i$  в записи для  $K_i$  – это номер струны, а индекс  $n$  соответствует номеру нагрузки  $R_n(t)$ , и обозначено  $C_i = 2/l_i \rho_i$ ,  $\omega_{ik} = a_i \cdot \lambda_{ik}$ ,  $\lambda_{ik} = \pi k / l_i$ .

Проводим дискретизацию и обезразмеривание интегральных операторов. Это можно сделать с помощью методов прямоугольников, трапеций, Симпсона и так далее. В данной задаче будет использоваться метод частичного интегрирования, который обеспечивает более высокую гладкость решения.

$$\int_0^t K(t-\tau) \cdot R(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^j R_i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \sin(\omega_k(t_j - \tau)) d\tau = \sum_{i=1}^j R_i \cdot \frac{2}{\omega_k} \sin\left[\omega_k \cdot \left((j-i) + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t\right] \cdot \sin\left(\frac{\omega_k \cdot \Delta t}{2}\right),$$

где  $t_j = j \cdot \Delta t$  – дискретное время.

Неизвестные силы контактного взаимодействия будем определять из кинематических условий (6) и условия антисимметричности контактных сил, которые подставлялись в (7).

Таким образом, получена следующая система двух матричных уравнений для дискретных ядер:

$$-\mathbf{A1}_{11} \cdot \mathbf{R}_1 = \mathbf{A3}_{11} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A3}_{12} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3; \quad -\mathbf{A2}_{22} \cdot \mathbf{R}_2 = \mathbf{A3}_{21} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A3}_{22} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A3}_{23} \cdot \mathbf{R}_3, \tag{8}$$

где матрица  $\mathbf{Ai}_{nm}$  соответствует дискретной форме  $\mathbf{Ki}_n(x_m, t_j)$ , то есть индекс  $n$  обозначает точку приложения силы,  $m$  – точку исследования, а  $i$  – номер струны.

Система (8) в матричном виде записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11} & \mathbf{A3}_{12} \\ \mathbf{A3}_{21} & \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3 \\ -\mathbf{A3}_{23} \cdot \mathbf{R}_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

При решении прямой задачи вектор  $\mathbf{R}_3$ , соответствующий силе  $P(t)$ , считается известным, поэтому слагаемые, содержащие вектор  $\mathbf{R}_3$ , помещены в правую часть. Система (9) приводится к традиционной компактной записи при помощи следующих обозначений:  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A3}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A3}_{21}$ ,  $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22}$ ,  $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{A3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3$ ,  $\mathbf{B}_2 = -\mathbf{A3}_{23} \cdot \mathbf{R}_3$ . Таким образом, имеем матричное уравнение с неизвестными  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

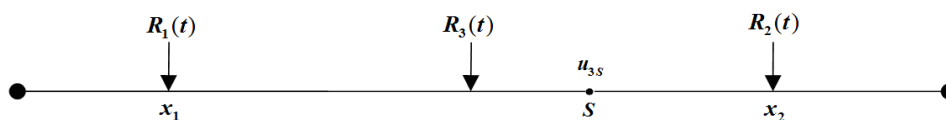


Рис. 3 – Третья струна под действием неизвестных нагрузок.

Система уравнений (10) является блочным матричным уравнением, которое можно решить при помощи обобщенных алгоритмов Гаусса или Крамера [5]. Стоит заметить, что (10) эквивалентно системе интегральных уравнений Вольтерра I-го рода, а, как известно, решение такой системы – это существенно некорректная задача [6], поэтому для решения применялся регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова [5]. При вычислениях с блочными матрицами производятся исключительно символьные операции, поэтому для систем более [5x5] рекомендуется использование алгоритма Гаусса в силу меньшего числа операций. В случае порядка меньшего [5x5] целесообразно использование обобщенного алгоритма Крамера в силу простоты символьного решения, а так же более удобного совместного использования регуляризирующего алгоритма Тихонова при обращении матриц. Таким образом, находим неизвестные контактные силы в следующей форме:

$$\mathbf{R}_1 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_1; \quad \mathbf{R}_2 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_2, \tag{11}$$

где  $\Delta \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{vmatrix}$  – определители блочных матриц;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\mathbf{c}$  – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой приведен в [5].

По известным контактным силам вычисляются перемещения в произвольной точке любой из струн на основе соотношений (7).

