

*Н.Н. ТКАЧУК*, НТУ “ХПИ”

## **ОЦЕНКА КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОПРЯЖЕНИИ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ДЕТАЛЕЙ**

В роботі запропонована схема досліджень конструкцій, що містять контактуючі елементи складної форми. Цикл досліджень включає у себе синтез геометрії, аналіз контактної взаємодії та впливу конструктивних параметрів на міцнісні властивості. Підхід реалізований для двопараметричної передачі із рівновисокоширокими зубцями, на прикладі якої показані можливості такого підходу, а також ефективність методу оцінки контактних напружень за Герцем.

This paper concerns a research scheme for constructions containing elements of complicated shape in contact is offered. The research cycle includes geometry synthesis, analysis of contact interaction and design parameters' influence on strength properties. The approach is implemented for two-parameter transmission with teeth of equal width and height. By the its example approaches' capabilities as well as efficiency of contact stresses estimations Hertzian method were displayed.

**Введение.** Исследование физико-механических характеристик сложных объектов часто приводит не к одной, а к серии связанных между собой проблем [1]. Причиной этому может служить наличие в системе различных функциональных элементов, одновременное протекание процессов различной природы, приводящие к многофакторности стоящих перед исследователем задач.

Так, в частности, при проектировании и исследовании двухпараметрических передач [2-4] приходится одновременно принимать во внимание требуемые кинематические свойства передачи, геометрию ее звеньев, определять ее работоспособность, изучать напряженно-деформированное состояние. Удастся выделить цикл исследований, состоящий из синтеза рабочих поверхностей зубьев, анализа напряженно-деформированного состояния элементов проектируемой передачи и целенаправленного изменения проектных параметров с учетом получаемых прочностных и жесткостных характеристик (рис. 1). Его выполнение позволяет согласовать функциональные требования к передаче (обеспечить постоянное передаточное отношение, возможность изменения угла между осями вращения без нарушения зацепления и др. [2]) с высокими прочностными характеристиками. Такой подход позволяет синтезировать оптимальные параметры передачи, обеспечить ее работоспособность по кинематическим и прочностным критериям.

Для проведения подобной серии многовариантных исследований необходимы эффективные методы синтеза и анализа, которые бы одновременно обеспечивали должную точность и обладали высокой скоростью выполнения. Вопросам синтеза двухпараметрических передач посвящены работы [3, 4], в которых изложен алгоритм, основанный на кинематическом методе Литвина [5], и предложена его реализация для расчета цилиндрично-конической передачи с равновысокими зубьями на коническом колесе.



Рис.1. Схема синтеза двухпараметрической передачи по кинематическим и прочностным критериям

Для расчета на прочность целого ряда стандартных зубчатых передач разработано множество инженерных методов, вобравших в себя широкий набор экспериментальных данных и теоретических результатов. При этом традиционно уделяется внимание изгибной прочности зубьев, контактному взаимодействию и контактным напряжениям, распределению усилий между зубьями передачи и другим вопросам статики и динамики [6]. При расчете передач с нетрадиционной, сложной геометрией рабочих поверхностей зубьев имеют значение те же факторы. Однако провести анализ напряженно-деформированного состояния элементов таких передач стандартными методами не представляется возможным. Связано это с тем, что упрощения и допущения, которые приняты в технических теориях прочности традиционных зубчатых передач, в большинстве случаев либо вообще не имеют смысла для зубчатых колес нестандартной формы, либо их принятие существенно искажает результат расчета [7, 8].

Современные методы теории упругости позволяют поставить и решить задачу определения напряженно-деформированного состояния зубчатых передач в трехмерной постановке и тем самым получить исчерпывающую информацию об их прочностных характеристиках, поведении при контактном взаимодействии. При расчете зубчатых передач часто применяются методы конечных и граничных элементов, а также различные аналитические методы, каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками. Помимо общих характеристик: простоты или сложности соотношений метода, его быстродействия и ресурсозатратах при численной реализации, точности и адекватности представления напряжений и перемещений, любой метод применительно к поставленной задаче приобретает особенности более частного плана. Последние и были приняты за определяющие при постановке

задач и выборе методов их решения.

Для определения контактной прочности и жесткости элементов двухпараметрической передачи для всевозможных относительных положений ее колес требуется решить множество контактных задач, для которых точка первоначального соприкосновения будет варьироваться по всей рабочей поверхности зуба одного из колес. Это влечет многократное увеличение времени решения задачи. Методы, позволяющие достаточно точно провести единичный расчет, могут оказаться непригодными для проведения такой серии вычислений. В каждом новом случае необходимо будет вводить новые контактные элементы, пересчитывать часть коэффициентов матрицы жесткости, составлять новые конечно-элементные разбивки. Свои особенности вносит дискретность геометрии одного из колес, полученного в результате синтеза рабочих поверхностей его зубьев.

