Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Лєвтєров Антон Михайлович – канд. техн. наук, ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Левтеров Антон Михайлович – канд. техн. наук, ИПМаш НАН Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Levterov Anton Mikhailovich – Candidate of Technical Sciences, IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Лєвтєров Олександр Антонович – канд. техн. наук, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Левтєров Александр Антонович – канд. техн. наук, Национальный университет гражданской защиты Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Levterov Alexander Antonovich – Candidate of Technical Sciences, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Лєвтєрова Людмила Іванівна – ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Левтерова Людмила Ивановна – ИПМаш НАН Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

Levterova Lyudmila Ivanovna – IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА ДВОХ ЗМІННИХ

Пропонується для чисельної реалізації метода А.Н.Крилова підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї змінної використовувати розривні сплайни. Обговорюється також можливість його узагальнення на функції двох змінних для покращення діагнозу в комп'ютерній томографії з використанням проекцій, що надходять з комп'ютерного томографа. Пропонується в методі А.Н.Крилова підвищення точності наближення сумами Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних використовувати розривні сплайни.

Ключові слова: розривні функції, ряди Фур'є, покращення збіжності, метод виділення особливостей.

Вступ. Як відомо [1, п. 15, гл. 6], ряди Фур'є погано збігаються, деякі з них не є *абсолютно* та *рівномірно збіжними*. Зокрема, суми Фур'є не збігаються до функції в точках її розриву. В [2, стор. 516] описаний *метод академіка А. Н. Крилова* для покращення збіжності тригонометричних сум Фур'є розривних функцій для випадку, якщо її точки розриву першого роду відомі.

Наближення сумами Фур'є розривних функцій однієї змінної з використанням розривних сплайнів.

Вважаємо, що функція $f(x),\ x\in[0,1]$ має розриви разом із своїми похідними до порядку $1\le r\in N$ в точках $x_k,\ k=\overline{1,m-1}$ $x_0=0<x_1<\ldots<x_{m-1}<x_m=1$:

$$f^{(s)}(x_k-0)=f_{k-}^{(s)}\ne f_{k+}^{(s)}=f^{(s)}(x_k+0),\ k=\overline{1,m-1},\ s=\overline{0,r}\quad f^{(s)}(x)=\frac{d^s f(x)}{dx^s}.$$

Введемо до розгляду розривний сплайн

$$Sp(x)=\begin{cases}\sum\limits_{s=0}^{r} f^{(s)}(0)h1_{0,0,1,s}(x)+\sum\limits_{s=0}^{r} f^{(s)}(x_1-0)h0_{1,0,1,s}(x),\ 0\le x<x_1;\\ \sum\limits_{s=0}^{r} f^{(s)}(x_k+0)h1_{k,k,k+1,s}(x)+\sum\limits_{s=0}^{r} f^{(s)}(x_{k+1}-0)h0_{k+1,k,k+1,s}(x),\ x_k\le x<x_{k+1},\ k=\overline{1,m-1};\\ \sum\limits_{s=0}^{r} f^{(s)}(x_{m-1}+0)h1_{m-1,m-1,m,s}(x)+\sum\limits_{s=0}^{r} f^{(s)}(1-0)h0_{m,m-1,m,s}(x),\ x_{m-1}\le x\le 1,\end{cases}$$

де $h1_{\ell,r_i,r_{i+1},s}(x),\ \ell=i,i+1$ – поліноми степеня $2r-1$ з властивостями

$$h0_{k,k,k+1,s}^{(p)}(x_{k+1})=\delta_{p,s},\ h0_{k+1,k,k+1,s}^{(p)}(x_k)=0,\ 0\le p,s\le r;\ h1_{k,k,k+1,s}^{(p)}(x_{k+1})=0,\ h1_{k+1,k,k+1,s}^{(p)}(x_k)=\delta_{p,s},\ 0\le p,s\le r.$$

Теорема 1. *Сплайн* $Sp(x)$ *на кожному інтервалі* $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{0, m-1}$ *є оператором ермітової інтерполяції з властивостями*

$$Sp^{(q)}(x_k+0)=f^{(q)}(x_k+0),\ Sp^{(q)}(x_{k+1}-0)=f^{(q)}(x_{k+1}-0),\ q=\overline{0,r}.$$

Доведення. Ці властивості можна встановити безпосередньою перевіркою.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Функція* $R(x)=f(x)-Sp(x)$ *має властивості* $R(x)\in C^r[0,1]$, $R^{(s)}(x_k)=0,\ s=\overline{0,r},\ k=\overline{1,m-1}$.

