УДК 534.1

В. Б. ЗЕЛЕНСКИЙ, доц. каф. ТММиСАПР, канд. техн. наук,
А. А. ЗАРУБИНА, проф. каф. ТММиСАПР, канд. техн. наук,
И. Я. ХРАМЦОВА, научн. сотр. каф. ТММиСАПР, НТУ „ХПИ”

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАЯТНИКА-РОТОРА С ИЗГИБНО- И КРУТИЛЬНОДЕФОРМИРУЮЩИМСЯ СТЕРЖНЕМ

Отримані диференціальні рівняння вигинних та крутильних деформацій маятника-ротора без урахування неврівноваженості по довжині його стрижня.

Differential equations of flexure-torsion distortion of pendulum-rotor are got without the account of imbalance on its bar length.

В соответствии с постановкой задачи о пространственных колебаниях упругого маятника-ротора с изгибно- и крутильно-деформирующимся стержнем [1], получим теперь динамические выражения для рассматриваемой системы. При этом распределением неуравновешенности маятника-ротора по длине стержня пренебрегаем.

Кинетическая энергия системы состоит из энергии переносного движения T_e, энергии связи переносного и относительного движения T_m и энергии относительного движения T_r

$$T = T_e + T_m + T_r . \tag{1}$$

Кинетическая энергия переносного движения [2]

$$T_e = \frac{1}{2}\left[MV_0^2 + 2M\vec V_0 \cdot \left(\vec\omega \cdot \vec r_c'\right) + \vec\omega \cdot \theta^O \cdot \vec\omega\right]. \tag{2}$$

Здесь M – масса всей системы

$$M = m + \rho l , \tag{3}$$

где m – масса диска; ρ – плотность стержня; l – его длина; $\vec r_c'$ – вектор-радиус центра инерции системы в подвижной (относительной) системе координат $Oxyz$; θ^O – тензор инерции системы в точке O подвеса маятника-ротора. Очевидно, что θ^O и $\vec r_c'$ являются функциями обобщенных координат u, v, w, θ.

Для уравновешенного ротора без учета диска

$$M\vec r_c' = \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{N_L} m_s^l \left[\left(u^l + a^l - \frac{\partial v^l}{\partial a^l} b_s^l - \frac{\partial w^l}{\partial a^l} c_s^l\right)\cdot \vec i_1 + \left(v^l + b_s^l \cos\theta^l - c_s^l \sin\theta^l\right)\cdot \vec i_1 + \right.$$
$$\left. + \left(w^l + b_s^l \sin\theta^l - c_s^l \cos\theta^l\right)\cdot \vec i_3\right]. \tag{4}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $N_l \to \infty$, получим с учетом диска на конце

$$M\vec r_c' = \rho^* \int_0^l da\left[(u+a)F - \frac{\partial v}{\partial a}\iint_F bdF - \frac{\partial w}{\partial a}\iint_F cdF\right]\cdot \vec i_1 +$$
$$+ \rho^* \int_0^l da\left[vF + \cos\theta \iint_F bdF - \sin\theta\iint_F cdF\right]\cdot \vec i_2 +$$
$$+ \rho^* \int_0^l da\left[wF + \sin\theta \iint_F bdF - \cos\theta\iint_F cdF\right]\cdot \vec i_3 +$$
$$+ m\left[u(l,t) + l\right]\cdot \vec i_1 + mv(l,t)\cdot \vec i_2 + mw(l,t)\cdot \vec i_3, \tag{5}$$

где ρ^* – плотность материала стержня; F – площадь поперечного сечения ($\rho = \rho^* F$).

Принимая, что поперечное сечение стержня является симметричным относительно геометрических осей b, c, параллельных до деформации осям y и z соответственно, получим, что статические моменты сечения $\iint_F bdF = \iint_F cdF = 0$, и в дальнейшем в суммах типа (5) будем отбрасывать соответствующие члены. Тогда вместо (5) для уравновешенного ротора, обозначив $M\vec r_c' = \vec S_0$, имеем

$$\vec S_0 = M\vec r_c' = \rho^* \int_0^l da\left[(u+a)\cdot \vec i_1 + v\vec i_2 + w\vec i_3\right] +$$
$$+ m\left[u(l,t) + l\right]\cdot \vec i_1 + m\left[v(l,t)\cdot \vec i_2 + w(l,t)\cdot \vec i_3\right], \tag{6}$$

где S_0 – статический момент системы относительно полюса O.

