Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

***Литвин Олег Миколайович*** – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

***Литвин Олег Николаевич*** – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

***Lytvyn Oleg Nikolaevich*** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

***Литвин Олег Олегович*** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

***Литвин Олег Олегович*** – кандидат физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

***Lytvyn Oleg Olegovich*** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

***Коваль Федір Федорович*** – доктор фізико-математичних наук, керівник ООО "Магістр ЛТД", ИМК, м. Харків; тел.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

***Коваль Федор Федорович*** – доктор физико-математичних наук, руководитель ООО "Магистр ЛТД", ИМК, г. Харьков; тел.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

***Koval Fedor Fedorovich*** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Kharkov; tel.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

***Чорна Олена Сергіївна*** – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

***Черная Елена Сергеевна*** – ассистент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

***Chorna Olena Sergiivna*** – assistant, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

УДК 519.6

***О. М. ЛИТВИН, О. П. НЕЧУЙВІТЕР, Г. В. КАРГАПОЛЬЦЕВА***

## ОЦІНКА ПОВНОЇ ПОХИБКИ КУБАТУРНОЇ ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧОЇ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Отримано оцінку повної абсолютної похибки кубатурної формули наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на взаємноперпендикулярних площинах наближено з заданою максимальною похибкою. Кубатурна формула будується з використанням оператора інтерфлетації, функція належить класу Ліпшица з додатковими умовами. На конкретному прикладі продемонстрована справедливість теореми про оцінку похибки методу заокруглення розв’язків.

**Ключові слова:** інтеграли від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, кубатурні формули, інтерфлетація, похибка методу, неусувна похибка, похибка заокруглення.

**Вступ.** Широке коло прикладних задач використовує засоби цифрової обробки багатовимірних сигналів. Це томографія, рентгенографія, телебачення, радіолокація, екологічний моніторинг та інші. Сфери застосування багатовимірних зображень обумовлюють необхідність використання при побудові та дослідженні математичних моделей різних типів задання інформації. Наприклад, інформація про функцію декількох змінних може задаватися не тільки значеннями функції в точках, а й її слідами на лініях, площинах, проекціями.

В сучасних моделях цифрової обробки сигналів та зображень все частіше розглядаються кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій, які саме і використовують нові інформаційні оператори. Однак не так багато досліджень, які присвячені отриманню оцінки повної похибки для таких кубатурних формул.

В даній роботі досліджується повна похибка кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, яка в своїй побудові використовує сліди функції на площинах.

**Аналіз останніх досліджень.** В роботах [1 – 6] викладена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням *операторів інтерлінації* у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних лініях та значеннями функції в точках. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій, двох змінних в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально обраних лініях. Теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням *операторів інтерфлетації* у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках, висвітлена в роботах [9 – 15]. В [16] дисертантом доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетації та оптимальним вибором взаємноперпендикулярних площин.

В усіх наведених роботах розглядаються квадратурні та кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних і досліджується тільки один вид похибки – похибка методу. Як правило, на практиці важлива не лише похибка методу, але і неусувна похибка, і похибка заокруглення. Тому дослідження повної похибки кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, зокрема яка в своїй побудові використовує сліди функції на площинах, є актуальною задачею.

**Постановка задачі.** Нехай функція трьох змінних $f(x,y,z)\in C^2_{3,L,\tilde{L}}$, тобто визначена на $G=[0,1]^3$, задовольняє наступним *умовам Ліпшиця*:

$$\left|f(x_1,y,z)-f(x_2,y,z)\right|\le L|x_1-x_2|,\ \left|f(x,y_1,z)-f(x,y_2,z)\right|\le L|y_1-y_2|,$$

$$\left|f(x,y,z_1)-f(x,y,z_2)\right|\le L|z_1-z_2|,$$

$$\big|f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_1,z_1)-f(x_1,y_2,z_1)-f(x_1,y_1,z_2)+$$

$$+f(x_2,y_2,z_1)+f(x_2,y_1,z_2)+f(x_1,y_2,z_2)-f(x_2,y_2,z_2)\big|\le\tilde{L}|x_1-x_2||y_1-y_2||z_1-z_2|,$$

у випадку, коли інформація про функцію задана її $N=3\ell$ слідами на системі взаємноперпендикулярних прямих $x_k=k\Delta-\Delta/2,\ \ y_j=j\Delta-\Delta/2,\ \ z_s=s\Delta-\Delta/2,\ \ k,j,s=\overline{1,\ell},\ \Delta=1/\ell$.