**Обратная задача.** Допустим, что в качестве исходных данных при решении обратной задачи заданы перемещения в некоторой точке  $S$  третьей струны (рис. 3).

Колебания системы струн описываются соотношениями (4), которые в рассматриваемом случае будут являться интегральными уравнениями Вольтерра I-го рода относительно трех неизвестных  $R_i(t)$ . Для точки  $S$  можно записать

$$u_{3S}(t) = u_3(x_S, t) = \int_0^t K_{31}(x_S, t - \tau) \cdot R_1(\tau) d\tau + \int_0^t K_{32}(x_S, t - \tau) \cdot R_2(\tau) d\tau + \int_0^t K_{33}(x_S, t - \tau) \cdot R_3(\tau) d\tau, \quad (12)$$

В интегральное уравнение (12) входят 3 неизвестные силы. Дополним его двумя уравнениями для точек контакта первой и третьей, второй и третьей струн, что дает систему из трех уравнений с тремя неизвестными, которая в матричной форме выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11} & \mathbf{A3}_{12} & \mathbf{A3}_{13} \\ \mathbf{A3}_{21} & \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22} & \mathbf{A3}_{23} \\ \mathbf{A3}_{1S} & \mathbf{A3}_{2S} & \mathbf{A3}_{3S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_{3S} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матричная система уравнений (13) в более простой форме имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_{3S} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где были введены следующие обозначения:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11}, \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A3}_{12}, \mathbf{A}_{13} = \mathbf{A3}_{13}, \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A3}_{21}, \mathbf{A}_{22} = \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22}, \mathbf{A}_{23} = \mathbf{A3}_{23}, \\ \mathbf{A}_{31} = \mathbf{A3}_{1S}, \mathbf{A}_{32} = \mathbf{A3}_{2S}, \mathbf{A}_{33} = \mathbf{A3}_{3S}.$$

Метод решения системы (14) аналогичен ранее изложенному при решении прямой задачи. В результате можно записать:

$$\mathbf{R}_i = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_i, \quad (15)$$

где  $\Delta \mathbf{A}$  – определитель блочной матрицы  $\mathbf{A}$ ;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{u}_{3S} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & 0 & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{u}_{3S} & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & 0 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{u}_{3S} \end{vmatrix}$$

Эти соотношения можно обобщить на случай, если известны перемещения первой или второй струн – тогда в системе (13) будет меняться лишь вектор правых частей.

**Вычислительный эксперимент.** Исходные данные при расчетах принимались на основе [2] для реальных канатов. Для удобства анализа было принято, что все струны имели одинаковые свойства (канаты одинакового сечения), а механическая схема была симметричной. При решении обратной задачи в качестве исходных данных использовались числовые результаты, полученные при решении прямой задачи. По выражениям (11) определялись реакции  $\mathbf{R}_1(t)$  и  $\mathbf{R}_2(t)$ , а затем из матричного соотношения  $\mathbf{u}_{3S} = \mathbf{A3}_{1S} \mathbf{R}_1 + \mathbf{A3}_{2S} \mathbf{R}_2 + \mathbf{A3}_{3S} \mathbf{R}_3$  определялось перемещение точки третьей струны в дискретные моменты времени. Расчет сил контактного взаимодействия проводился со следующими параметрами:  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = 2$  м,  $l_3 = 40$  м – длины струн;  $d_{st_i} = 0.0052$  м – диаметр струн;  $\rho = 0.109$  кг/м – линейная плотность струн;  $a_i = 214$  м/с – скорость распространения волн в струне,  $x_1 = 0.2 \cdot l_3$ ,  $x_2 = 0.8 \cdot l_3$  – точки контакта. Параметры регуляризации выбирались согласно методике, изложенной в работе [7]; для прямой задачи  $\alpha = 10^{-19}$ , и  $\alpha = 10^{-24}$  – обратной.

Изменение силы  $P(t)$  во времени, которая действует по середине третьей струны, при решении прямой задачи предполагалось согласно функции Хевисайда:  $P(t) = q_0 \cdot H(t)$ , где  $q_0 = 10$  Н – интенсивность нагрузки. Исследовался промежуток времени  $T = 2$  с. Вместо бесконечных сумм в выражениях производился учет конечного числа членов ряда  $K = 50$ , для дискретизации по времени  $\Delta t = T / J = 0.004$ ,  $J = 500$ . Расчеты производились в среде MathCad.