Теперь второй член выражения (2) будет

$$2M\vec V_0 \cdot \left(\vec\omega \cdot \vec r_c'\right) = 2\vec V_0 \cdot \vec\omega \cdot M\vec r_c' = 2\vec V_0 \cdot \vec\omega \cdot \vec S_0 =$$
$$= 2\left[\left(\omega_2 \cdot S_{03} - \omega_3 \cdot S_{02}\right)\cdot V_{01} + \left(\omega_3 \cdot S_{01} - \omega_1 \cdot S_{03}\right)\cdot V_{02} + \left(\omega_1 \cdot S_{02} - \omega_2 \cdot S_{01}\right)\cdot V_{03}\right], \tag{7}$$

где выражения для компонент вектора $\vec S_0$ определяются из выражения (6):

$$\vec S_{01} = \rho\int_0^l (u+a)\cdot da + m\left[u(l,t) + l\right]; \vec S_{02} = \rho\int_0^l vda + mv(l,t); \; \vec S_{03} = \rho\int_0^l wda + mw(l,t). \tag{8}$$

Найдем теперь компоненты тензора инерции θ^O. Без учета диска для уравновешенного ротора имеем

$$\theta_{11}^{O}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{N_l}m_s^l\left[\left(\vec{r}_s^{\,l\prime}\cdot\vec{i}_2\right)^2+\left(\vec{r}_s^{\,l\prime}\cdot\vec{i}_3\right)^2\right]=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{N_l}m_s^l\left[\left(v^l+b_s^l\cos\theta_s^l-c_s^l\sin\theta_s^l\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(w^l+b_s^l\sin\theta_s^l+c_s^l\cos\theta_s^l\right)^2\right]=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{N_l}m_s^l\left(v^{l2}+w^{l2}+b_s^{l2}+c_s^{l2}\right). \qquad (9)$$

Положим далее в выражении (9) $n\to\infty$ и $N_l\to\infty$ и в пределе с учетом диска получим:

$$\theta_{11}^{O}=\rho\int_0^l da\left[v^2+w^2+i_y^2+i_z^2\right]+m\left[v^2(l,t)+w^2(l,t)+r_y^2+r_z^2\right], \qquad (10)$$

где

$$i_y^2=\frac{I_y}{F}=\frac{\iint_F c^2dF}{F},\quad i_z^2=\frac{I_z}{F}=\frac{\iint_F b^2dF}{F} \;- \qquad (11)$$

квадраты радиусов инерции сечения стержня относительно осей b и c, параллельных осям y и z, а r_y и r_z – соответствующие радиусы инерции диска. Далее, пропустив промежуточные выкладки, запишем:

$$\theta_{22}^{O}=\rho\int_0^l\left[a^2+w^2+2ua+i_y^2\left(\cos^2\theta+\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right)+i_z^2\left(\sin^2\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2\right)\right]da+$$
$$+m\left[l^2+w^2(l,t)+2u(l,t)l+r_y^2\left(\cos^2\theta(l,t)+\left(\frac{\partial w(l,t)}{\partial a}\right)^2\right)+\right. \qquad (12)$$
$$\left.+r_z^2\left(\sin^2\theta(l,t)+\left(\frac{\partial v(l,t)}{\partial a}\right)^2\right)\right].$$

При этом членом, содержащим u^2, как имеющим четвертый порядок малости, пренебрегаем.

$$\theta_{33}^{O}=\rho\int_0^l\left[a^2+v^2+2ua+i_y^2\left(\sin^2\theta+\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2+i_z^2\cos^2\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2\right)\right]da+$$
$$+m\left[l^2+v^2(l,t)+2u(l,t)l+r_y^2\left(\sin^2\theta(l,t)+\left(\frac{\partial w(l,t)}{\partial a}\right)^2\right)+\right. \qquad (13)$$
$$\left.+r_z^2\left(\sin^2\theta(l,t)+\left(\frac{\partial v(l,t)}{\partial a}\right)^2\right)\right];$$