Для кубатурної формули

$$\Phi_1^3(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)\sin\omega x\sin\omega y\sin\omega z dxdydz$$

наближеного обчислення

$$I_1^3(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\omega x\sin\omega y\sin\omega z dxdydz$$

необхідно знайти оцінку повної абсолютної похибки. В якості оператора $Of(x,y,z)$ розглядається інтерфлетант з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів.

**Повна похибка кубатурної формули наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючої функції трьох змінних.** В роботі [15] отримана оцінка похибки наближення для кубатурної формули

$$\Phi_1^3(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1\sum_{k=1}^{\ell}f(x_k,y,z)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\sin\omega x dx\sin\omega y dy\sin\omega z dz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\sum_{j=1}^{\ell}f(x,y_j,z)\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\sin\omega y dy\sin\omega x dx\sin\omega z dz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\sum_{s=1}^{\ell}f(x,y,z_s)\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\sin\omega z dz\sin\omega x dx\sin\omega y dy-$$

$$-\int_0^1\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}f(x_k,y_j,z)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\sin\omega dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\sin\omega y dy\sin\omega z dz-$$

$$-\int_0^1\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}f(x_k,y,z_s)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\sin\omega x dx\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\sin\omega z dz\sin\omega y dy-$$

$$-\int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x,y_j,z_s)\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin\omega y dy\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\sin\omega z dz\sin\omega x dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x_k,y_j,z_s)\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\sin\omega x dx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin\omega y dy\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\sin\omega z dz .$$

***Теорема 1.* [15]** *Нехай* $f(x,y,z)\in C^2_{3,L,\tilde{L}}$ *та функція задана* $N=3\ell$ *слідами*

$$f(x_k,y,z),\ 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 1,\ f(x,y_j,z),\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1,\ f(x,y,z_s),\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$$

*на системі взаємноперпендикулярних площин*

$$x_k=k\Delta-\Delta/2,\ \ y_j=j\Delta-\Delta/2,\ \ z_s=s\Delta-\Delta/2,\ \ k,j,s=\overline{1,\ell},\ \Delta=1/\ell$$

*в області* $G=[0,1]^3$. *Для кубатурної формули* $\Phi_1^3(f,\omega)$ *обчислення* $I_1^3(f,\omega)$ *справедлива наступна оцінка похибки наближення*:

$$\left|I_1^3(f,\omega)-\Phi_1^3(f,\omega)\right|\le\frac{\tilde{L}}{64}\frac{1}{\ell^3}.$$

***Теорема 2.*** *Нехай* $f(x,y,z)\in C^2_{3,L,\tilde{L}}$ *та функція задана* $N=3\ell$ *слідами*

$$f(x_k,y,z),\ 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 1,\ f(x,y_j,z),\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1,\ f(x,y,z_s),\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$$

*на системі взаємноперпендикулярних площин*

$$x_k=k\Delta-\Delta/2,\ \ y_j=j\Delta-\Delta/2,\ \ z_s=s\Delta-\Delta/2,\ \ k,j,s=\overline{1,\ell},\ \Delta=1/\ell$$

*в області* $G=[0,1]^3$. *Для кубатурної формули* $\Phi_1^3(f,\omega)$ *обчислення* $I_1^3(f,\omega)$ *справедлива наступна оцінка для неусувної похибки*:

$$E_1\le\delta_x+\delta_y+\delta_z+\delta_{xy}+\delta_{xz}+\delta_{yz}+\delta_{xyz}.$$

*Доведення*. Оцінимо абсолютну неусувну похибку $E_1$ в припущені, що $f(x,y,z)$ на площинах

$$x=x_k,\ \ k=\overline{1,\ell},\ \ y=y_j,\ \ j=\overline{1,\ell},\ \ z=z_s,\ \ s=\overline{1,\ell}$$

задана наближено з максимальною похибкою $\delta_x$, $\delta_y$ та $\delta_z$ відповідно:

$$\left|f(x_k,y,z)-\tilde{f}(x_k,y,z)\right|\le\delta_x,\quad k=\overline{1,\ell},\ \left|f(x,y_j,z)-\tilde{f}(x,y_j,z)\right|\le\delta_y,\quad j=\overline{1,\ell},$$

$$\left|f(x,y,z_s)-\tilde{f}(x,y,z_s)\right|\le\delta_z,\quad s=\overline{1,\ell},$$

