повненням», є бульова алгебра. Позначимо її символом $(H_0,\vee,\wedge)$. Зрозуміло, що однозначні відповідності (1) здійснюють гомоморфізм бульової алгебри $(H_0,\vee,\wedge)$ в бульову алгебру всіх замкнених і відкритих підмножин простору R^n, позначаємо її – $(\Sigma^n,\cup,\cap)$.

Таблиця 2

1. $[f]\vee[g]=[g]\vee[f]$	1^*. $[f]\wedge[g]=[g]\wedge[f]$
2. $[f]\vee([g]\vee[h])=([f]\vee[g])\vee[h]$	2^*. $[f]\wedge([g]\wedge[h])=([f]\wedge[g])\wedge[h]$
3. $([f]\vee[g])\wedge[g]=[g]$	3^*. $([f]\wedge[g])\vee[g]=[g]$
4. $[f]\vee([g]\wedge[h])=$ $([f]\vee[g])\wedge([f]\vee[h])$	4^*. $[f]\wedge([g]\vee[h])=$ $([f]\wedge[g])\vee([f]\wedge[h])$
5. $([f]\vee\overline{[f]})\wedge[g]=[g]$	5^*. $([f]\wedge\overline{[f]})\vee[g]=[g]$
6. $[f]\wedge[g]=[f]\Leftrightarrow[f]\vee[g]=[g]$	
7. $[f]\wedge[1]=[f]$	7^*. $[f]\vee[-1]=[f]$
8. $\overline{[f]\vee[g]}=\overline{[f]}\wedge\overline{[g]}$	8^*. $\overline{[f]\wedge[g]}=\overline{[f]}\vee\overline{[g]}$

Згідно теореми Уітні (див. [5]), яка говорить, що «*для будь-якої замкненої підмножини* $L\subset R^n$ *існує така неперервно-диференційована, будь-якого порядку, функція* $f(M)$ *на* R^n, *що* $f(M)=0$ *при* $M\in L$ *і* $f(M)<0$ *при* $M\notin L$», маємо і зворотну до (1) однозначну відповідність. Із взаємно однозначного гомоморфізму бульових алгебр $(H_0,\vee,\wedge)$ і $(\Sigma^n,\cup,\cap)$, і випливає правильність наступного твердження.

Таблиця 3

X_f	X_g	$X_f\vee X_g$	$(X_f\vee X_g)\wedge X_g$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Теорема 2. *Бульова алгебра* $(H_0,\vee,\wedge)$ *ізоморфна бульовій алгебрі* $(\Sigma^n,\cup,\cap)$.

Зауваження. Нехай $f(M)$ і $g(M)$ є довільні функції множини $C^m(R^n)$ – множини m раз неперервно-диференційованих функцій. Зважаючи на те, що функції

$$\delta(M)=\left(f(M)+g(M)+\sqrt{f(M)^2+g(M)^2}\right)\left(f(M)^2+g(M)^2\right)^{m/2},$$

$$\kappa(M)=\left(f(M)+g(M)-\sqrt{f(M)^2+g(M)^2}\right)\left(f(M)^2+g(M)^2\right)^{m/2}$$

належать $C^m(R^n)$ і є представниками, відповідно, класів $[\max(M)]$ і $[\min(M)]$, то, очевидно, що на базі множин $C^m(R^n)$ можна будувати підалгебри бульової алгебри $(H_0,\vee,\wedge)$, які будуть *ізоморфні бульовій алгебрі* $(\Sigma^n,\cup,\cap)$. Позначаємо їх, відповідно, через $(H_m,\vee,\wedge)$. Зрозуміло, що $(H_0,\vee,\wedge)\supset(H_1,\vee,\wedge)\supset\mathbf{K}\supset(H_m,\vee,\wedge)\supset\mathbf{K}$. Зазначимо також, що функції, побудовані за допомогою бінарних операцій «$\vee$» і «$\wedge$», відомі під назвою R-функції [2, 4], знайшли широке застосування в різних напрямках прикладної математики [1-4].

Висновок. Встановлений ізоморфізм бульових алгебр дає теоретичне підґрунтя для застосування методів дискретної математики для аналізу і побудови R-функцій, широке використання яких в інженерних розрахунках і проектуванні є доконаним фактом.