В связи с этим является актуальным оптимальный выбор метода, который бы позволял проводить анализ контактных напряжений в большом числе точек сопряжения зубьев передачи в процессе многовариантных расчетов на прочность элементов двухпараметрических передач в рамках предложенного цикла исследований (см. рис. 1).

Аналитический метод расчета пространственного контактного взаимодействия, основанный на известном решении задачи Герца [9], обладает определенными достоинствами и может быть применен на первом, оценочном этапе исследований (см. рис. 1). Он отличается предельной простотой и экономными требованиями к ресурсам, применим для тел с дискретно заданной геометрией. Он также позволяет получить результаты, на основании которых можно установить качественный характер контактного взаимодействия зубьев передачи и определить зоны максимальных контактных давлений. Вместе с тем полученные с помощью данного метода размеры и форма площадок контакта, величины контактных напряжений или контактного сближения могут быть использованы для верификации результатов решения поставленной задачи другими методами. Более того, эти результаты можно брать в качестве начального приближения для более сложных и точных методов, что ускорит решение в случае применения итерационных процедур.

На этапе применения данного алгоритма необходимо определить область его применимости. Основные предположения, на которых основывается решение Герца для контактной задачи, могут не выполняться для синтезированного зацепления. Необходимо сравнить отношение полуосей пятна контакта, их величины относительно размеров зубьев и радиусов кривизн рабочих поверхностей зубьев с допустимыми. На основании этого можно в дальнейшем оценить границы применимости использованных подходов.

**Алгоритмы решения.** Рассмотрим реализацию предложенной (см. рис. 1) схемы исследований с использованием теории Герца как средства оценки напряженно-деформированного состояния вблизи зоны контакта звеньев на примере цилиндрично-конической передачи.

*Задача синтеза рабочих поверхностей.* Поскольку объект исследования

определяется в процессе решения задачи синтеза (см. рис.1), необходимо остановиться на основных положениях алгоритма, с помощью которого получают поверхности сопряженных зубьев, основных соотношениях метода и представлении результатов численной реализации. Исходными данными в задаче являются геометрия зубьев одного из колес передачи, передаточное отношение и закон относительного смещения зубчатых колес. Этого оказывается достаточно для того, чтобы однозначно определить форму зубьев другого колеса и линии зацепления, соответствующие обоим независимым движениям звеньев передачи [2-4]. Поверхность одного из колес задается параметрически в системе однородных координат, связанной с этим колесом как с твердым телом. Закон относительного движения зубчатых колес определяется матрицей перехода между локальными системами координат колес, являющейся функцией параметров движения  $\varphi_1$  и  $u$  [4].

Для цилиндрико-конической передачи задается форма зуба цилиндрического колеса:  $r_2(\alpha, \theta)$  – радиус-вектор точки поверхности зуба в локальной системе координат;  $n_2(\alpha, \theta)$  – вектор нормали в точке зуба с параметрами  $\alpha$  и  $\theta$ . Вращение колес определяется углом поворота конического колеса  $\varphi_1$ , связанным с  $\varphi_2$ , углом поворота цилиндрического колеса, соотношением

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -i_{21} = \text{const}, \quad (1)$$

что соответствует постоянному передаточному числу. Параметр  $u$  отвечает за второе независимое движение, которое совершает цилиндрическое колесо вдоль линии зубьев конического колеса [4].

Основополагающей идеей создания двухпараметрических передач является наличие двух независимых движений зубчатой пары. Чтобы обеспечить одновременное движение зубьев в двух направлениях, необходимо потребовать выполнения условия непроникновения в точке контакта для обоих возможных движений. Условие заключается в том, что относительная скорость точек зубьев, находящихся в зацеплении, должна быть ортогональной общему вектору нормали касающихся поверхностей зубьев [3,4,6]. В случае двух независимых движений это соотношение кинематической теории Литвина [5] принимает вид:

$$\begin{cases} n_2 \perp v_{\varphi_1}^{omn}; \\ n_2 \perp v_u^{omn}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $v_{\varphi_1}^{omn}$  и  $v_u^{omn}$  – относительные скорости контактирующих точек для каждого из возможных движений,  $n_2$  – общий вектор нормали поверхностей зубьев.