а також

$$\left|f(x_k,y_j,z)-\tilde{f}(x_k,y_j,z)\right|\le\delta_{xy},\ \ k,j=\overline{1,\ell},\ \left|f(x_k,y,z_s)-\tilde{f}(x_k,y,z_s)\right|\le\delta_{xz},\ \ k,s=\overline{1,\ell},$$

$$\left|f(x,y_j,z_s)-\tilde{f}(x,y_j,z_s)\right|\le\delta_{yz},\ \ j,s=\overline{1,\ell},\ \left|f(x_k,y_j,z_s)-\tilde{f}(x_k,y_j,z_s)\right|\le\delta_{xyz},\ \ k,j,s=\overline{1,\ell}.$$

Тоді

$$E_1=\left|\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\sin\frac{\omega\Delta(2k-1)}{2}\int_0^1\int_0^1\left(f(x_k,y,z)-\tilde{f}(x_k,y,z)\right)\sin\omega y dy\sin\omega z dz+\right.$$

$$+\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\sin\frac{\omega\Delta(2j-1)}{2}\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y_j,z)-\tilde{f}(x,y_j,z)\right)\sin\omega x dx\sin\omega z dz+$$

$$+\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sum_{s=1}^{\ell}\sin\frac{\omega\Delta(2s-1)}{2}\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z_s)-\tilde{f}(x,y,z_s)\right)\sin\omega x dx\sin\omega y dy-$$

$$-\frac{2}{\omega}\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sin\frac{\omega\Delta(2k-1)}{2}\sin\frac{\omega\Delta(2j-1)}{2}\int_0^1\left(f(x_k,y_j,z)-\tilde{f}(x_k,y_j,z)\right)\sin\omega z dz-$$

$$-\frac{2}{\omega}\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sin\frac{\omega\Delta(2k-1)}{2}\sin\frac{\omega\Delta(2s-1)}{2}\int_0^1\left(f(x_k,y,z_s)-\tilde{f}(x_k,y,z_s)\right)\sin\omega y dy-$$

$$-\frac{2}{\omega}\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sin\frac{\omega\Delta}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sin\frac{\omega\Delta(2j-1)}{2}\sin\frac{\omega\Delta(2s-1)}{2}\int_0^1\left(f(x,y_j,z_s)-\tilde{f}(x,y_j,z_s)\right)\sin\omega y dy+$$

$$+\frac{8}{\omega^3}\sin^3\frac{\omega\Delta}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sin\frac{\omega\Delta(2k-1)}{2}\sin\frac{\omega\Delta(2j-1)}{2}\sin\frac{\omega\Delta(2s-1)}{2}\left(f(x_k,y_j,z_s)-\tilde{f}(x_k,y_j,z_s)\right)\Big|.$$

Якщо $n$ таке, що $\left|\sin\frac{\omega\Delta}{2}\right|\le\frac{\omega\Delta}{2}$, то

$$E_1\le\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\ell\delta_x+\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\ell\delta_y+\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\ell\delta_y+$$

$$+\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\ell^2\delta_{xy}+\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\ell^2\delta_{xz}+\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\ell^2\delta_{yz}+\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\frac{2}{\omega}\frac{\omega\Delta}{2}\ell^3\delta_{xyz}=$$

$$=\delta_x+\delta_y+\delta_z+\delta_{xy}+\delta_{xz}+\delta_{yz}+\delta_{xyz}.$$

Теорема 2 доведена.

Для знаходження оцінки похибки заокруглення для кубатурної формули $\Phi_1^3(f,\omega)$ можна використати метод збіжності перших десяткових знаків (ЗПЗ) із різною довжиною мантиси [17]. Такі методи оцінки похибки заокруглення розв'язків задач обчислювальної математики в арифметиці з плаваючою комою, що базуються на основі порівняння розв'язків із змінною довжиною мантиси машинного числа, з'явилися з розповсюдженням в безкоштовному доступі бібліотеки програм GNU GMP [18], що реалізує стандарт IEEE 754 [19].