Список літератури: 1. *Клименко Вісс.Гр.* Багатокритеріальні формалізації. – Харків: СПДФО Яковлєва Г.Г., 2004. – 308 с. **2.** *Клименко В.Г., Рвачев В.Л.* Об одном методе решения второй основной задачи для областей сложной формы // Прикладная механика. – Т. IV. – Вып. 1. –1968. – С. 25-32. **3.** *Рвачов В.Л.* Про алгоритмічну повноту засобів аналітичної геометрії. // Доповіді АН УРСР. – №1. – 1966. **4.** *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техніка, 1967. - 212 с. **5.** *Постников М. М.* Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 480 с.

Поступила в редколегію 27.04.09

УДК 519.8

Вісс. Гр. КЛИМЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, НТУ "ХПІ"

5.
6. ЗМІШАНА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА
7. МІНІМІЗАЦІЇ ПО МАКСИМУМУ

В даній роботі представлена формалізована багатокритеріальна модель оптимізаційних задач, які виникають, коли не всі учасники інженерного проекту, пов'язаного із розміщенням споріднених виробничих об'єктів (вузлів), одночасно готові визначитись із своїми намірами. Ця модель поповнює ряд багатокритеріальних моделей, розроблених і досліджених автором в роботах. В статті наведені встановлені автором умови існування і єдиності розв'язку описаної багатокритеріальної оптимізаційної задачі. Досліджений зв'язок між цією оптимізаційною задачею та спорідненою з нею стратегічною грою. Також запропонований і метод відшукування розв'язку поставленої багатокритеріальної оптимізаційної задачі, який ілюструється конкретним прикладом.

In this work the formalized multicriterion model of optimization tasks is presented, which arise up when not all of participants of engineering project, related with placing of cognate production objects (knots), are simultaneously ready to determine with their intentions. This model fills up the row of multicriterion models, developed and probed by the author. In the paper the author's offered conditions of existence and uniqueness of solution of the described multicriterion optimization task is resulted. The connection

between this optimization task and cognate with it strategic game is probed. Also method of solution's searching of the multicriterion optimization task is offered , which is illustrated by concrete example.

1.Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку. Нехай $H=\{H_1,\mathbf{K},H_m\}$ є система строго опуклих попарно неперетинних компактів в просторі R^n. І нехай H_0 є опуклий багатогранник – $\mathrm{Conv}\{U_1,\mathbf{K},U_k\}$, для якого $H_0\cap H_i=\varnothing$ при $\forall i=\overline{1,m}$. Розглядаємо змінний граф $G(X_1,\mathbf{K},X_m)$, де вершини графа є плинні точки $X_i\in H_i$. Ребрам (X_i,X_j) цього графа зіставляємо функції

$$h_{ij}(X_i,X_j):=\max_{Y\in H_0}\left(\alpha_i f_i(d(X_i,Y))+\beta_j g_j(d(Y,X_j))\right),\quad \alpha_i,\beta_j\in R_+.$$

Тут $f_i(d),g_j(d)$ є неперервні, опуклі, додатні і не спадні на R_+ функції. Відносно функції $h_{ij}(X_i,X_j)$ зауважимо, що

$$h_{ij}(X_i,X_j)=\bigvee_{\nu=1}^{\nu=k}\left(\alpha_i f_i(d(X_i,U_\nu))+\beta_j g_j(d(U_\nu,X_j))\right).\qquad(1)$$

Дійсно, припустимо, що $h_{ij}(X_i,X_j)=\alpha_i f_i(d(X_i,Y_0))+\beta_j g_j(d(Y_0,X_j))$, де $Y_0\in H_0$ і $Y_0\notin\{U_1,\mathbf{K},U_k\}$. Тоді $Y_0=\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\mu_\nu U_\nu$ ($\mu_\nu\ge 0$ і $\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\mu_\nu=1$), а отже,

$$h_{ij}(X_i,X_j)=\alpha_i f_i\left(d\left(X_i,\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\mu_\nu U_\nu\right)\right)+\beta_j g_j\left(d\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\mu_\nu U_\nu,X_j\right)\right)\le$$
$$\le\alpha_i\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\mu_\nu f_i(d(X_i,U_\nu))+\beta_j\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\mu_\nu g_j(d(U_\nu,X_j))=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\mu_\nu\left(\alpha_i f_i(d(X_i,U_\nu))+\beta_j g_j(d(U_\nu,X_j))\right).$$