Доведення. Розривний сплайн $Sp(x)$ на кожному інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$ є поліномом степені $2r-1$, який задовольняє властивості

$$Sp^{(q)}(x_k)=f^{(q)}(x_k+0),\ Sp^{(q)}(x_{k+1})=f^{(q)}(x_{k+1}-0),\ q=\overline{0,r},\ k=\overline{0,m-1}$$

оскільки він є поліномом *двоточкової інтерполяції Ерміта* на цьому інтервалі. Тобто, сам сплайн на всьому інтервалі належить до класу $C^r[0,1]$ і, таким чином, різниця між наближуваною функцією $f(x)$ і цим сплайном $R(x)=f(x)-Sp(x)$ буде задовольняти умові

$$\begin{array}{l} R^{(q)}(x_k-0)=f^{(q)}(x_k-0)-Sp^{(q)}(x_k+0)=f^{(q)}(x_k-0)-f^{(q)}(x_k-0)=0; \\ SR^{(q)}(x_k+0)=f^{(q)}(x_k+0)-Sp^{(q)}(x_k+0)=f^{(q)}(x_k+0)-f^{(q)}(x_k+0)=0; \end{array}\quad k=\overline{1,m-1},\quad q=\overline{0,r}.$$

Тобто теорема 2 доведена.

Пропонується розкладати функцію $R(x)$ у вигляді суми Фур'є:

$$F_N(x)=\sum_{p=-N}^{N}c_p e^{i2\pi px},\ c_p=\int_0^1 R(x)e^{-i2\pi px}dx,\quad p=\overline{-n, n},$$

і наближувану функцію $f(x)$ представляти у вигляді суми $f(x)=Sp(x)+F_N(x)$.

Теорема 3. *Для похибки наближення функції* $R(x)$ *сумою Фур'є* $F_N(x)$ *справедлива нерівність*

$$\left|R(x)-F_N(x)\right|=O\left(N^{-R-1}\right).$$

Доведення. Враховуючи, що $R(x)\in C^r[0,1]$, то при такому наближенні ми всі точки розриву включаємо в перший доданок $Sp(x)$, а для сум Фур'є $F_N(x)$ порядок збіжності, як відомо [2], буде дорівнювати $O\left(\frac{1}{N^{r+1}}\right)$.

Теорема 3 доведена.

Наближення сумами Фур'є розривних функцій двох змінних з використанням розривних сплайнів від двох змінних. Описана вище чисельна реалізація методу академіка А. Н. Крилова може бути узагальнена також на випадок наближення розривних функцій двох та більше змінних. Вважаємо, що функція $f(x, y)$, $x, y\in[0,1]$ має розриви першого роду разом із своїми похідними $f^{(s,0)}(x,y)=\partial^s f(x,y)/\partial x^s$ $0\le s\le r$ до порядку r на системі вертикальних прямих

$$x=x_i, i=\overline{1, m-1}\ \ x_0=0<x_1<...<x_{m-1}<x_m=1:\ f^{(s,0)}(x_i-0,y)=f_{i-0}^{(s,0)}\neq f_{i+0}^{(s,0)}(y)=f_{i+0}^{(s,0)}(x_i+0,y),$$
$$k=\overline{1,m-1},\ s=\overline{0,r}$$

та розриви похідних $f^{(0,p)}(x,y)=\partial^p f(x,y)/\partial y^p$ $0\le p\le r$ до порядку r на системі горизонтальних прямих $y=y_j$, $j=\overline{1,n-1}$: $y_0=0<y_1<...<y_{n-1}<y_n=1$, тобто

$$f^{(0,p)}(x,y_j-0)=f_{j-0}^{(0,p)}(x)\neq f_{j+0}^{(0,p)}(x)=f^{(0,p)}(x,y_j+0),\ j=\overline{1,n-1},\ p=\overline{0,r}.$$

