УДК 519.2 : 621.658.512

Р.М. ТРИЩ, зав. каф. охраны труда, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков,
А.Н. КУЦЫН, президент „Автрамат”,
М.В. ШАБАЛДАС, вед. инж. НПП „Метрология”

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДЕЛИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ КАК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Знання закону розподілу випадкових величин розсіювання показників якості виробів є важливим, оскільки це дає можливість управляти якістю за малими вибірками. Для перевірки адекватності моделі пропонується використовувати чуттєву характеристику. На масових експериментах перевірено відповідність законів розподілу певним видам механічної обробки.

Knowledge of distribution law of random quantities of dispersion of indexes of quality of wares is important, because it enables to manage quality at small samples. For verification of model adequacy it is suggested to use sensitive description. The accordance of distribution laws to the certain types of machining is tested on mass experiments.

1. Введение. Машиностроение характеризуется постояннным увеличением точности размеров, формы и взаимного расположения поверхностей собираемых деталей. В соответствии с этим быстро растет точность машин и приборов. В настоящее время для традиционной обработки резанием характерны прецизионные координатно-расточные и координатно-шлифовальные станки, оборудование для суперфиниша. Точные измерения проводят с помощью электрофизических микрометров, широко используют оптические компараторы. Для точной обработки резанием применяют прецизионные алмазно-шлифовальные станки и шлифовальные станки особо высокой точности. Для контроля параметров точности используют лазерную измерительную аппаратуру и оптические приборы. Для сверхточной обработки резанием применяют доводочные и полировальные станки особо высокой точности. Контроль деталей проводят с помощью электронной микроскопии и электронно-лучевой дифракционной аппаратуры. Высказывается прогноз дальнейшего повышения точности (точность свыше 0,001 мкм) за счет использования ионно-лучевой обработки с контролем с помощью рентгеновской аппаратуры и специальных анализаторов.

Это требует не только высокоорганизованного производства, но и стройной математической теории, обеспечивающей основу обеспечения высокой точности. Важное место в математической теории точности занимают законы распределения случайных величин показателей точности и методы решения практических задач с их использованием. К настоящему времени, в промышленности имеется множество исследований, которые показали, что распределение действительных размеров деталей, изготовленных на настроенных станках, могут подчиняться различным законам.

2. Оценивание распределения. Применяемый подход для определения закона распределения сводится к расчету параметров эмпирического распределения и принятию их в качестве оценок параметров генеральной совокупности с последующей проверкой сходимости эмпирического распределения с предполагаемым теоретическим распределением. Для проверки гипотез в математической статистике существует масса разнообразных критериев. Можно указать такие, как критерий Колмогорова, χ^2 Пирсона, ω^2 Мизеса и др. Использование классических критериев согласия позволяет решить только задачу: противоречит или нет та или иная гипотеза экспериментальной функции распределения. Недостатком такого подхода является то, что непротиворечие не всегда доказывает адекватность. Поэтому для выяснения адекватности модели распределения целесообразно использовать специальные эмпирические характеристики, чувствительные к функции распределения.

Для оценки адекватности модели применялась чувствительная „λ – характеристика”. Известно [1, 2], что оценка „λ – характеристики” подвержена большим случайным вариациям, особенно к концу испытаний, когда число объектов остается невелико. Поэтому для достоверной оценки „λ – характеристики” необходимо располагать большой выборкой.

Существует еще одна чувствительная характеристика – „μ – характеристика”, форма которой установленная по опытным данным, является одним из существенных оснований для выбора того или иного аналитического типа функции распределения. Оценка „μ – характеристики” имеет существенно меньшие случайные флюктуации, чем вычисленная по тем же данным оценка „λ – характеристики”. Это объясняется лучшими статистическими свойствами оценок суммы по сравнению с оценками частностей. Более того, оценка „μ – характеристики” достаточно чувствительная к правому „хвосту” распределения, что важно для исследований ограниченных справа моделей.