Тут рівність можлива лише при $Y_0\in\{U_1,\mathbf{K},U_k\}$. Далі: кожній вершині $X_i\in H_i$ графа $G(X_1,\mathbf{K},X_m)$ ставимо у відповідність функцію

$$P_i(X)\equiv P_i(X_1,\mathbf{K},X_m):=\bigvee_{j=1}^{j=m}h_{ij}(X_i,X_j)\equiv\max\{h_{ij}(X_i,X_j)\mid j=\overline{1,m}\};$$

$$X\in B_0=H_1\times\mathbf{K}\times H_m\subset R^{nm}.$$

Графу $G(X_1,\mathbf{K},X_m)$ зіставляємо вектор-функцію

$$\overline{q(X)}=(P_1(X),\mathbf{K},P_m(X)):\quad B_0\to\overset{\vee}{R}{}^m.\qquad(2)$$

Задачу мінімізації по максимуму

$$\overline{q(X)}\ \xrightarrow[\substack{\le\\ \max}]{X\in B_0}\ \min\qquad(3)$$

будемо називати змішаною.

<u>Теорема 1</u>. *Змішана задача мінімізації по максимуму* (3) *має єдиний розв'язок.*

Доведення. Існування розв'язку гарантує теорема 6.1 із [1, 2]. Припустимо, що $X,Y\in B_0$ два різних розв'язки задачі (3). В силу умови $H_i\cap H_0=\varnothing$, всі компоненти X_i розв'язку задачі (3) належать $\mathrm{Fr}\,H_i$. А отже, згідно із строгою опуклістю компактів H_i і теоремою 6.2 із [1, 2], точка $Z=\lambda X+(1-\lambda)Y,\quad \lambda\in[0,1]$, також буде розв'язком задачі (3), а всі компоненти її — $Z_i=\lambda X_i+(1-\lambda)Y_i\in\mathrm{Int}\,H_i$, що суперечливо.

Для задачі (3) означимо споріднену з нею стратегічну гру гравців із множини $I=\{1,\mathbf{K},m\}$, канонічні правила вибору стратегій в якій визначаємо так, як і в §11 із [1, 2]:

$$X_i=C_i(\mathbf{X}_i):=\arg\min\{P_i(W_i,\mathbf{X}_i)\mid W_i\in H_i;\mathbf{X}_i\in\mathbf{H}_i\}:\mathbf{H}_i\to H_i,$$

де $\mathbf{H}_i=\underset{j=1,j\ne i}{\overset{j=m}{\mathrm{X}}}H_j$. Однозначність відображення $C_i(\mathbf{X}_i)$ випливає із опуклості компакта H_i та строго явної квазіопуклості опуклої функції $P_i(W_i,\mathbf{X}_i):\quad H_i\to R_+$. Відображення

$$\overline{C(X)}=(C_1(\mathbf{X}_1),\mathbf{K},C_i(\mathbf{X}_i),\mathbf{K},C_m(\mathbf{X}_m)):\quad B_0\to B_0$$

за теоремою Брауера, має нерухому точку – узгоджену мультистратегію $X^0=(X_1^0,\mathbf{K},X_m^0)\equiv\overline{C(X^0)}$. Позначаємо означену гру, так як і в §11 із [1, 2], символом $\Gamma(I,B_0)$. Множину узгоджених мультистратегій цієї гри позначаємо через $\mathbb{A}$. Неважко, аналогічно доведенню теореми 11.1 із [1, 2], переконатися в правильності наступного твердження.

<u>Теорема 2</u>. *Розв'язок задачі* (3) – $B_{\min}^0$ *є узгодженою мультистратегією для гравців гри* $\Gamma(I,B_0)$; $B_{\min}^0\in\text{À}$.