$$\theta_{12}^{O}=-\rho\int_0^l\left[v(u+a)+i_y^2\frac{\partial w}{\partial a}\sin\theta-i_z^2\frac{\partial v}{\partial a}\cos\theta\right]da-$$
$$-m\left[v(l,t)(u(l,t)+l)+r_y^2\frac{\partial w(l,t)}{\partial a}\sin\theta(l,t)-r_z^2\frac{\partial v(l,t)}{\partial a}\cos\theta(l,t)\right]; \qquad (14)$$

$$\theta_{13}^{O}=-\rho\int_0^l\left[w(u+a)+i_y^2\frac{\partial w}{\partial a}\cos\theta-i_z^2\frac{\partial v}{\partial a}\sin\theta\right]da-$$
$$-m\left[w(l,t)(u(l,t)+l)+r_y^2\frac{\partial w(l,t)}{\partial a}\cos\theta(l,t)-r_z^2\frac{\partial v(l,t)}{\partial a}\sin\theta(l,t)\right]; \qquad (15)$$

$$\theta_{23}^{O}=-\rho\int_0^l\left[v\cdot w+\left(i_z^2-i_y^2\right)\sin\theta\cdot\cos\theta\right]da-$$
$$-m\left[v(l,t)\cdot w(l,t)+\left(r_z^2-r_y^2\right)\sin\theta(l,t)\cdot\cos\theta(l,t)\right]. \qquad (16)$$

Третий член выражения (2) с учетом $\theta_{iK}^{O}=\theta_{Ki}^{O}$ будет

$$\vec{\omega}\theta^{O}\vec{\omega}=\theta_{11}^{O}\omega_1^2+\theta_{22}^{O}\omega_2^2+\theta_{33}^{O}\omega_3^2+2\left(\theta_{12}^{O}\omega_1\omega_2+\theta_{13}^{O}\omega_1\omega_3+\theta_{23}^{O}\omega_2\omega_3\right). \qquad (17)$$

Переходим к рассмотрению кинетической энергии связи переносного и относительного движения. Эта часть кинетической энергии определяется по формуле:

$$T_m=\vec{V}_0\cdot\vec{Q}_r+\vec{\omega}\vec{K}_r^{O}, \qquad (18)$$

где $\vec{Q}_r$ – главный вектор относительных количеств движения, а $\vec{K}_r^{O}$ – их главный момент относительно полюса O.

Главный вектор относительных количеств движения $\vec{Q}_r$ можно получить как

$$\vec{Q}_r=\sum m_K\vec{r}_K^{\,\prime}, \qquad (19)$$

где индексом * обозначен вектор, проекции которого на подвижные оси $Oxyz$ равны производным по времени от проекций на них самого вектора.

Очевидно, используя выражение (6) можно записать $\vec{Q}_r=\overset{*}{\vec{S}}{}^{O}$, и из (8) получим:

$$Q_{r_1}=\overset{*}{S}{}_1^{O}=\rho\int_0^l\dot{u}\,da+m\dot{u}(l,t);\; Q_{r_2}=\overset{*}{S}{}_2^{O}=\rho\int_0^l\dot{v}\,da+m\dot{v}(l,t);$$
$$Q_{r_3}=\overset{*}{S}{}_3^{O}=\rho\int_0^l\dot{w}\,da+m\dot{w}(l,t). \qquad (20)$$

Далее главный момент относительных количеств движения получим по формуле:

$$K_r^O=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{N_l} m_s^l \vec{r}_s^{\,\prime l} \times \dot{\vec{r}}_s^{\,\prime l}, \tag{21}$$

где виртуальные скорости представляются вектором $\dot{\vec{r}}_s^{\,\prime l}$, который с учетом выражения (4) можно представить как

$$\dot{\vec{r}}_s^{\,\prime l}=\left(\dot u^l-\frac{\partial \dot v^l}{\partial a^l}b_s^l-\frac{\partial \dot w^l}{\partial a^l}c_s^l\right)\cdot\vec{i}_1+\left[\dot v^l-\left(b_s^l\sin\theta^l+c_s^l\cos\theta^l\right)\cdot\dot\theta^l\right]\cdot\vec{i}_2+$$
$$+\left[\dot w^l+\left(b_s^l\cos\theta^l+c_s^l\sin\theta^l\right)\cdot\dot\theta^l\right]\cdot\vec{i}_3. \tag{22}$$