Нехай $A$ – невідоме точне скінчене або нескінчене число, $a$ – його відоме наближення з відомою похибкою $\Delta:|A-a|\le\Delta$, $a_1$ – друге наближення, таке що $a=a_1+\alpha$, де $|\alpha|<|a|$ та $|A-a_1|\le\Delta+|\alpha|$. Припустимо, що мантиса числа $a$ має $m$ десяткових знаків. Представимо числа $a, a_1, \alpha$ у вигляді

$$a=\pm\mu\cdot10^e=\pm\left(\sum_{i=1}^{m}s_i\cdot10^{-i}\right)\cdot10^e=a_1+\alpha,\ a_1=\pm\left(\sum_{i=1}^{t}s_i\cdot10^{-i}\right)\cdot10^e,\ \alpha=\alpha^t=\pm\left(\sum_{i=t+1}^{m}s_i\cdot10^{-i}\right)\cdot10^e,$$

$e$ – порядок числа, $1\le t\le m$. Розбиття числа $a$ на $a_1$ і $\alpha$ називається *відсіканням числа за мантисою*. Число $\alpha$ називається *похибкою заокруглення числа* $a_1$, $|\alpha|$ – *помилка відсікання числа* $a$. Спосіб заокруглення числа відсіканням за мантисою називають *методом відкидання*. Значення числа $t_0$, яке гарантує досягнення точності $\varepsilon_A$, раціонально визначати з умови $t_0=\min t$, якщо $\Delta+|\alpha^t|\le\varepsilon_A$.

Розглянемо $v$ значень функції

$$\varphi_j(u)=\pm\left(\sum_{i=1}^{k}s_i^j\cdot10^{-i}\right)\cdot10^e,\quad j=\overline{1,v},\ v\ge2,\ k \text{ – натуральне число або } k=\infty.$$

Говорять, що у функції $\varphi_j(u)$ збігаються $t$ перших знаків, якщо $s_i^1=s_i^2=...=s_i^t$, $i=\overline{1,t}$.

Якщо

$$w(u)\in R^1,\ w(u)=\pm\left(\sum_{i=1}^{\infty}s_i\cdot10^{-i}\right)\cdot10^e=w^t(u)+h^t(u),\ w^t(u)=\pm\left(\sum_{i=1}^{t}s_i\cdot10^{-i}\right)\cdot10^e,\ h^t(u)=\pm\left(\sum_{i=t+1}^{\infty}s_i\cdot10^{-i}\right)\cdot10^e,$$

де $w_m(u)$ – це обчислене $w(u)$ при довжині мантиси $m$, $\Delta_m=w(u)-w_m(u)$, то має місце теорема про оцінки похибки метода заокруглення розв'язків по збіжності $t$ перших десяткових знаків.

***Теорема 3.*** [17] *(про оцінку похибки методу заокруглення розв'язків). Нехай* $h_m^t(u)=w_m(u)-w^t(u)$, $|h_m^t(u)|<1\cdot10^{e-t}$, $|\Delta_m|<1\cdot10^{e-t}$. *Для того, щоб розв'язки* $w(u)$ *та* $w_m(u)$ *мали* $t$ ЗПЗ, *необхідно та достатньо, щоб* $0\le|h_m^t(u)-\Delta_m|<1\cdot10^{e-t}$, *причому якщо* $h_m^t(u)$, $\Delta_m$ *мають різні знаки, то повинна виконуватися нерівність* $|h_m^t(u)-\Delta_m|<1\cdot10^{e-t}$, *якщо однакові, – то нерівність* $|h_m^t(u)|\ge|\Delta_m|$. *Похибка розв'язків* $w^t(u)$ *задовольняє умові* $|w^t(u)-w(u)|<1\cdot10^{e-t}$.