Пусть проводится n испытаний, тогда при значении $r \geq 0$ останется примерно $n \cdot P(R \geq r)$ значений, которые примут свои значения больше, чем r, а к значению $r+\tau - n{\cdot}P(R \geq r + \tau)$. Отношение этих количеств дает условную вероятность того, что значения превышают τ, при условии, что эти значения были при r

$$\mathrm{P}(\mathrm{R} \geq \tau \mid \mathrm{r}) = \frac{P(\mathrm{R} \geq \mathrm{r}+\tau)}{P(R \geq r)}\,. \qquad (1)$$

Находим μ(r), интегрируя выражение (1) в $[r, \infty]$:

$$\mu(\mathrm{r}) = \int_0^{\infty} \frac{1-F(r+\tau)}{1-F(r)}\,d\tau = \frac{1}{1-F(r)}\int_r^{\infty}(1-F(z))\,dz\,. \qquad (2)$$

Если „λ – характеристика” – возрастающая, то ln $(1 - F(r))$ – выпуклая функция, откуда следует:

$$\mu(\mathrm{r}) < \frac{1}{\lambda(r)}\,. \qquad (3)$$

В случае, когда плотность распределения модели унимодальна (одновременна), то для r справедливо неравенство $\mu(r) > \dfrac{1}{2\lambda(r)}$. Из этих двух неравенств следует, что, если $\lambda(r) \to \infty$, $(r \to \infty)$, то $\mu(r) \to 0$.

Если продифференцировать выражение (2), то получается дифференциальное уравнение:

$$\mu'(r) = -1 + \lambda(r)\,\mu(r). \tag{4}$$

Если $\lambda(r)$ – возрастающая функция, то в силу неравенства (3) $\lambda(r)\,\mu(r) < 1$ и, следовательно, из (4) $\mu'(r) < 0$, т.е. $\mu(r)$ убывает с ростом r. При малых r, $\mu(r)$ нечувствительна к типу распределения. Действительно,

$$\mu(r) = \frac{1}{1-F(r)}\int_r^{\infty}[1-F(z)]\,dz = \frac{\mu(0)-\int_0^r[1-F(z)]\,dz}{1-F(r)} \approx$$

$$\approx \frac{\mu(0)-\int_0^r\left[1-F(0)-F'(0)z\right]dz}{1-F(0)-F'(0)\,r} = \frac{\mu(0)-r+F'(0)\dfrac{r^2}{2}}{1-\lambda(0)\,r} \cong \frac{(\mu(0)-r)(1+\lambda(0)r)}{1-\lambda^2(0)\,r^2} \cong$$

$$\cong \mu(0)-[1-\lambda(0)\,\mu(0)]r,\ (r \le \mu(0)).$$

При малых r, $\mu(r)$ убывает ($0 \le \lambda(0)\,\mu(0) < 1$) линейно, независимо от закона распределения.

Для нахождения эмпирической оценки $\tilde{\mu}(r)$ достаточно предложить различные формулы для определения площади под кривой $1 - F(r)$ на малом отрезке $[r_i; r_{i+1}]$. Применяя формулу трапеций [3], имеем:

$$\Delta\tilde{S}_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}}[1-\tilde{F}(z)]\,dz \cong (r_{i+1}-r_i)\left[1-\frac{\tilde{F}(r_i)+\tilde{F}(r_{i+1})}{2}\right], \tag{5}$$

где $\tilde{F}(r_i) = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j$ и n_j – число значений точки r_j.