2. Метод розв'язування змішаної задачі мінімізації по максимуму. Формуємо оціночну функцію

$$\varphi(X) = \bigvee_{i=1}^{i=m} P_i(X) \quad : \quad R^{nm} \to R_+ . \qquad (4)$$

Функція (4) опукла вниз в просторі R^{nm}, а отже, на опуклому компакті $B_0 = \mathop{X}\limits_{i=1}^{i=m} H_i$ досягає свого мінімального значення. Нехай $\Phi_{min} = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(X) \mid X \in B_0\}$. Зрозуміло, що $B^0_{min} \in \Phi_{min}$. Нехай $B^0_{min} = (X_1, \mathbf{K}, X_i, \mathbf{K} X_m)$, а $\overrightarrow{q(B^0_{min})}_{max} = \left(b^1_1, \mathbf{K}\, b^1_{\mu(1)}; \mathbf{K}; b^k_1, \mathbf{K}\, b^k_{\mu(k)}\right)$ є мінімальний по максимуму вектор на B_0; тут $\sum\limits_{i=1}^{i=k}\mu(i) = m$, $b^i_\delta > b^j_\pi$ при $i < j$, $b^i_\delta = b^i_\pi$. Припустимо, не обмежуючи загальності наших міркувань, що $\operatorname{mes} X_1 = \mathbf{K} = \operatorname{mes} X_{\mu(1)} = b^1_1$ $\left(\operatorname{mes} X_i := P_i(X) = \bigvee\limits_{j=1}^{j=m} h_{ij}(X_i, X_j)\right)$.

Позначаємо підмножину $\{X_1, \mathbf{K}, X_{\mu(1)}\}$ через B^* і назвемо її **базою** розв’язку X задачі (3).

<u>**Теорема 3**</u>. *Множина* $\Phi_{min} = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(X); X \in B_o\}$ *є множиною ізоморфних матроїдів* [3] *із спільною базою* $B^* = \{X_1, \mathbf{K}, X_{\mu(1)}\}$, *міра компонент якої дорівнює* $b^1_1 = \min\limits_{X\in B_0} \varphi(X)$. *Компоненти бази* B^* *є узгоджені стратегії гравців* $I_{\mu(1)} = \{1, \mathbf{K}, \mu(1)\}$ *гри* $\Gamma(I, B_0)$.

Доведення. Правильність твердження випливає із теорем 1 і 2.

Таким чином, першим кроком у відшукуванні розв’язку задачі (3) є знаходження будь-якого розв’язку $U = (U_1, \mathbf{K}, U_m)$ задачі

$\varphi(X) \xrightarrow[X\in B_0]{} \min$. Нехай $\overrightarrow{q(U)}_{max} = \left(\beta^1_1, \mathbf{K}\beta^1_{\eta(1)}; \mathbf{K}; \beta^p_1, \mathbf{K}\beta^p_{\eta(p)}\right)$, тут

$\sum\limits_{i=1}^{i=p}\eta(i) = m$, $\beta^i_\delta > \beta^j_\pi$ при $i < j$, $\beta^i_\delta = \beta^i_\pi$ при $\forall \delta, \pi \in \{1, \mathbf{K}, \eta(i)\}$.

Позначаємо через E^* підмножину компонент розв’язку $U = (U_1, \mathbf{K}, U_m)$, міра яких дорівнює β^1_1; отже,

$$E^* = \{U_{i_1}, \mathbf{K}, U_{i_{\eta(1)}}\}, \quad I_{\eta(1)} = \{i_1, \mathbf{K}, i_{\eta(1)}\} \subset \{1, \mathbf{K}, m\}.$$

Виділимо із E^* компоненти бази B^*. Для цього необхідно компоненти множини $E^* = \{U_{i_1}, \mathbf{K}, U_{i_{\eta(1)}}\}$ перевірити на узгодженість, тобто необхідно розв’язати (при $\eta(1) > 1$) $\eta(1)$ задачі:

$$P_i(U_1, \mathbf{K}, U_{i-1}, X_i, U_{i+1}, \mathbf{K}, U_m) \xrightarrow[X_i \in H_i]{} \min,$$
$$i \in \{i_1, \mathbf{K}, i_{\eta(1)}\}.$$

Зауважуємо, що ці задачі мають єдині розв’язки X^*_i, і тільки ті із них формують базу B^*, для яких

$$P_i(U_1, \mathbf{K}, U_{i-1}, X^*_i, U_{i+1}, \mathbf{K}, U_m) = \min_{X\in B_0} \varphi(X) = \beta^1_1.$$