На рис. 4 показаны изменения контактных сил во времени. Сплошная кривая соответствует реакции  $R_1$ , а точками показана реакция  $R_2$ .

В силу того, что реакции первой  $R_1$  и второй  $R_2$  струн на третью струну расположены симметрично, возмущающая сила приложена к середине третьей струны, а параметры первой и второй струн совпадают, то реакции должны равняться между собой, что демонстрирует рис. 4. Это совпадение подтверждает достоверность вычислений.

На рис. 5 изображены перемещения каждой из трех струн в точках наблюдения. Рис. 5, а показывает изменение перемещения первой струны в точке с координатой  $x_{1S} = 0.4 \cdot l_1$  и второй –  $x_{2S} = 0.4 \cdot l_2$ . Из-за того, что первая и вторая струны идентичны, их перемещения полностью совпадают. На рис. 5, б показаны перемещения третьей струны в точке с координатами  $x_{3S} = 0.6 \cdot l_3$  – сплошная кривая, на этом же графике точками показаны зашумленные значения перемещения, которые брались в качестве исходных данных для обратной задачи. Поскольку моделировались случайные зашумления, то шум накладывался согласно закону нормального распределения со средним квадратичным отклонением равным, 10 % от максимального незашумленного перемещения третьей струны.

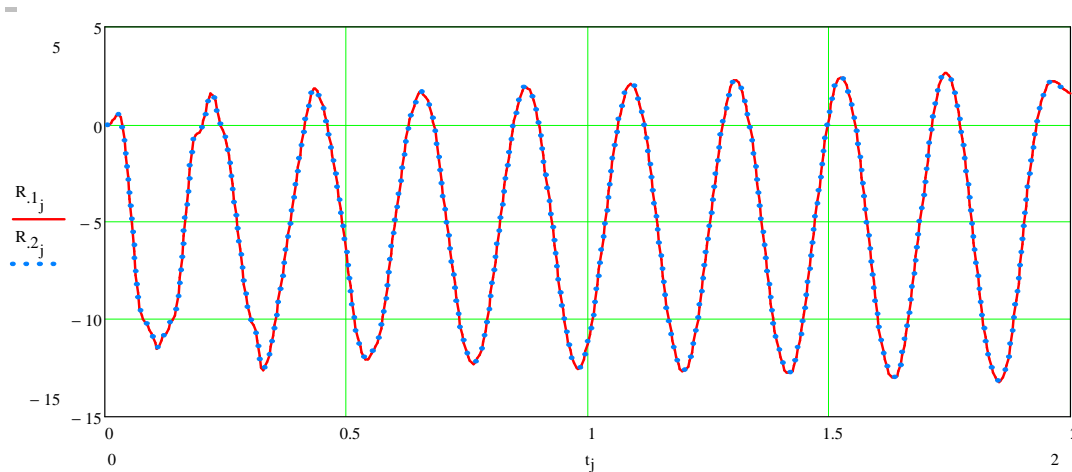


Рис. 4 – Значения контактных сил.