В случае известной формы поверхности зуба цилиндрического колеса и заданного закона движения этого колеса относительно конического при изме-

нении параметра  $u$  соотношения (2) можно записать в матричной форме для однородных координат точек обоих колес в собственных системах координат:

$$\begin{aligned} n_2^T(\alpha, \theta) \frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial \varphi_1} M_{12}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0; \\ n_2^T(\alpha, \theta) \frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial u} M_{12}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\rho_2^T(\alpha, \theta) = (x_2 \ y_2 \ z_2 \ 1)$ ,  $n_2^T(\alpha, \theta) = (n_x \ n_y \ n_z \ 0)$  – векторы однородных координат точки касания на поверхности зуба цилиндрического колеса и координат вектора нормали в системе координат, в замороженной в цилиндрическое колесо, а  $M_{21}(\varphi_1, u)$  – матрица перехода, связывающая однородные координаты точки касания в системе конического колеса с ее координатами в системе цилиндрического:

$$\rho_2 = M_{21} \rho_1. \quad (4)$$

Вычисляя коэффициенты матрицы перехода при фиксированных  $\varphi_1$  и  $u$ , получаем из (3) систему двух нелинейных уравнений относительно  $\alpha$  и  $\theta$ , что позволяет найти их как функции параметров движения:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(\varphi_1, u); \\ \theta = \theta(\varphi_1, u). \end{cases} \quad (5)$$

В свою очередь, с использованием соотношения (4) можно восстановить форму зуба конического колеса:

$$\rho_1(\varphi_1, u) = M_{12}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha(\varphi_1, u), \theta(\varphi_1, u)), \quad (6)$$

а также вычислить нормали к поверхности зуба

$$n_1(\varphi_1, u) = M_{12}(\varphi_1, u) n_2(\alpha(\varphi_1, u), \theta(\varphi_1, u)). \quad (7)$$

На этих соотношениях и основывается алгоритм синтеза рабочих поверхностей зубьев двухпараметрических передач. В результате численного решения системы (3) получается конечный набор точек поверхности искомого зуба со значениями векторов нормали к этой поверхности. Следует отметить, что алгоритм применим не только для цилиндрических передач с эквидистантными зубьями, но и для любой другой передачи, в которой осуществляется двухпараметрическое движение. Для его реализации необходимо лишь знать форму зубьев одного из колес и определить оба независимых движения.

В частности, для цилиндрической передачи задается форма зуба цилиндрического колеса. Рабочая поверхность лицевой стороны зуба получается вращением “положительной” эвольвенты (рис. 2), расположенной в плоскости цилиндрического колеса, перпендикулярной оси вращения, относительно не-

которой оси в этой плоскости (рис. 3). Обратная сторона получается вращением “отрицательной” эвольвенты. Помимо этого выбирается расстояние между ними, т.е. толщина зуба цилиндрического колеса произвольна.

В качестве двух независимых движений выступают вращение цилиндрического и конического колес с постоянным передаточным отношением и смещение цилиндрического колеса вдоль линии зуба на коническом колесе. Линии зубьев представляют собой семейство равноотстоящих кривых [2], обладающих тем свойством, что расстояние по поверхности конуса между соседними линиями постоянно по всей длине зуба (рис. 4). Уравнение такой кривой имеет вид  $\psi = \psi(u)$  и находится из дифференциального уравнения.

Цилиндрическое колесо располагается относительно точки этой кривой по заданному значению параметра  $u$ , который отвечает расстоянию от заданной точки до основания конуса вдоль образующей, следующим образом. Центр колеса находится в точке, отстоящей от точки линии зуба на расстоянии  $R_2$  по нормали к поверхности конуса в этой точке. Ось вращения  $z_2$  направлена параллельно касательной к линии зуба. Направление вращения цилиндрического колеса и его смещения вдоль линии зуба изображены на рис. 5.