Наступним кроком у пошуку решти компонент розв’язку X задачі (3) буде перехід до її еквівалентної редукції (див. теорема 7.2 із [1, 2])

$$\overline{q_1(X_1, \mathbf{K}, X_{\mu(1)}, X_{\mu(1)+1}, \mathbf{K}, X_m)} \xrightarrow[\underset{max}{\le}]{(X_{\mu(1)+1}, \mathbf{K}, X_m) \in D_{\mu(1)+1} \times \mathbf{K} \times D_m} \min, \text{ де}$$

$$\overline{q_1(Y)} = \left(P_{\mu(1)+1}(Y), \mathbf{K}, P_m(Y)\right), \quad Y = (X_1, \mathbf{K}, X_{\mu(1)}, X_{\mu(1)+1}, \mathbf{K}, X_m).$$

Зрозуміло, що після скінченного числа цих редукцій ми і встановимо розв’язок задачі (3).

Зауваження. *Зважаючи на те, що компоненти* X_i *при* $\forall i = \overline{1, m}$ *розв’язку X належать* $\operatorname{Fr} H_i$, *то у випадку наявності параметричних зображень:* $\operatorname{Fr} H_i : \begin{cases} X_i = \left(x^i_1(S_i), \mathbf{K}, x^i_n(S_i)\right), \\ S_i = \left(t^i_1, \mathbf{K}, t^i_{n-1}\right) \end{cases} : T_i \to \operatorname{Fr} H_i$ *,бажано при реалізації обчислювального процесу зробити заміну декартових координат* $X_i = (x^i_1, \mathbf{K}, x^i_n) \to S_i = (t^i_1, \mathbf{K}, t^i_{n-1})$.

На конкретному прикладі проілюструємо в системі комп’ютерної математики MathCAD 2001 Premium обчислювальний процес описаного методу пошуку розв’язка змішаної багатокритеріальної задачі мінімізації по максимуму.

3. Будівництво мосту. Мерія міста ℵ , уступаючи настійним вимогам населення, планує будівництво мосту B через річку, попередньо визначившись лише, що міст буде розташований на її прямолінійній ділянці [A1, A2] (рис. 1). З конкретним місцем розташування мосту на ділянці [A1, A2] мерія вирішила визначитися після попередньої диверсифікації навколишнього району. З цією метою мерія виділяє безоплатно для спорудження торгово-виробничих і спортивно-розважальних комплексів зацікавленому синдикату із п'яти учасників п'ять земельних ділянок $H1,\mathbf{K},H5$, але синдикат зобов'язаний буде профінансувати (певна річ, після визначення конкретного місця розташування мосту) будівництво комунікаційної мережі між цими комплексами (рис. 1).

В своїй оферті до синдикату мерія обумовила можливі мінімальні фінансові витрати на умовну одиницю відстані комунікаційної мережі:

1) від ділянки Н1 до мосту В – 2 умовні одиниці,
2) від Н2 до мосту – 2.5 умовні одиниці,
3) від Н3 до мосту – 1.5 умовні одиниці,
4) від Н4 до мосту – 2 умовні одиниці,
5) від Н5 до мосту – 1.2 умовні одиниці.

Приставши на пропозицію мерії, синдикат вирішив, що кожний із учасників проекту попередньо сплатить пайовий внесок за виділену йому земельну ділянку, який повинен дорівнювати максимальним віртуальним витратам на спорудження прилеглої до земельної ділянки частини комунікаційної мережі.

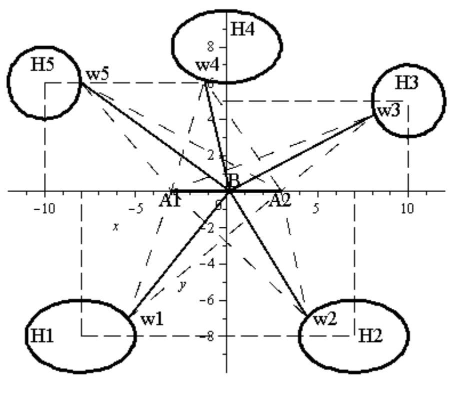

Рис. 1

Маючи намір мінімізувати витрати на спорудження комунікаційної мережі, синдикат для отримання більш детальної інформації з цього питання звертається до спеціалізованої інжинірингової фірми. Уявімо себе виконавцями цього замовлення.