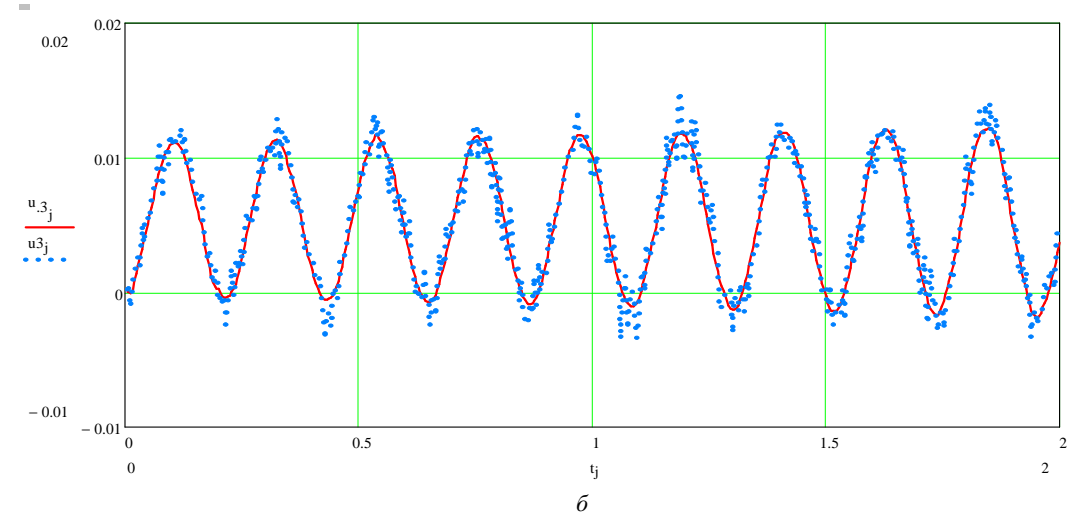
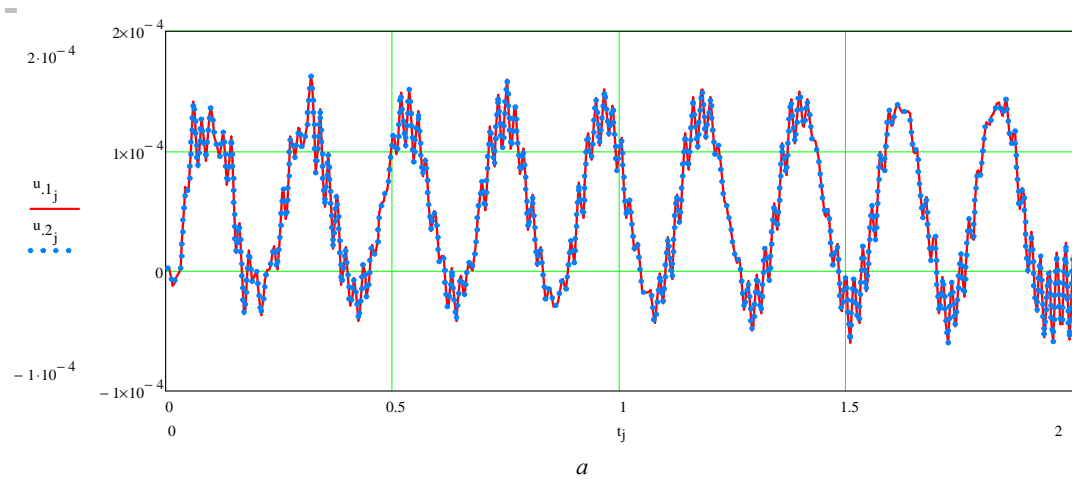


Рис. 5 – Перемещения струн под действием сосредоточенной нагрузки: а – перемещений 1 и 2 струн; б – перемещения 3 струны.

Исходными данными для обратной задачи (идентификации силы  $\mathbf{P}(t)$ ) являются числовые значения прогиба третьей струны в точке  $S_3$ , которые изображены на рис. 5, б. На рис. 6, а приведены для сравнения приложенная сила  $\mathbf{P}(t)$  (сплошная кривая) и восстановленная нагрузка  $\mathbf{R}_3(t)$ , соответствующая этой силе (показана точками). Для восстановленной контактной силы  $\mathbf{R}'_1$  на рис. 6, б идет сравнение с  $\mathbf{R}_1$ , полученной при решении прямой задачи (для второй реакции  $\mathbf{R}_2$  рисунок будет идентичным в силу симметрии).