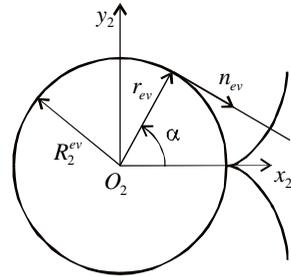


Рис. 2. “Положительная” и “отрицательная” эвольвенты

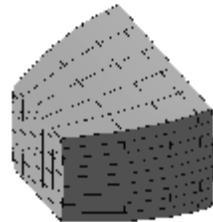


Рис. 3. Форма зуба цилиндрического колеса

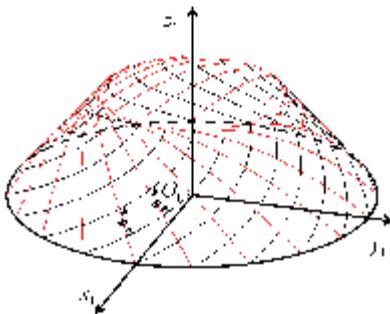


Рис. 4. Семейство эквидистантных линий зубьев на конусе

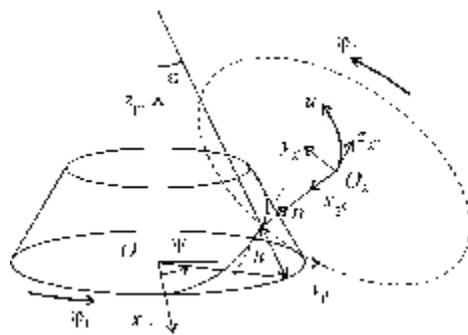


Рис. 5. Взаимное расположение конического и цилиндрического колес

*Оценка контактного взаимодействия.* Следующим этапом в предло-

женной схеме исследований установлено определение напряженно-деформированного состояния передачи и, в частности, контактных напряжений. Выбранный для их расчета аналитический метод Герца [9] основывается на ряде допущений и упрощений, часть из которых состоит в том, что принимается во внимание лишь геометрия тел в зоне контакта. Потому для нахождения контактной площадки и распределения напряжений и перемещений на поверхности пятна контакта достаточно располагать лишь значениями главных кривизн и направлениями главных кривизн поверхностей каждого из контактирующих тел в точке первоначального контакта. В этом случае пренебрегается влиянием формы тел вдали от зоны контакта, условий закрепления и способа приложения нагрузки на контактное взаимодействие. В отсутствие трения решение задачи ограничивается случаем нормального прижимающего усилия, с которым тела действуют одно на другое.

Помимо этого принимается предположение о том, что напряженно-деформированное состояние обоих тел совпадает с возникающим при вдавливании абсолютно жесткого параболического штампа в однородное изотропное полупространство. Считается, что нормальные напряжения и перемещения на части поверхности тел, в которой происходит их контакт, совпадают с напряжениями и напряжениями на плоской эллиптической площадке на границе деформированного полупространства.

В рамках этих предположений отклонения  $z^+$  и  $z^-$  точек поверхностей контактирующих тел как функции аргументов  $(x^\pm, y^\pm)$  приближенно выражаются в виде квадратичных форм, коэффициенты которых зависят только от значений главных кривизн:

$$z^\pm = q^{\pm T} B^\pm q^\pm = \frac{1}{2} k_x^\pm x^{\pm 2} + \frac{1}{2} k_y^\pm y^{\pm 2}, \quad q^\pm = (x^\pm; y^\pm). \quad (8)$$

Расстояние между точками поверхностей по общей нормали также представляет собой квадратичную форму в главных внутренних координатах одного из тел:

$$z^+ + z^- = q^{+T} B^+ q^+ + q^{-T} B^- q^- = q^{+T} (B^+ + R^T B^- R) q^+, \quad (9)$$

где  $R$  – матрица поворота, переводящая вектор координат  $q^+$  в координаты  $q^-$ .

Вышеприведенную квадратичную форму можно диагонализировать. Предполагается, что направления полуосей эллиптической площадки контакта совпадают с направлениями собственных векторов матрицы этой квадратичной формы. В этом случае зазор между поверхностями в соответствующей системе координат будет выражаться следующим образом (рис. 6):

$$z^+ + z^- = Ax^2 + By^2. \quad (10)$$

С другой стороны, согласно известному представлению поля перемещений  $w^\pm$  на площадке контакта полуплоскости с жестким параболическим

штампом [10]:

$$w^{\pm} = \frac{3(1-\nu^{\pm})P}{8\pi\mu^{\pm}} \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda}}{\sqrt{\lambda(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}} d\lambda, \quad (11)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad z = 0,$$

где  $P$  – сила нормального прижатия,  $\nu^{\pm}, \mu^{\pm}$  – коэффициенты Пуассона и модули сдвига материалов тел,  $a$  и  $b$  – полуоси площадки контакта.