Введемо до розгляду розривні сплайни $S1(x,y)$, $S2(x,y)$, $S12(x,y)$:

$$S1f(x,y)=S1(x,y)=\begin{cases}\sum\limits_{s=0}^{r}f^{(s,0)}(0,y)h1_{0,0,1,s}(x)+\sum\limits_{s=0}^{r}f^{(s,0)}(x_1-0,y)h0_{1,0,1,s}(x),\ 0\le x<x_1;\\ \sum\limits_{s=0}^{r}f^{(s,0)}(x_k+0,y)h1_{k,k,k+1,s}(x)+\sum\limits_{s=0}^{r}f^{(s,0)}(x_{k+1}-0,y)h0_{k+1,k,k+1,s}(x),\ x_k\le x<x_{k+1}, k=\overline{1,m-1};\\ \sum\limits_{s=0}^{r}f^{(s,0)}(x_{m-1}+0,y)h1_{m-1,m-1,m,s}(x)+\sum\limits_{s=0}^{r}f^{(s,0)}(1-0,y)h0_{m,m-1,m,s}(x),\ x_{m-1}\le x\le 1;\end{cases}$$

$$S2f(x,y)=S2(x,y)=\begin{cases}\sum_{p=0}^{r} f^{(0,p)}(x,0)h1_{0,0,1,p}(y)+\sum_{p=0}^{r} f^{(0,p)}(x,y_1-0)h0_{1,0,1,p}(y),\ 0\le y<y_1;\\ \sum_{p=0}^{r} f^{(0,p)}(x,y_l+0)h1_{l,l,l+1,p}(y)+\sum_{p=0}^{r} f^{(0,p)}(x,y_{l+1}-0)h0_{l+1,l,l+1,p}(y),\ y_l\le y<y_{l+1}, l=\overline{1,n-1};\\ \sum_{p=0}^{r} f^{(0,p)}(x,y_{m-1}+0)h1_{n-1,n-1,n,p}(y)+\sum_{p=0}^{r} f^{(0,p)}(x,1-0)h0_{n,n-1,n,p}(y),\ y_{n-1}\le y\le 1;\end{cases}$$

$$S12f(x,y)=(S1)S2f(x,y)=\begin{cases}\sum_{s=0}^{r} S2^{(s,0)}(0,y)h1_{0,0,1,s}(x)+\sum_{s=0}^{r} S2^{(s,0)}(x_1-0,y)h0_{1,0,1,s}(x),\ 0\le x<x_1;\\ \sum_{s=0}^{r} S2^{(s,0)}(x_k+0,y)h1_{k,k,k+1,s}(x)+\sum_{s=0}^{r} S2^{(s,0)}(x_{k+1}-0,y)h0_{k+1,k,k+1,s}(x),\ x_k\le x<x_{k+1}, k=\overline{1,m-1};\\ \sum_{s=0}^{r} S2^{(s,0)}(x_{m-1}+0,y)h1_{m-1,m-1,m,s}(x)+\sum_{s=0}^{r} S2^{(s,0)}(1-0,y)h0_{m,m-1,m,s}(x),\ x_{m-1}\le x\le 1;\end{cases}$$

де $h1_{i,,i,i+1,s}(x),\ h0_{i+1,,i,i+1,s}(x),\ i=\overline{0,m-1}$ – поліноми степеня $2r-1$ з властивостями

$$h1^{(p)}_{i,i,i+1,s}(x_k)=\delta_{i,k}\delta_{p,s},\ k=i,i+1;\ p,s=\overline{0,r},\ h0^{(p)}_{i+1,i,i+1,s}(x_k)=\delta_{i+1,k}\delta_{p,s},\ k=i,i+1;\ p,s=\overline{0,r}..$$