Выполнив произведение (19) и переходя к пределу при $N_l\to\infty$ и $n\to\infty$ получим

$$K_{r1}^O=\rho\int_0^l\left[v\cdot\dot w-\dot v\cdot w+\left(i_y^2+i_z^2\right)\cdot\dot\theta\right]\cdot da+m\cdot\left[v(l,t)\dot w(l,t)-\right.$$
$$\left.-\dot v(l,t)w(l,t)+\left(r_y^2+r_z^2\right)\cdot\dot\theta(l,t)\right];$$
$$K_{r2}^O=\rho\int_0^l\left[w\dot u-(u+a)\dot w+i_z^2\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial a}\cdot\dot\theta-\sin\theta\cdot\frac{\partial\dot v}{\partial a}\right)-\right.$$
$$\left.-i_y^2\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial w}{\partial a}\cdot\dot\theta+\cos\theta\cdot\frac{\partial\dot w}{\partial a}\right)\right]\cdot da+m\cdot\left[w(l,t)\dot u(l,t)-\right.$$
$$-\left(u(l,t)+l\right)\dot w(l,t)+r_z^2\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial a}\cdot\dot\theta(l,t)-\sin\theta\cdot\frac{\partial\dot v(l,t)}{\partial a}\right)- \tag{23}$$
$$\left.-r_y^2\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial w}{\partial a}\cdot\dot\theta(l,t)+\cos\theta\cdot\frac{\partial\dot w(l,t)}{\partial a}\right)\right];$$
$$K_{r3}^O=\rho\int_0^l\left[(u+a)\dot v-v\dot u+i_y^2\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial a}\cdot\dot\theta-\sin\theta\cdot\frac{\partial\dot w}{\partial a}\right)+\right.$$
$$\left.+i_z^2\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial a}\cdot\dot\theta+\cos\theta\cdot\frac{\partial\dot v}{\partial a}\right)\right]\cdot da+m\cdot\left[\left(u(l,t)+l\right)\dot v(l,t)-\right.$$
$$-v(l,t)\cdot\dot u(l,t)+r_y^2\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial w}{\partial a}\cdot\dot\theta(l,t)-\sin\theta\cdot\frac{\partial\dot w(l,t)}{\partial a}\right)+$$
$$\left.+r_z^2\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial a}\cdot\dot\theta(l,t)+\cos\theta\cdot\frac{\partial\dot v(l,t)}{\partial a}\right)\right].$$

Теперь запишем выражение (18) в проекциях:

$$T_m=V_{O1}Q_{r1}+V_{O2}Q_{r2}+V_{O3}Q_{r3}+\omega_1K_{r1}^O+\omega_2K_{r2}^O+\omega_3K_{r3}^O \tag{24}$$

и все выражения для преобразований кинетической энергии связи переносного и относительного движения готовы.

Кинетическая энергия T_r относительного движения в случае дискретных точек определяется по формуле

$$T_r=\frac{1}{2}\sum m_i\left(\dot{\vec{r}}_s^{\,\prime l}\right)^2. \tag{25}$$

Пользуясь выражением (20) для виртуальной скорости и перехода к пределу при $n\to\infty$ и $N_l\to\infty$ получим с учетом массы на конце

$$T_r=\frac{1}{2}\rho\int_0^l\left[\dot v+\dot w+i_z^2\left(\left(\frac{\partial\dot v}{\partial a}\right)^2+\dot\theta^2\right)+i_y^2\left(\left(\frac{\partial\dot w}{\partial a}\right)^2+\dot\theta^2\right)\right]\cdot da+\frac{1}{2}m\cdot\left[\dot v^2(l,t)+\right.$$
$$\left.+\dot w(l,t)+r_z^2\left(\left(\frac{\partial v(l,t)}{\partial a}\right)^2+\dot\theta^2(l,t)\right)+r_y^2\left(\left(\frac{\partial w(l,t)}{\partial a}\right)^2+\dot\theta^2(l,t)\right)\right]. \tag{26}$$

Потенциальная энергия маятника-ротора слагается из потенциальных энергий силы веса Π_1, изгиба и кручения Π_2 и потенциальной энергии Π_3 деформации пружины в точке подвеса.