С учетом (11) геометрическое условие контакта

$$z^+ + w^+ + z^- + w^- = \alpha = const, \quad (12)$$

в котором  $\alpha$  выражает сближение тел, можно переписать следующим образом:

$$\frac{3P}{8\pi} \left( \frac{1-\nu^+}{\mu^+} + \frac{1-\nu^-}{\mu^-} \right) \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda}}{\sqrt{\lambda(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}} d\lambda = \alpha - Ax^2 - By^2. \quad (13)$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты в обеих частях равенства, получаем три соотношения, связывающие сближение  $\alpha$  и коэффициенты  $A, B$  со значениями параметра

$$\theta = \frac{3}{8\pi} \left( \frac{1-\nu^+}{\mu^+} + \frac{1-\nu^-}{\mu^-} \right),$$

который определяется упругими свойствами материалов тел, силы  $P$ , отношения полуосей  $k = \frac{b}{a}$  и величиной одной из полуосей [10]:

$$\alpha = \frac{P\theta}{a} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2 + \xi)}} = \frac{2P\theta}{a} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2 - z^2)}} = \frac{2P\theta}{a} I_0(k); \quad (14)$$

$$A = \frac{P\theta}{a^3} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi)\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2 + \xi)}} = \frac{2P\theta}{a^3} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(k^2 - z^2)}} = \frac{2P\theta}{a} I_1(k); \quad (15)$$

$$B = \frac{P\theta}{a^3} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(k^2 + \xi)\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2 + \xi)}} = \frac{2P\theta}{a^3} \int_0^1 \frac{dz}{(k^2 - z^2)\sqrt{(1-z^2)(k^2 - z^2)}} = \frac{2P\theta}{a} I_2(k). \quad (16)$$

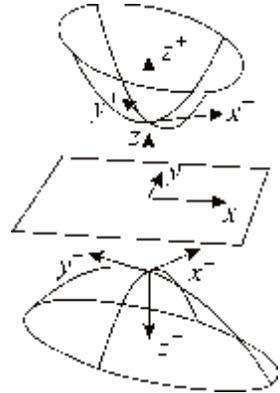


Рис. 6. Представление поверхностей в зоне контакта

Функции  $I_i(k)$  приводятся к эллиптическим интегралам, вычисление которых не составляет труда, что позволяет по заданным значениям  $A$ ,  $B$ ,  $P$  и  $\theta$  найти отношение полуосей эллипса пятна контакта как решение уравнения:

$$\frac{A}{B} = \frac{I_1(k)}{I_2(k)}, \quad (17)$$

которое имеет единственное положительное решение, т.к. функция в правой части монотонна (рис.7).

Соответственно, значение полуоси  $a$  и сближение  $\alpha$  находятся из (14-15):

$$a = \sqrt[3]{\frac{P\theta}{AI_1(k)}}, \quad (18)$$

$$\alpha = \frac{2P\theta}{a} K\left(\sqrt{1-k^2}\right). \quad (19)$$

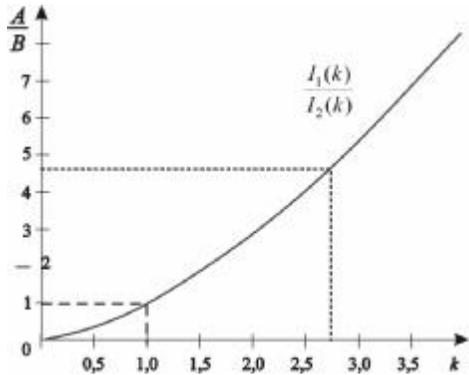


Рис.7. Зависимость отношения полуосей пятна контакта от коэффициентов  $A$  и  $B$

Помимо размеров зоны контакта и величины сближения тел интерес представляют контактные напряжения. В частности, нормальное напряжение на площадке контакта находится непосредственно из предположений, принятых в теории Герца [9]:

$$\sigma_{|z=0} = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{3P}{2\pi ab}. \quad (20)$$

Для проверки передачи на контактную прочность интерес представляют не только максимальные нормальные напряжения, но и максимальные касательные напряжения, которые в отсутствие трения достигаются на расстоянии порядка половины характерного размера полуоси эллипса контакта от плоскости  $z = 0$ . Для их вычисления можно воспользоваться либо оценочными формулами, либо использовать представление поля напряжений во всем деформированном полупространстве [11], используя уже известные значения полуосей пятна контакта и величину сближения. В любом случае, на всей рабочей поверхности участка с максимальным контактным давлением будет отвечать максимальное касательное напряжение, т.е. распределение  $\sigma_{\max}$  на рабочей поверхности зуба конического колеса может быть использовано для определения участков зуба с наибольшими напряжениями от действия контактной нагрузки.