Аналогічно визначаються також базисні поліноми двоточкової ермітової інтерполяції за змінною y

$$h1_{j,j,j+1,q}(y),\ h0_{j+1,j,j+1,q}(y),\ j=\overline{0,n-1},\ q=\overline{0,r}\ .$$

Введемо до розгляду оператор

$$Spf(x,y)=S1f(x,y)+S2f(x,y)-S12f(x,y)$$

Теорема 4. *Функція* $Sp(x,y)$ *на кожному прямокутнику* $[x_k,x_{k+1}]\times[y_l,y_{l+1}]\in[0,1]\times[0,1]$ *має властивості*

$$(Spf)^{(s,0)}(x_k+0,y)=f^{(s,0)}_{k+0};\ (Spf)^{(s,0)}(x_{k+1}-0,y)=f^{(s,0)}_{k+1-0}(y),\ k=\overline{1,m-1},\ s=\overline{0,r}\ ,$$

$$(Spf)^{(0,q)}(x,y_j+0)=f^{(0,q)}_{j-0}(x);\ (Spf)^{(0,q)}(x,y_{j+1}-0)=f^{(0,q)}_{j+1-0}(x,y_{j+1}-0),\ j=\overline{1,n-1},\ q=\overline{0,r}\ .$$

Доведення цієї теореми випливає з того, що оператори $Spf(x,y)=(S1+S2-S12)f(x,y)$, за побудовою [5], є операторами *поліноміальної інтерлінації ермітового типу* з використанням даних на сторонах цього чотирикутника.

Теорема 4 доведена.

Теорема 5. *Функція* $R(x,y)=f(x,y)-Sp(x,y)$ *має властивості*

$$R(x,y)\in C^{r,r}[0,1]^2,\ R^{(s,0)}(x_t,y)=0,\ s=\overline{0,r},\ i=\overline{1,m-1},\ R^{(0,q)}(x,y_j)=0,\ q=\overline{0,r},\ j=\overline{1,n-1}.$$

Доведення.

$$R^{(s,0)}(x_t,y)=f^{(s,0)}(x_t,y)-sp^{(s,0)}(x_t,y)=f^{(s,0)}(x_t\pm 0,y)-sp^{(s,0)}(x_{t_t}\pm 0,y),\ s=\overline{0,r},\ i=\overline{1,m-1},$$

$$R^{(0,q)}(x,y_j)=f^{(0,q)}(x,y_j)-sp^{(0,q)}(x,y_j)=f^{(0,q)}(x,y_j\pm 0)-sp^{(0,q)}(x,y_j\pm 0),\ q=\overline{0,r},\ j=\overline{1,n-1}\ .$$

Теорема 5 доведена.

Пропонується розкладати в суму Фур’є функцію $R(x,y)=Rf(x,y)$:

$$F_{N,N}f(x,y)=\sum_{p=-N}^{N}\sum_{q=-N}^{N} c_{p,q}e^{i2\pi(px+qy)}\ ,\ c_{p,q}=\int_0^1\int_0^1 Rf(x,y)e^{-i2\pi(px+qy)}dxdy\ ,\ p,q=\overline{-N,N}$$

і функцію $f(x,y)$ наближувати у вигляді суми $f(x,y)=Sp(x,y)+F_{N,N}(x,y)$.

Враховуючи, що $R(x,y)\in C^{r,r}[0,1]^2$, то при такому наближенні ми всі точки розриву включаємо в перший доданок $Sp(x,y)$, а для сум Фур’є $F_{N,N}f(x,y)$ порядок збіжності буде, як відомо [2], $O(1/N^{r+1})$.

Висновки. Таким чином, запропонований підхід може розглядатися як автоматичне забезпечення збіжності ряду Фур’є до функції $f(x,y)$ з відомими точками розриву. Для їх наближеного знаходження можна скористатися твердженнями робіт [3, 4]. Твердження цієї статті [5] планується покласти в основу нового методу розв’язання плоскої задачі комп’ютерної томографії у вигляді розривного сплайну від двох змінних та суми Фур’є від функції, яка є різницею між наближуваною функцією та сплайном і належить до $r, r\ge 1$ разів неперервно диференційованих за кожною змінною функцій. При цьому коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проекцій, що надходять з комп'ютерного томографа.