**Чисельний експеримент.** Покажемо справедливість теореми 3 і для більш широкого класу $C^2_{3,L,\tilde{L},\alpha}$, $0<\alpha\le1$. Розглянемо клас дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що задовольняють *умові Гельдера* по кожній змінній:

$$\left| f(x_1,y,z)-f(x_2,y,z)\right| \le L|x_1-x_2|^{\alpha}, \quad \left| f(x,y_1,z)-f(x,y_2,z)\right| \le L|y_1-y_2|^{\alpha},$$

$$\left| f(x,y,z_1)-f(x,y,z_2)\right| \le L|z_1-z_2|^{\alpha},$$

$$\left| f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_1,z_1)-f(x_1,y_2,z_1)-f(x_1,y_1,z_2)+ f(x_2,y_2,z_1)+\right.$$

$$\left.+f(x_2,y_1,z_2)+f(x_1,y_2,z_2)-f(x_2,y_2,z_2)\right| \le \tilde{L}|x_1-x_2|^{\alpha}|y_1-y_2|^{\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

Вважаємо, що функція задана слідами на системі взаємноперпендикулярних площин $f(x_k,y,z),\ k=\overline{1,\ell}$, $f(x,y_j,z),\ j=\overline{1,\ell}$, $f(x,y,z_s),\ s=\overline{1,\ell}$.

Нехай

$$f(x,y,z)=\left(\arccos^2\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)-\arccos^2 x-\arccos^2 y\right)\arccos z,$$

$w=I_1^3(f,4\pi)$, $w_m=\Phi_{1\,m}^3(f,4\pi)$, $w^t=I_1^{3t}(f,4\pi)$, $h_m^t=w_m-w^t$, $\Delta_m=w_m-w$. Будемо вважати, що $w=$ $=I_1^3(f,4\pi)=-0.2335925334219\cdot 10^{-2}$.

Таблиця 1 – Обчислення $I_1^3(f,4\pi)$ за формулою $\Phi_1^3(f,4\pi)$ при різних $m$

| $\ell$ | $m$ | $w_m=\Phi_{1\,m}^3(f,4\pi)$ | $\left\|h_m^t\right\|=\left\|w_m-w^t\right\|$ | $\left\|\Delta_m\right\|=\left\|w_m-w\right\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 10 | **-0.23359254**$\cdot 10^{-2}$ | $0.4\cdot 10^{-9}$ | $0.06\cdot 10^{-9}$ |
| 16 | 13 | **-0.23359253**546$\cdot 10^{-2}$ | $0.5\cdot 10^{-10}$ | $0.2\cdot 10^{-10}$ |
| 25 | 15 | **-0.2335925337**107$\cdot 10^{-2}$ | $0.7\cdot 10^{-11}$ | $0.2\cdot 10^{-11}$ |

В даному обчислювальному експерименті $w$ – точне значення інтеграла, однак в якості $w$ можна розглядати і наближено обчислені значення інтегралу при іншій довжині мантиси.

Як видно з табл. 1, числа $t_i$ ЗПЗ для розв'язку $w_{m_i}=\Phi_{1\,m_i}^3(f,4\pi)$ рівні: $t_1=7,\ t_2=8,\ t_3=9$. Значення $t_i$ ЗПЗ виділені жирним шрифтом. Для похибки розв'язку і похибки заокруглення справедливі оцінки:

$$\Delta_i=\left|I_1^3(f,4\pi)-I_1^{3t_i}(f,4\pi)\right|\le 1\cdot 10^{e-t_i},$$

$$\left|h_{m_i}^{t_i}\right|=\left|\Phi_{1\,m_i}^3(f,4\pi)-I_1^{3t_i}(f,4\pi)\right|\le 1\cdot 10^{e-t_i}.$$

**Перспективи подальших досліджень.** Наведений алгоритм дослідження повної похибки наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на системі взаємоперпендикулярних площин, може бути використаний не тільки для функцій з класу Ліпшиця, а й для диференційованих функцій. Крім того, аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається її слідами на системі взаємоперпендикулярних ліній на різних класах функцій.

**Висновки.** На класі $C_{3,L,\tilde{L}}^2$ отримано оцінку повної абсолютної похибки наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про $f(x,y,z)$ задавалась слідами функції на системі взаємоперпендикулярних площин. Кубатурна формула використовувала в своїй побудові оператор інтерфлетант з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Особлива увага приділена дослідженню неусувної похибки. Оцінка для неусувної похибки знаходилася в припущенні, що значення функції задані її слідами на площинах наближено з максимальною точністю. Для знаходження оцінки похибки заокруглення використовувався метод збіжності перших десяткових знаків із різною довжиною мантиси.