Полагаем, что ось $O\xi$ неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ горизонтальна (см. рис. 1 [2]), а компоненты ω_2, ω_3 угловой скорости $\vec\omega$ достаточно малы и ими можно пренебречь при определении потенциальной энергии силы веса. Тогда

$$\Pi_1=-M_g\left(\xi_O+\xi_{1C}\right), \tag{27}$$

где ξ_O – координата точки подвеса в неподвижной системе координат, а ξ_{1C} – абсолютная координата центра инерции маятника-ротора в системе $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ с осями, параллельными осям неподвижной системы. Очевидно, $\xi_{1C}\approx\vec r_c^{\,\prime}\cdot\vec e_1\approx\vec r_c^{\,\prime}\cdot\vec i_1$. Так как для дальнейшего случая вариаций первое слагаемое в выражении (25) несущественно, отбросим его. Таким образом,

$$\Pi_1=-g\vec S_1^O\cdot\vec i_1=-gS_1^O=-g\left[\rho\int_0^l(u+a)\cdot da+m\left(u(l,t)+l\right)\right]. \tag{28}$$

Потенциальная энергия деформации π_2 определяется с учетом следующих предположений: центр изгиба поперечного сечения совпадает с геометрическим центром симметрии сечения; повороты сечения в результате кручения происходят относительно центра изгиба; перемещениями центра изгиба относительно осей b и c вследствие сдвига пренебрегаем; депланациями сечений от кручения пренебрегаем; сжатием продольных волокон стержня пренебрегаем.

Потенциальная энергия деформации изгиба и кручения

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ E\left[I_z\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}\right)^2 + I_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}\right)^2 \right] + GI_p\left(\frac{\partial \theta}{\partial a^2}\right)^2 \right\}\cdot da\,, \tag{29}$$

где E – модуль Юнга, I_z, I_y – моменты инерции сечения маятника ротора относительно осей Ox, Oy, G – модуль упругости при сдвиге, GI_p – крутильная жесткость.

Потенциальная энергия деформации пружины в точке подвеса определяется выражением

$$\Pi_3 = \frac{1}{2}k[\alpha]^2, \tag{30}$$

где k – сферическая жесткость на поворот; α – угол, составленный осью ξ и касательной к дифференцированной оси стержня маятника-ротора в точке подвеса O. Косинус этого угла найдется из произведения векторов $\vec{e}_1$ и

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial a} = \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial a}\right)\cdot\vec{i}_1 + \frac{\partial v}{\partial a}\cdot\vec{i}_2 + \frac{\partial w}{\partial a}\cdot\vec{i}_3\right]_{a\approx 0}. \tag{31}$$

Принимая как и ранее $\vec{e}_1 \approx \vec{i}_1$, имеем

$$\cos\alpha = 1 + \partial u/\partial a, \tag{32}$$

а с другой стороны (по условию несжимаемости стержня)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 = \left(1+\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2 = 1, \tag{33}$$

при $a = 0$

$$1+\frac{\partial u}{\partial a} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2}\,. \tag{34}$$

Принимая α и $\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2$, $\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2$ малыми величинами и разлагая в ряды $\cos\alpha$ и $1+\frac{\partial u}{\partial a}$, получаем

$$1-\frac{\alpha^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right]_{a\approx 0}. \tag{35}$$

Тогда

$$\alpha^2 = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right]_{a\approx 0} \tag{36}$$

и

$$\Pi_3 = \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right]_{a\approx 0}. \tag{37}$$

Дифференциальные уравнения движения маятника-ротора получим из принципа Гамильтона-Остроградского, находя стационарное значение интеграла

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt\,, \tag{38}$$

то есть вариационного уравнения

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt\,. \tag{39}$$

Здесь $L = T - \Pi$ – кинетический потенциал; составляющие кинетической и потенциальной энергии получены выше.

Имея в виду получить уравнения движения «носимого» тела (т. е. относительных колебаний маятника ротора), примем в рассмотрение вариации δv, δw, $\delta\theta$, $\delta v'$, $\delta w'$, $\delta\theta'$ относительных координат v, w, θ и их производных, от которых зависят выражения для T и Π. Вариации δu и $\delta u'$ не рассматриваются, поскольку с помощью условия несжимаемости u и u' будут выражены через v и w, и их производные. Вариации относительных координат вычисляются при условиях варьирования $\delta v(a,t_1) = \delta v'(a,t_2) = 0$, $\delta w(a,t_1) = \delta w'(a,t_2) = 0$, $\delta\theta(a,t_1) = \delta\theta'(a,t_2) = 0$ и условиях в точке подвеса $\delta v(0,t) = \delta w(0,t) = \delta\theta(0,t) = 0$.