**Численная реализация.** Вышеописанную математическую модель кон-

тактного взаимодействия легко применить для всех взаимных положений колес двухпараметрической передачи. В качестве исходных данных необходимы значения главных кривизн и их направления в каждом из узлов сетки точек синтезированной рабочей поверхности зуба конического колеса.

*Вычисление кривизн рабочих поверхностей зубьев в точках контакта.*

Описанный ранее алгоритм синтеза рабочих поверхностей зубьев конического колеса позволяет определить координаты точки этой поверхности, в которой происходит зацепление с зубом цилиндрического колеса при заданных значениях параметров движения  $\varphi_1$  и  $u$ . Путем многократного повторения процедуры синтеза могут быть получены сетка точек рабочей поверхности в пространстве и поле векторов нормали в этих точках. Координаты узловых точек и векторов нормали вычисляются по формулам (6,7) подстановкой конечного числа значений параметров из наборов  $\{\varphi_{1p}\}_{p=1}^n$  и  $\{u_q\}_{q=1}^m$ :

$$r_{pq}^{con} = r_1(\varphi_{1p}, u_q), \quad (21)$$

$$n_{pq}^{con} = n_1(\varphi_{1p}, u_q). \quad (22)$$

Следующая задача, относящаяся к анализу синтезированного зацепления, состоит в вычислении кривизн найденных рабочих поверхностей зубьев конического колеса в узлах сетки. Простейший способ заключается в составлении матриц первой ( $G$ ) и второй ( $B$ ) квадратичных форм, коэффициенты которых определяются частными производными радиус-векторов и нормалей точек поверхности во внутренних координатах  $\varphi_1$  и  $u$ :

$$g_{ij} = (r_i^{con}, r_j^{con}), \quad b_{ij} = -(r_i^{con}, n_j^{con}). \quad (23)$$

Главные кривизны и их направления находятся как решение задачи на собственные значения:  $(B - \kappa G)\tau = 0$ . Значения частных производных можно вычислить двумя способами: либо по имеющимся сеточным значениям координат точек поверхности с применением конечноразностных аппроксимаций, либо с использованием соотношений (6,7), из которых частные производные радиус-вектора и нормали по произвольному параметру движения  $\eta$  вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} r_1(\varphi_1, u) = \frac{\partial}{\partial \eta} [M_{12} r_2(\alpha, \theta)] = \frac{\partial M_{12}}{\partial \eta} r_2 + M_{12} \left[ \frac{\partial r_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right], \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} n_1(\varphi_1, u) = \frac{\partial}{\partial \eta} [M_{12} n_2(\alpha, \theta)] = \frac{\partial M_{12}}{\partial \eta} n_2 + M_{12} \left[ \frac{\partial n_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial n_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]. \quad (25)$$

Для цилиндрико-конического зацепления имеются аналитические выраже-

ния для коэффициентов матриц перехода и их частных производных [3]. При этом значения параметра  $\theta$  обращаются тождественно в ноль, что является особенностью решения системы уравнений (3), что исключает его частные производные из соотношений (24), (25). Другой особенностью решения (5) в случае цилиндро-конической передачи является то, что  $\alpha$  является функцией одного лишь параметра  $\varphi_1$  и не зависит от  $u$ . Производные  $d\alpha/d\varphi_1$  достаточно точно вычисляются конечными разностями в узловых точках  $\{\varphi_{1,p}\}_{p=1}^n$ . Таким образом, все слагаемые в правой части выражений (24), (25) могут быть вычислены, что позволяет использовать этот способ определения частных производных наряду с конечными разностями.

Особенностью лицевой поверхности зуба конического колеса является его выпукло-вогнутость. В каждой ее точке главные кривизны имеют противоположные знаки и, соответственно, в одном из направлений зуб имеет вогнутую форму. Направления отрицательных главных кривизн и соответствующие им отрицательные значения радиусов изображены на рис. 8, 9. В контакте с выпуклым зубом цилиндрического колеса вогнутость поверхности зуба конического колеса в направлении линии зуба дает то преимущество, что в одном из касательных направлений зазор между контактирующими поверхностями оказывается достаточно малым. Это, в свою очередь, приводит к увеличению площади пятна контакта и уменьшению максимальных контактных давлений.