Имея величины $\Delta\tilde{S}_i$, нетрудно вычислить „μ – характеристику”, помня, что $\tilde{\mu}(0) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{(i)}$ – это среднее значение. Тогда эмпирическая оценка „μ – характеристики” имеет вид:

$$\tilde{\mu}(r_{(i)}) = \frac{\tilde{\mu}(0)-\sum_{i=1}^{n}\Delta\tilde{S}_i}{1-\tilde{F}(r_{(i)})} \tag{6}$$

Еще один подход к эмпирической оценке „μ – характеристики” основывается на определении этой характеристики [2]. А именно, если в нашем рас-

поряжении имеются данные порядковых статистик $r_{(1)}, \ldots, r_{(n)}$, то эмпирическая оценка „μ – характеристики” получается так. Подсчитываются величины

$$\tau_0^{(j)}(r_i) = \tau_j - r_i\,. \tag{7}$$

для тех значений τ_j, которые не меньше, чем r_i. Пусть таких величин N. Тогда (с небольшим смещением)

$$\mu(r) \approx \tau(r_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\tau_0^{(j_k)}(r_i)\,. \tag{8}$$

Итак, имеются две оценки „μ – характеристики” (6) и (8), с помощью которых можно проверить распределение на адекватность.

3. Методика оценивания распределения. Подшипник качения является наиболее распространенным сборочным узлом в машиностроении и от его точности зависит качество машин. Кроме этого, к деталям подшипника качения (наружное кольцо, внутреннее кольцо, шарики или ролики) предъявляются высокие требования к точности их изготовления. Точность изготовления деталей определяет класс точности подшипника. Для оценки точности изготовления деталей подшипников качения проводились исследования на ОАО “Харьковский подшипниковый завод”, где был проведен статистический анализ точности обрабатываемых деталей – колец подшипника. Было проконтролировано по 200 деталей разных квалитетов точности. Действительные значения подвергались оценке на адекватность с использованием критерия согласия Пирсона. Анализ показал согласованность рассеивания действительных значений предполагаемым законам распределения.

Методика оценки модели точности изготовления на адекватность заключается в следующем:

1. Проводим измерения действительных размеров деталей, изготовленных при определенных условиях, не меняя технологии. Таких измерений должно быть достаточно много.

2. Строим графики теоретической „μ – характеристики”, используя эмпирические значения, для оценки параметров распределений; „μ – характеристики” определяются по формулам:

для закона равной вероятности –

$$\mu(x) = \frac{1}{b-x}\left(\frac{b^2-a^2}{2} - b(x-a) + \frac{x^2-a^2}{2}\right),\quad a < x < b\,;$$

для закона Симпсона –

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^2}{(b-a)^2-2(x-a)^2}\left[\dfrac{a+b}{2}-(x-a)+\dfrac{2(x-a)^3}{3(b-a)^2}\right], & a < x \le \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{1}{2(b-x)^2}\left[\dfrac{(a+b)(b-a)^2}{2}-\dfrac{2}{3}(b-x)^3+\dfrac{1}{12}(b-a)^3\right], & \dfrac{a+b}{2} < x \le b \end{cases}$$

и для нормального закона распределения –

$$\mu(x)=\left[\int_x^\infty\left(\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}dx\right)dz\right]/\int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}dx\,.$$

3. Выстраиваем все значения в порядке возрастания, разбиваем величину размаха на $\sqrt[3]{n}$ интервалов и считаем частоту попадания в каждый интервал.

4. По формулам (6) и (8) определяем эмпирическое значение „μ – характеристики” для каждого интервала.

5. Сравниваем эмпирические значения с теоретическими „μ – характеристиками” для различных законов распределения.

6. Делаем вывод о близости эмпирических значений с теоретической „μ – характеристикой”.

Список литературы: 1. *Ламнауэр Н.Ю., Трищ Р.М.* Модель поля рассеивания погрешностей геометрической формы и ошибки взаимного расположения поверхностей // Вестник НТУ „ХПИ”. – 2004. – № 44.– С.106-110. **2.** *Герцбах И.Б., Кордонский Х.Б.* Модели отказов. – М.: Советское радио, 1966. – 166 с. **3.** *Бермант А.*Ф., Арманович И.Г. Краткий курс математического анализа для вузов. – М.: Наука, 1966. – 736 с.

Поступила в редколлегию 08.04.08