Формалізуємо задачу, яка постає перед нами. В опорному просторі (XOY), в який занурені координатні простори $R^2(1),\mathbf{K},R^2(5)$ із відповідними плинними точками $w1(x1,y1),\mathbf{K},w5(x5,y5)$, визначаємо ділянки $H1,\mathbf{K},H5$:

$$H1:\frac{(x1+8)^2}{9}+\frac{(y1+8)^2}{4}\le 1,\quad H2:\frac{(x2-7)^2}{9}+\frac{(y2+8)^2}{4}\le 1,$$

$$H3:(x3-10)^2+(y3-5)^2\le 4,\quad H4:\frac{x4^2}{9}+\frac{(y4-8)^2}{4}\le 1,$$

$$H5:(x5+10)^2+(y5-6)^2\le 4.$$

Траковим відрізкам віртуальної комунікаційної мережі зіставляємо, відповідно, функції:

$$d11(w1)=2\sqrt{(x1+3)^2+y1^2},\ d12(w1)=2\sqrt{(x1-3)^2+y1^2},$$

$$d21(w2)=2.5\sqrt{(x2+3)^2+y2^2},\ d22(w2)=2.5\sqrt{(x2-3)^2+y2^2},$$

$$d31(w3)=1.5\sqrt{(x3+3)^2+y3^2},\ d32(w3)=1.5\sqrt{(x3-3)^2+y3^2},$$

$$d41(w4)=2\sqrt{(x4+3)^2+y4^2},\ d42(w4)=2\sqrt{(x4-3)^2+y4^2},$$

$$d51(w5)=1.2\sqrt{(x5+3)^2+y5^2},\ d52(w5)=1.2\sqrt{(x5-3)^2+y5^2}.$$

Віртуальним ребрам графа $G(w1,w2,w3,w4,w5)$ (див. рис. 1) зіставляємо, відповідно, реберні функції:

$$h13(w1,w3)=\max(d11(w1)+d31(w3),d12(w1)+d32(w3)),$$
$$h23(w2,w3)=\max(d21(w2)+d31(w3),d22(w2)+d32(w3)),$$
$$h14(w1,w4)=\max(d11(w1)+d41(w4),d12(w1)+d42(w4)),$$
$$h24(w2,w3)=\max(d21(w2)+d41(w4),d22(w2)+d42(w4)),$$
$$h15(w1,w5)=\max(d11(w1)+d51(w5),d12(w1)+d52(w5)),$$
$$h23(w2,w3)=\max(d21(w2)+d51(w5),d22(w2)+d52(w5)).$$

Вершинам $w1,w2,w3,w4,w5$ графа $G(w1,\mathbf{K},w5)$ зіставляємо, відповідно, критеріальні функції:

$$P1(w1,w3,w4,w5)=\max(h13(w1,w3),h14(w1,w4),h15(w1,w5)),$$
$$P2(w2,w3,w4,w5)=\max(h23(w2,w3),h24(w2,w4),h25(w2,w5)),$$
$$P3(w1,w2,w3)=\max(h13(w1,w3),h23(w2,w3)),$$
$$P4(w1,w2,w4)=\max(h14(w1,w4),h24(w2,w4)),$$
$$P5(w1,w2,w5)=\max(h15(w1,w5),h25(w2,w5)).$$

Самому графу $G(w1,\mathbf{K},w5)$ ставимо у відповідність векторну критеріальну функцію

$$\overrightarrow{q(w1,\mathbf{K},w5)}=(P1(w1,w3,w4,w5),\mathbf{K},P5(w1,w2,w5)).$$

Тепер зрозуміло, що наміри синдикату здійсненні, якщо місця забудов $w1,\mathbf{K},w5$ на ділянках $H1,\mathbf{K},H5$ складуть розв'язок змішаної багатокритеріальної задачі мінімізації по максимуму:

$$\overrightarrow{q(w1,\mathbf{K},w5)} \xrightarrow[\substack{\le \\ \max}]{(w1,\mathbf{K},w5)\in B_0=H1\times\mathbf{K}\times H5} \min . \qquad (5)$$