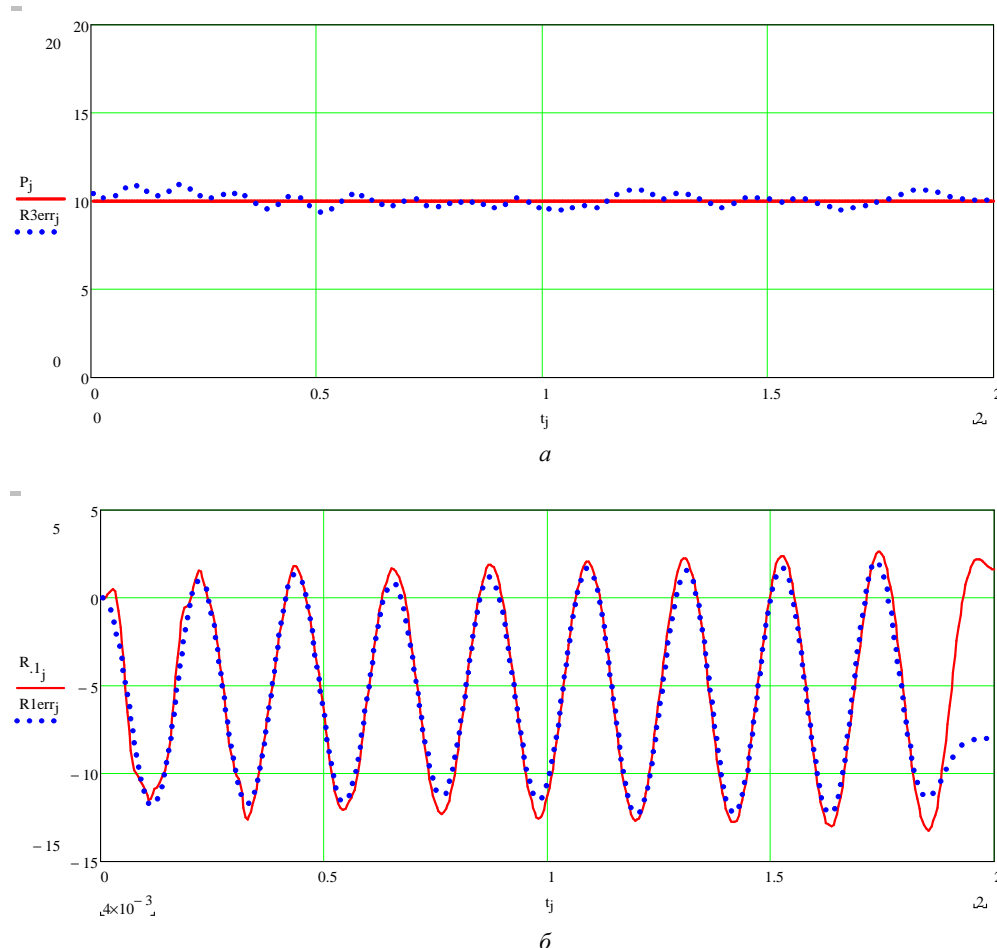


Рис. 6 – Сравнение заданных и идентифицированных нагрузок:  
а – возмущающей нагрузки; б – сил контактного взаимодействия.

Как видно из рис. 6, полученные при решении обратной задачи идентифицированные силы «хорошо» совпадают с исходными, с учетом того факта, что исходные данные для обратной задачи имели 10 % зашумление. Укажем, что отличие идентифицированной силы  $\mathbf{R}'_1$  от силы  $\mathbf{R}_1$  в конце исследуемого промежутка времени вызвано, по-видимому, накоплением погрешностей при решении блочной системы интегральных уравнений.

**Выводы.** В данной работе получено достаточно устойчивое решение обратной задачи для нестационарных колебаний системы, состоящей из трех струн. Приведены результаты расчетов, показывающие возможность идентификации неизвестного внешнего нагружения по известным перемещениям во времени точки, принадлежащей одной из струн (третьей), которые могут быть измерены экспериментально. Таким образом, появляется возможность косвенного измерения нестационарной силы по перемещениям одной из точек системы трех струн.

**Список литературы:** 1. Малахов Е. С. Прямая задача для нестационарных колебаний системы трех струн // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 67 – 71. 2. Ануриев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя. В 3 т. – 8-е изд., перераб. и доп. // Под ред. И. Н. Жестковой. – М. : Машиностроение, 2001. – 920 с. 3. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику одномерных деформируемых тел переменной длины. – К. : Наукова думка, 1971. – 224 с. – Библиогр. : С. 218 – 224. 4. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1969. – 288 с. 5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 288 с. 6. Верлянь А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие. – Киев : Наукова думка, 1986. – 544 с. 7. Вороний А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкций // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 22 – 29.

**References:** 1. Malakhov, E. S. Pryamaya zadacha dlya nestatsionarnykh kolebaniy sistemy trekh strun [Direct problem of non-stationary oscillations of a three-string system]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, no. 41 (1150), pp. 67–71. 2.