Список літератури: 1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. – М. : Наука, 1974. – 655 с. **2.** *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М. : Наука, 1966, – 656 с. **3.** *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 3. – С. 122 – 131. **4.** *Литвин О. Н., Першина Ю. І., Сергиенко И. В.* Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – № 4. – 2014. – С. 126 – 134. **5.** *Литвин О. М., Литвин О. Г.* Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра // Тези конфер. ІСН. – 2016, ПУЕТ, Полтава 10 – 11.03.2016. **6.** *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – К. : Наукова думка, 2002. – 544 с.

References: 1. Smirnov, V. I. *Kurs vyisshey matematiki. T. 2.* [Course in Higher Mathematics. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 655 p. **2.** Fihtengol'ts, G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3.* [Course in differential and integral calculus. Vol. 3]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 656 p. **3.** Litvin, O. M. and Pershina, Yu. I. Nablyzhennya rozryvnoyi funktsiyi za dopomogoyu rozryvnyh splayniv [Approximating discontinuous functions by discontinuous splines]. *Matematychne ta komp"yuterne modelyuvannya. Seriya: Fizyko-matematychni nauky: zb. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Ser.: Physical and Mathematical Sciences. Collected works]. Kam"yanets'-Podil's'kyiy, 2010, vol. 3, pp. 122–131. **4.** Litvin, O. N., Pershina, Yu. I. and Sergienko, I. V. Vosstanovlenie razryivnyikh funktsiy dvukh peremennyikh, kogda linii razryiva neizvestnyi (pryamougol'nyie elementyi) [Recovering discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements)]. *Kibernetika i sistemnyiy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134. **5.** Litvin, O. M. and Litvin, O. G. Rekonstruktsiya zobrazhen' z vykorystannyam skinchennyh sum Fur"e ta Feyera [Recovering images using finite Fourier and Fejer sums]. *Tezy konfer. ISN.* Poltava, PUET Publ., 2016. **6.** Litvin, O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Function interlineation and its applications]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2002. 544 p

Надійшла (received) 06.04.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Litvin Oleg Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, О. О. ЛИТВИН, Ф. Ф. КОВАЛЬ, О. С. ЧОРНА

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ ВМІСТУ ДЕЯКОЇ СУКУПНОСТІ КОРИСНИХ КОПАЛИН В КОРІ ЗА ДАНИМИ З КЕРНІВ СВЕРДЛОВИН МЕТОДОМ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянуто задачу про відновлення в кожній точці між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих) скінченої множини елементів періодичної таблиці або їх сполук лінійної щільності на заданій глибині. Тобто, ми обмежуємося не всіма елементами періодичної таблиці, а лише n – вибраними елементами або їх сполуками. Запропоновано метод побудови інтерлінаційного оператора матричних функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах на заданій глибині, та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці між свердловинами по заданій глибині. Наведений метод побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин між похилими свердловинами дозволяє будувати математичні моделі структури кори Землі з використанням всіх сполук кернів похилих свердловин, які призведуть до створення ефективних методів розвідки корисних копалин та розробки родовищ. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: математична модель, інтерлінація функцій, просторовий розподіл, керни свердловин.

Вступ. Математичне моделювання займає провідне місце в гірничо-економічному аналізі. Цей метод дає можливість вибирати оптимальні режими роботи гірничотехнічного устаткування, визначати найкращі параметри реконструкції тих, що діють, і будівництва нових гірничодобувних підприємств, вирішувати завдання комплексного розвитку гірничодобувних регіонів. Застосування теорії інтерлінації функцій 3-х змінних до розв'язання технічних задач таких, як відновлення в кожній точці (x, y, z) між заданою системою свердловин (прямих або похилих)

$$\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \le z \le 0\}$$

скінченої множини елементів періодичної таблиці або їх сполук за даними матриці-функції за змінною z, де z – глибини свердловин, $\gamma_{k,i}(z), k = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, n}$, та знаходження оцінки запасів корисних копалин на основі результатів свердловинного буріння має велике практичне значення на сьогоднішній день.