Пропуская все операции по варьированию составляющих кинетического потенциала L и приравнивая нулю множители при вариациях δv, δw, $\delta\theta$ и их производных, запишем уравнения относительных изгибно-крутильных колебаний стержня маятника-ротора.

$$\begin{aligned} &-EI_z v^{\mathrm{IV}} + \rho\Big\{-\ddot{v} + i_z^2\ddot{v}'' + v''\Big[\frac{1}{2}(\omega_2^2+\omega_3^2)(l_2^{*2}-a^2) + (\omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - \dot{V}_{01})(l_1^* - a)\Big] - \\ &- v'\Big[(\omega_2^2+\omega_3^2)a + \omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - \dot{V}_{01} + g\Big] + v'(\omega_1^2+\omega_3^2) + w(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) + 2\omega_1\dot{w} + \\ &+ i_z^2\big[\omega_1\theta'(\omega_2\sin\theta - \omega_3\cos\theta) - 2\dot{\theta}'(\omega_2\cos\theta + \omega_3\sin\theta) + 2\dot{\theta}\theta'(\omega_2\sin\theta - \omega_3\cos\theta) - \\ &- \theta'(\dot{\omega}_2\cos\theta + \dot{\omega}_3\sin\theta)\big] + \omega_1 V_{03} - \omega_3 V_{01} - \dot{V}_{02} - (\omega_1\omega_2 + \dot{\omega}_3)a\Big\} = 0; \end{aligned} \tag{40}$$

$$-EI_y w^{IV} + \rho\{-\ddot w + i_y^2 \ddot w'' + w''\left[\frac{1}{2}(\omega_2^2+\omega_3^2)(l_3^{*2}-a^2) + (\omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - \dot V_{01})(l_1^* - a)\right] -$$
$$- w'[(\omega_2^2+\omega_3^2)a + \omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - \dot V_{01} + g] + w(\omega_1^2+\omega_2^2) + v(\dot\omega_1 + \omega_2\omega_3) + 2\omega_1 \dot v + \tag{41}$$
$$+ i_y^2[\omega_1\theta'(\omega_2\cos\theta - \omega_3\sin\theta) + 2\dot\theta'(\omega_2\sin\theta-\omega_3\cos\theta) + 2\dot\theta\theta'(\omega_2\cos\theta+\omega_3\sin\theta) +$$
$$+\theta'(\dot\omega_2\sin\theta - \dot\omega_3\cos\theta)] + \omega_2 V_{01} - \omega_1 V_{02} - \dot V_{03} - (\omega_1\omega_3 + \dot\omega_2)a\} = 0;$$

В уравнениях (40) и (41) обозначено

$$l_1^* = l + \frac{m}{\rho},\ l_2^{*2} = l^2 + \frac{2m}{\rho}l - 2i_z^2,\ l_3^{*2} = l^2 + \frac{2m}{\rho}l - 2i_y^2. \tag{42}$$

$$GI_p\theta'' + \rho\{-(i_z^2+i_y^2)\ddot\theta + i_z^2[\omega_1 w'(\omega_2\sin\theta-\omega_3\cos\theta) + 2\dot v'(\omega_2\cos\theta+\omega_3\sin\theta) +$$
$$+ v'(\dot\omega_2\cos\theta+\dot\omega_3\sin\theta)] - i_y^2[\omega_1 w'(\omega_2\cos\theta+\omega_3\sin\theta) - 2\dot w'(\omega_2\sin\theta-\omega_3\cos\theta) - \tag{43}$$
$$- w'(\dot\omega_2\sin\theta - \dot\omega_3\cos\theta)] + (\omega_2^2-\omega_3^2-2\omega_2\omega_3)(i_z^2-i_y^2)\sin\theta\cos\theta(i_z^2+i_y^2)\dot\omega_1 = 0$$