Anur'ev, V. I. *Spravochnik konstruktora-mashinostroitel'ya*. V 3 t. – 8-e izd. pererab. i dop. Ed. Zhestkova, I. N. [Handbook of designer-mechanician. In 3 vol. 8-th edn.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2001. 920 p. **3.** Goroshko, O. A. and Savin, G. N. *Vvedenie v mekhaniku odnomernykh deformiruemyykh tel peremennoy dliny* [Introduction to the mechanics of one-dimensional deformable bodies of variable length]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1971. 224 p., Bibliogr. pp. 218–224. **4.** Aramanovich, I. G. and Levin, V. I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p. **5.** Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry Publ., 1986. 288 p. **6.** Verlan', A. F. and Sizikov, V. S. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy: spravochnoe posobie* [Integral equations: methods, algorithms, programs: handbook]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1986. 544 p. **7.** Voropay, A. V. Regulariziruyushchiy algoritm A. N. Tikhonova v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnoy dinamiki uprugikh elementov konstruktsii [Tikhonov's regularization algorithm for ill-posed problems of elastic structural element nonstationary dynamics]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, no. 41 (1150), pp. 22–29.

Поступила (received) 16.03.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Воропай Олексій Валерійович** – кандидат технічних наук, доцент, докторант кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Воропай Алексей Валериевич** – кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Voropay Alexey Valerievich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate at the Department of Higher Mathematics, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Малахов Євген Сергійович** – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

**Малахов Евгений Сергеевич** – аспирант, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков, тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

**Malakhov Evgeniy Sergeevich** – postgraduate, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov, tel: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

УДК 519.25

**Т. О. МАРИНИЧ, Л. Д. НАЗАРЕНКО, К. В. ГЕЦ**

#### МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ СТРУКТУРНИМИ РОЗРИВАМИ

Проведено пошук оптимальної моделі для опису нестационарних часових рядів із адекватними статистичними характеристиками та якісними прогнозними властивостями. У якості інформаційної бази обрано щоденні статистичні дані міжбанківського валютного курсу гривні до долара США. Досліджено детерміністичні та стохастичні компоненти з метою визначення класу стаціонарності ряду. Перевірено доцільність проведення різних процедур згладжування та вирівнювання часових рядів із сезонністю, циклічністю та трендом. Для вихідних даних побудовано інтегровані моделі авторегресії – ковзного середнього (ARIMA), умовної гетероскедастичності (ARCH); проведено аналіз залишків та перевірено якість отриманих моделей. Досліджено умови застосування фіктивних змінних для усунення структурних розривів даних та проблем із залишками моделей. Виконано порівняльний аналіз якості прогнозів за побудованими моделями. Наведений алгоритм дозволив встановити оптимальну модель SARIMA, що включає сезонні параметри та фіктивні змінні структурного розриву.

**Ключові слова:** модель авторегресії, прогноз, стаціонарність, структурний розрив, фіктивна змінна, автокореляція, гетероскедастичність.

**Вступ.** Моделювання технічних, біологічних, економічних та інших процесів вимагає попереднього дослідження структури даних, природи стаціонарності, наявності аномальних спостережень. Особливістю економічних показників є наявність різнонаправлених трендів, сезонних та циклічних коливань, структурних розривів, що обумовлює їх нестационарність та спричинює автокореляцію, гетероскедастичність та відсутність нормального закону розподілу залишків моделей, побудованих за цими даними. Це унеможливило використання класичного статистичного апарату та актуалізує пошук методів та моделей, які дозволяють зменшити негативний вплив зазначених проблем для отримання більш якісних математичних моделей та достовірних прогнозів.

**Аналіз основних досягнень і літератури.** Сучасні методи прогнозування часових рядів базуються, переважно, на принципі історичного обумовлення майбутнього. При цьому постійного удосконалення набувають як методи тлумачення інформації, що представляє минулі події, так і способи їх екстраполяції на майбутнє. Широкого розповсюдження набуло параметричне моделювання, класичним прикладом якого є регресійний аналіз. Найбільш поширеними методами оцінки параметрів моделі залишаються метод найменших квадратів Гауса та метод максимальної правдоподібності. Підходи до специфікації параметричних моделей умовно можна поділити на структурні моделі, які базуються на системі рівнянь та обмежень на параметри, і спеціальні моделі «ad hoc», які не мають теоретичного обґрунтування [1].

© Т. О. Маринич, Л. Д. Назаренко, К. В. Гец, 2016