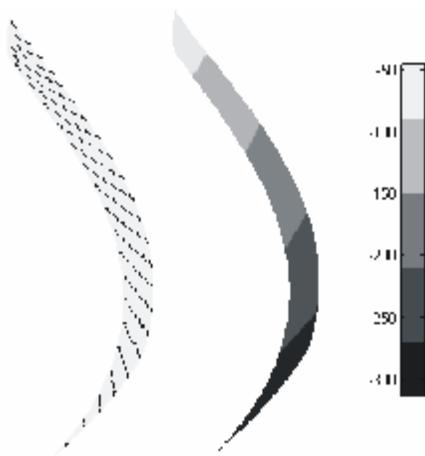


Рис. 8. Направления главных кривизн, отвечающие отрицательным радиусам кривизн

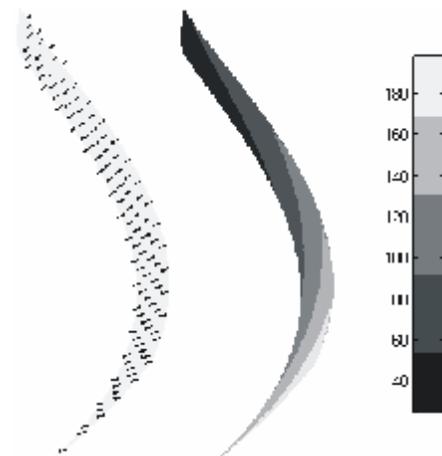


Рис. 9. Направления главных кривизн, отвечающие положительным радиусам кривизн

*Анализ характеристик напряженно-деформированного состояния.* Возможности предложенного подхода могут быть проиллюстрированы результатами, полученными в ходе проведения одного цикла исследований. В первой его части по заданному набору параметров (табл. 1) синтезированы рабочие

поверхности зубьев конического колеса, сопрягающиеся с поверхностями зубьев цилиндрического колеса (рис. 10). С помощью вышеописанного алгоритма синтеза получено облако точек искомой поверхности, в которых удовлетворяются условия зацепления (2). Для того, чтобы это зацепление реализовывалось физически при контакте зубчатых колес двухпараметрической передачи, необходимо выполнение других условий, которые вместе можно характеризовать как геометрические. А именно, зазор между рабочими поверхностями зубьев вблизи точки контакта должен оставаться неотрицательным (что эквивалентно полуположительной определенности квадратичной формы (10)). Кроме того, зубья передачи не должны интерферировать в любом взаимном положении. Проверка первого условия осуществима в ходе анализа кривизн поверхностей зубьев, когда вычисляются значения коэффициентов  $A$  и  $B$ .

Таблица 1

Исходные значения основных параметров задачи

$z_1 = 20, z_2 = 15$	количество зубьев конического и цилиндрического колес
$\varepsilon = \pi / 6$	угол конусности
$\beta_0 = \pi / 3$	начальный угол наклона линии зуба конического колеса
$R_1 = 140 \text{ мм}, R_2 = 52.5 \text{ мм}$	радиусы конического и цилиндрического колес
$R_2^{ev} = 49,3 \text{ мм}$	радиус основной окружности эвольвентного профиля
$R_2^{rot} = 25 \text{ мм}$	радиус кривизны зуба цилиндрического колеса в окружном направлении
$\nu^\pm = 0.3, E^\pm = 190 \text{ ГПа}$	коэффициент Пуассона и модуль упругости звеньев

Однако работоспособность исследуемой двухпараметрической передачи определяется не только этими условиями. Для ее нормального функционирования необходимо наличие ряда свойств. В частности, ее зубья должны обладать достаточной контактной прочностью и жесткостью. Применяемая модель контактного взаимодействия позволяет оценить размеры контактных пятен, значения максимальных контактных давлений в различных точках синтезированной рабочей поверхности конического колеса. Вследствие сложной геометрии и различия главных кривизн отношение полуосей пятна контакта, которое не зависит от величины прижимающей силы (см. выражение (17)),

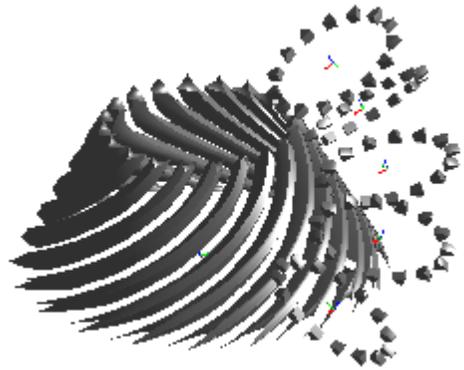


Рис. 10. Цилиндро-коническая передача с различным относительным положением колес

принимает в различных частях рабочей поверхности зуба конического колеса отличающиеся на порядок значения (рис. 11). Наиболее вытянутое пятно контакта образуется в верхней части поверхности зуба конического колеса, которая входит в зацепление с основанием зуба цилиндрического колеса. В этом месте зуб цилиндрического колеса имеет наибольший радиус кривизны в окружном направлении, в результате чего зазор в направлении линии зуба конического колеса получается минимальным, и пятно оказывается вытянутым в этом направлении (рис. 12).