Перерезывающая сила в направлении оси Oy в точке крепления массы m будет

$$-EI_z v^{III}(l,t) = -m\{-gv' - \ddot v - l(\dot\omega_3 + \omega_1\omega_2) + \omega_1 V_{03} - \dot V_{02} + (\omega_1^2+\omega_3^2)v +$$
$$+ w(\dot\omega_1 - \omega_2\omega_3) + v'\left[-(\omega_2^2+\omega_3^2)\left(l - \frac{i_z^2\rho}{m}\right) + \omega_2 V_{03} - \omega_3 V_{02} + \dot V_{01}\right] + 2\omega_1\dot w - \frac{i_z^2\rho}{m}\ddot v' + \tag{44}$$
$$+ \frac{i_z^2\rho}{m}[\omega_1(\omega_2\cos\theta+\omega_3\sin\theta) + 2\theta'(\omega_2\cos\theta+\omega_3\sin\theta) + \dot\omega_2\sin\theta - \dot\omega_3\cos\theta]\}\big|_{a=l}.$$

Перерезывающая сила в направлении оси Oz в точке крепления массы m будет

$$-EI_y w^{III}(l,t) = -m\{-gw' - \ddot w + l(\dot\omega_2 - \omega_1\omega_2) + \omega_2 V_{01} - \omega_1 V_{02} - \dot V_{03} + (\omega_1^2+\omega_2^2)w -$$
$$-(\dot\omega_1 + \omega_2\omega_3)v + w'\left[-(\omega_2^2+\omega_3^2)\left(l - \frac{i_y^2\rho}{m}\right) + \omega_2 V_{03} - \omega_3 V_{02} + \dot V_{01}\right] - 2\omega_1\dot v - \frac{i_y^2\rho}{m}\ddot w' - \tag{45}$$
$$-\frac{i_y^2\rho}{m}[(\omega_1 + 2\theta')(\omega_2\sin\theta - \omega_3\cos\theta) - (\dot\omega_2\cos\theta + \dot\omega_3\sin\theta)]\}\big|_{a=l}.$$

Далее изгибающие моменты:

$$-EI_z v^{II}(l,t) = -mr_z^2[(\omega_2^2+\omega_3^2)v' - \ddot v' + (\omega_1 + 2\dot\theta)(\omega_2\cos\theta + \omega_3\sin\theta) + \\ + \dot\omega_2\cos\theta - \dot\omega_3\sin\theta]_{a=l}, \tag{46}$$

$$-EI_y w^{II}(l,t) = -mr_y^2[(\omega_2^2+\omega_3^2)w' - \ddot w' - (\omega_1 + 2\dot\theta)(\omega_2\sin\theta - \omega_3\cos\theta) + \\ + \dot\omega_2\cos\theta + \dot\omega_3\sin\theta]_{a=l}, \tag{47}$$

а крутящий момент при $a=l$

$$GI_p\theta' = m\{-(r_z^2+r_y^2)(\ddot\theta + \dot\omega_1) - r_z^2\langle v'[\omega_1(\omega_2\sin\theta - \omega_3\cos\theta) + \dot\omega_2\cos\theta + \dot\omega_3\sin\theta] +$$
$$+ 2\dot v'(\omega_2\cos\theta + \omega_3\sin\theta)\rangle + r_y^2\langle w'[-\omega_1(\omega_2\cos\theta + \omega_3\sin\theta) + (\dot\omega_2\sin\theta - \dot\omega_3\cos\theta)] + \tag{48}$$
$$+ 2\dot w'(\omega_2\sin\theta - \omega_3\cos\theta)\rangle + (\omega_2^2 - \omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3)(r_z^2 - r_y^2)\sin\theta\cos\theta\}\big|_{a=l}.$$

Наконец, изгибающие моменты в закрепленном конце

$$EI_z v^{II}(0,t) = kv'(0,t);\ EI_y w^{II}(0,t) = kw'(0,t). \tag{49}$$

Список литературы: **1.** *В. Б. Зеленский, А. А. Зарубина, З. С. Сафонова, И. Я. Храмцова*. К постановке задачи о пространственных колебаниях упругого маятника-ротора с изгибно и крутильно деформирующимся стержнем. // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – 2007. – №29. – С.47-51. **2.** *А. И.Лурье*. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ. – 1961.– 824 с.

Поступила в редколлегию 01.10.2008