**Список літератури:** **1.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28. **2.** *Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $f(x,y)\in C_{2,L,L,M}^2$ з використанням інтерлінації : Сб. науч. труд. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения / Ин-т математики НАН Украины. – К., 1999. – С. 166 – 169. **3.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13. **4.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Про одну кубатурну формулу для обчислення 2D- коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29. **5.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* 2D-коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61. **6.** *Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). –

Novosibirsk. – 2010. – P. 90 – 96. **7.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосциюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23. **8.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72. **9.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення 3D- коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50. **10.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41. **11.** *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций // Вестник МГОУ. Сер. Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9. **12.** *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БЕЛГУ. Сер. Математика. Физика. – 2013. – №19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107. **13.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційовних функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48. **14.** *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Обоснование точности кубатурных формул для приближеного вычисления 3D- интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217. **15.** *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення 3D- коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково–сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113. **16.** *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106. **17.** *Бирюков А. Г., Гриневич А. И.* Метод оценки погрешностей округления решений задач вычислительной математики в арифметике с плавающей запятой, основанный на сравнении решений с изменяемой длиной мантиссы машинного числа // Труды МФТИ. – 2013. – Т. 5. – № 2. – С. 160 – 174. **18.** GNU GMP: Multiple precision arithmetic library. – Режим доступа :/ http://gmplib.org/. **19.** IEEE 754-2008: 754-2008 IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. – ISBN: 978-0-7381-5753-5.

**References: 1.** Lytvyn, O. M. and Nechuiyviter, O. P. Kubaturni formulu dlya obchislennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvoh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayini. Matematika. Prirodoznavstvo. Tehnichni nauki.* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no 1, pp. 23–28. **2.** Nechuyviter, O. P. Kubaturna formula obchislennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy z vikoristannyam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions $f(x,y) \in C^2_{2,L,L,M}$ using interlineation]. *Sb. nauch. trud. Nelineynyie kraevyie zadachi matematicheskoy fiziki i ih prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukrainyi. Publ., 1999, pp. 166–169. **3.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Optimal'na za poryadkom tochnosti kubaturna formula obchislennya podviynih integraliv vid shvydkoostsylyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal accuracy order cubature formula for computing double integrals of high oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukraiini. Matematika. Prirodoznavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2006, no. 6, pp. 9–13. **4.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2D- koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2-D Fourier coefficients using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukraiini. Matematika. Prirodoznavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29. **5.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. 2D- koefitsienty Fur'ye na klasi diferentsiyovnikh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D Fourier coefficients on a class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61. **6.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). Novosibirsk, 2010, pp. 90–96. **7.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynikh integraliv vid shvydkoostsylyuyuchykh funktsiy z vykoristannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals of high oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23. **8.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablizhene obchislennya podviynih integraliv z vikoristannyam lagranzhevoyi polinomialnoyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriyskyy visnik informatiki ta matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72. **9.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter O. P. Nablizhene obchyslennya 3D- koefitsientiv Fur'ye na klasi diferentsiyovnyh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on a class of differentiable functions using spline-interflatation]. *Dop. NAN Ukrayini. Matematika. Prirodoznavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50. **10.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy trokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interfletatsiyi na klasi diferentsiyovnikh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using a spline-interflatation on a class of differentiable functions]. *Dop. NAN UkraYini. Matematika. Prirodoznavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 8, pp. 36–41. **11.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Priblizhennoe vyichislenie ostsilliruyuschih integralov trekh peremennyikh s ispolzovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate evaluation of oscillating integrals with three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9. **12.** Lytvyn, O. M., Nechuyviter, O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya byistroostsilliruyuschih funktsiy trekh peremennyikh [On the error of numerical integration of fast oscillating functions of three variables]. *Nauchnyie vedomosti BELGU. Ser. Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod State University. Series: mathematics and physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107. **13.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy trokh zminnikh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate evaluation of Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differentiable functions]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48. **14.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnyikh formul dlya priblizhenogo vyichisleniya 3D- integralov ot byistroostsylliruyuschikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of accuracy of cubature formula for computing 3 D - integrals of fast oscillating functions using interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217. **15.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D- koefitsientiv Fur'ye na klasi Gel'dera z vykorystannyam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on the Gelder class of functions using piecewise spline-interflatation]. *Matematichni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113. **16.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Priblizhennoe vyichislenie integralov ot byistroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh s ispol'zovaniem lagranzhevoy polinomial'noy interfletatsii [Approximate calculation of integrals of fast oscillating functions of three variables by using Lagrangian polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyiy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106. **17.** Biryukov, A. G. and Grinevich, A. I. Metod otsenki pogreshnostey okrugleniya resheniy zadach vyichislitel'noy matematiki v arifmetike s plavayuschey zapyatoy, osnovannyiy na sravnenii resheniy s izmenyaemoy dlinoy mantissyi mashinnogo chisla [A method for estimating rounding errors of the solutions for the problems of computational mathematics in floating-point arithmetics based on the comparison of solutions with the variable length of the mantissa of machine numbers]. *Trudyi MFTI* [Proceedings of Moscow Physical-Technical Institute]. 2013, vol. 5, no. 2, pp. 160–174. **18.** The GNU Multiple precision arithmetic library. Available at: http://gmplib.org. (accessed 20.02.2016). **19.** IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. Available at: http://www.csee.umbc.edu/~tsimo1/CMSC455/IEEE-754-2008.pdf. (accessed 20.02.2016).