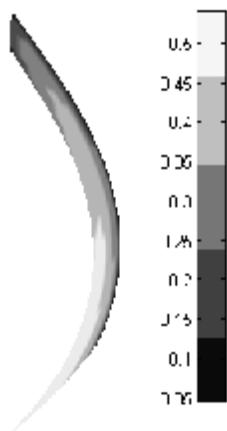


Рис. 11. Отношение полуосей пятна контакта



Рис. 12. Оси площадок контакта

Зависимость размера пятна контакта и значения максимального контактного давления от положения точки, в которой происходит зацепление, имеет другой характер (см. рис.11). Согласно формулам (18) и (20) обе эти величины пропорциональны  $P^{1/3}$ . При заданном постоянном вращающем моменте прижимающее усилие  $P$  также постоянно по всей поверхности зуба и задает лишь масштаб в характере распределения значений площади контакта и максимальных напряжений. На рис. 13 показано распределение площади пятна контакта, отвечающей прижимающему усилию  $P = 100 \text{ Н}$ . Наименьшие значения площадь принимает в верхней части зуба конического колеса, которая входит в зацепление с основанием зуба цилиндрического колеса с эвольвентным профилем. Максимальное значение контактного напряжения обратно пропорционально площади контактной площадки. Видно, что основные характеристики контакта слабо меняются вдоль линии зуба конического колеса и зависят, в основном, от угла поворота, с ростом которого точка зацепления смещается от верхней части зуба к нижней. При этом площадь пятна контакта увеличивается, а максимальное контактное напряжение, соответственно, уменьшается.

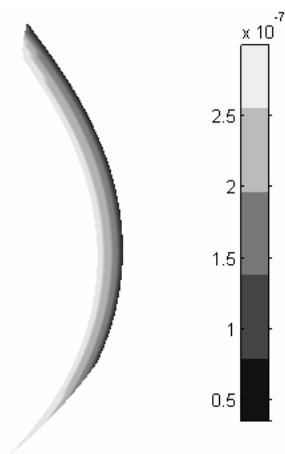


Рис. 13. Значения площади пятна контакта ( $\text{м}^2$ )

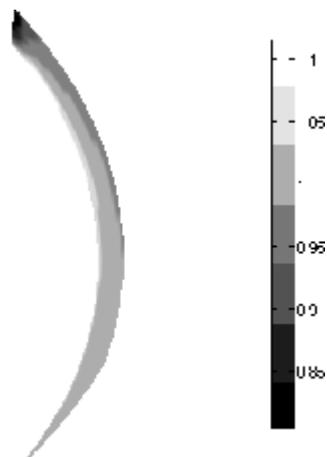


Рис. 14. Характеристика  $r_{\sigma}$

Для того, чтобы определить то, как форма синтезированной поверхности конического колеса влияет на параметры контакта, было предложено построить некоторую сравнительную характеристику. С этой целью дополнительно была решена задача о контакте зуба цилиндрического колеса с полупространством из того же материала, что и сами колеса. В качестве упомянутой сравнительной характеристики  $r_{\sigma}$  было взято отношение максимальных напряжений в точках зуба конического колеса к тем, которые возникают при контакте полупространства с соответствующими точками зуба цилиндрического колеса. Полученные результаты (рис. 14) позволяют сделать вывод о том, что на большей части поверхности зуба отношение меньше единицы и, в целом, мало от нее отличается. Объясняется это как тем, что радиусы кривизны рабочей поверхности достаточно велики, так и вогнутостью синтезированного зуба.

**Выводы.** Проведенная серия вычислений позволяет сделать вывод о том, что даже простейшая модель контактного взаимодействия в рамках предложенной на рис.1 схемы позволяет получать ценные количественные и качественные результаты. Она дает возможность осуществить оценку прочностных характеристик двухпараметрической передачи на этапе синтеза ее параметров. Простота и точность аналитического решения, предлагаемого теорией Герца, позволяет произвести оперативно исследование статического контакта элементов двухпараметрической передачи для большого числа значений параметров движения  $\varphi_1$  и  $u$  (в проведенных исследованиях рассмотрено более 2000 различных положений колес). Определены части поверхности, подвергающиеся наибольшей контактной нагруженности, которые в дальнейшем могут быть исследованы дополнительно другими методами.