*Надійшла (received) 07.04.2016*

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

***Литвин Олег Миколайович*** – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

***Литвин Олег Николаевич*** – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

***Lytvyn Oleg Mykolayovych*** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

***Нечуйвітер Олеся Петрівна*** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

***Нечуйвитер Олеся Петровна*** – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

***Nechuiviter Olesia Petrivna*** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

***Каргапольцева Ганна Вікторівна*** – асистент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

***Каргапольцева Анна Викторовна*** – асистент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

***Kargapoltseva Ganna Victorivna*** – Asistant, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

УДК 539.3

***Е. С. МАЛАХОВ, А. В. ВОРОПАЙ***

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН

Рассматривается система из трех струн, контактирующих между собой в некоторых точках так, что перемещения в этих точках совпадают. Моделирование нестационарных колебаний струн осуществляется на основе волновых уравнений. Обратная задача сводится к решению системы трех интегральных уравнений Вольтера I-го рода, для которой осуществляется дискретизация. Блочная система линейных алгебраических уравнений решается с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова.

**Ключевые слова:** система струн, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, регуляризирующий алгоритм, интегральное уравнение Вольтерра, идентификация сил.

**Введение и постановка задачи.** В работе [1] изложена постановка прямой задачи для нестационарных колебаний системы трех струн, и подробно описана методика её решения. В указанной работе на основе одномерных волновых уравнений определяются зависимости контактных сил, возникающих между струнами, с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Данная работа будет посвящена решению обратной задачи для исследуемой механической системы. В качестве примера при вычислениях исследуются нестационарные поперечные колебания системы канатов, моделируемых струнами, с параметрами, которые выбирались согласно [2]. Отметим, что в настоящей работе, как и в [1] предполагалось, что длины струн не меняются во времени, в случае моделирования продольных колебаний канатов и их систем можно использовать подход, аналогичный изложенному в монографии [3]. Рассматривается система из трех закрепленных струн, имеющих конечную длину. Как показано на рис. 1, несущую струну большей длины подкрепляют две другие струны, параллельные между собой, и меньшей длины для того, чтобы снизить нагрузку, которая приходится на несущую струну. К несущей струне приложена сосредоточенная нагрузка $F(x,t)=P(t)\delta(x-x_3)$, которая вызывает нестационарные колебания исследуемой системы, где $\delta(x)$ – *дельта функция Дирака*, $x_3$ – точка приложения нагрузки. Точки пересечения третьей и первой струны обозначим $x_1$, третьей и второй – $x_2$, точки наблюдения – $S_1$, $S_2$ и $S_3$ соответственно. Отметим, что могут прикладываться несколько различных нагрузок в произвольных точках исследуемой системы. В этом случае метод решения задачи требует небольших изменений.

При решении *прямой задачи* причины, вызывающие колебания – *внешние возмущающие нагрузки* $P_i(t)$, известны, а необходимо найти следствия (их косвенное проявление), а именно изменение $u(t)$ линейных перемещений точек струн во времени.

В случае *обратной задачи* известными являются перемещения одной из струн во времени $u_S(t)$ в одной из ее точек, а необходимо по этим перемещениям найти изменение внешних возмущающих нагрузок (определить неизвестные силы по их косвенным проявлениям). При решении обратной задачи для системы струн кроме внешней возмущающей нагрузки необходимо также определить неизвестные силы контактного взаимодействия.