Згідно теореми 1 задача (5) має єдиний розв'язок, причому компоненти цього розв'язка $w1,\mathbf{K},w5$ належать, відповідно, межам ділянок $H1,\mathbf{K},H5$. Зважаючи на те, що:

$$FrH1:\begin{cases} x1(t1)=-8+3\cos(t1), \\ y1(t1)=-8+2\sin(t1); \end{cases} \quad FrH2:\begin{cases} x2(t2)=7+2\cos(t2), \\ y2(t2)=-8+2\sin(t2); \end{cases}$$

$$FrH3:\begin{cases} x3(t3)=10+2\cos(t3), \\ y3(t3)=5+2\sin(t3); \end{cases} \quad FrH4:\begin{cases} x4(t4)=3\cos(t4), \\ y4(t4)=8+2\sin(t4); \end{cases}$$

$$FrH5:\begin{cases} x5(t5)=-10+2\cos(t5), \\ y5(t5)=6+2\sin(t5); \end{cases} \quad ..\ t1,\mathbf{K},t5\in[0,2\pi]=H0,$$

то доцільно буде зробити заміну $(w1,\mathbf{K},w5)\to(t1,\mathbf{K},t5)$. Отже,

$$d11(w1)\equiv d11(t1)=2\sqrt{(x1(t1)+3)^2+y1(t1)^2},$$

$$d12(w1)\equiv d12(t1)=2\sqrt{(x1(t1)-3)^2+y1(t1)^2},$$

$$d21(w2)\equiv d21(t2)=2.5\sqrt{(x2(t2)+3)^2+y2(t2)^2},$$

$$d22(w2)\equiv d22(t2)=2.5\sqrt{(x2(t2)-3)^2+y2(t2)^2},$$

$$d31(w3)\equiv d31(t3)=1.5\sqrt{(x3(t3)+3)^2+y3(t3)^2},$$

$$d32(w3)\equiv d32(t3)=1.5\sqrt{(x3(t3)-3)^2+y3(t3)^2},$$

$$d41(w4)\equiv d41(t4)=2\sqrt{(x4(t4)+3)^2+y4(t4)^2},$$

$$d42(w4)\equiv d42(t4)=2\sqrt{(x4(t4)-3)^2+y4(t4)^2},$$

$$d51(w5)\equiv d51(t5)=1.2\sqrt{(x5(t5)+3)^2+y5(t5)^2},$$

$$d52(w5)\equiv d52(t5)=1.2\sqrt{(x5(t5)-3)^2+y5(t5)^2},$$

$$X=(w1,\mathbf{K},w5)\to X(t1,\mathbf{K},t5)=\begin{pmatrix} x1(t1)\,\mathbf{K} & x5(t5) \\ y1(t1)\,\mathbf{K} & y5(t5) \end{pmatrix}.$$

Задача (5) після заміни символьно запишеться так:

$$\overrightarrow{q(t1,\mathbf{K},t5)} \xrightarrow[\substack{\le \\ \max}]{(t1,\mathbf{K},t5)\in B_0^*=H0\times\mathbf{K}\times H0} \min , \qquad (6)$$

де $\overrightarrow{q(t1,t2,t3,t4,t5)} := (\ P1(t1,t3,t4,t5)\quad P2(t2,t3,t4,t5)\quad P3(t1,t2,t3)\quad P4(t1,t2,t4)$

$(t2,t3,t4,t5)\ \ .$

Для характеристики віртуального графа $G(w1,\mathbf{K},w5)$ введемо реберну матрицю суміжності його вершин:

$$M(t1,t2,t3,t4,t5):=\begin{pmatrix} 0 & 0 & h13(t1,t3) & h14(t1,t4) & h15(t1,t5) \\ 0 & 0 & h23(t2,t3) & h24(t2,t4) & h25(t2,t5) \\ h13(t1,t3) & h23(t2,t3) & 0 & 0 & 0 \\ h14(t1,t4) & h24(t2,t4) & 0 & 0 & 0 \\ h15(t1,t5) & h25(t2,t5) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Формуємо і матрицю віртуальних внесків:

$$K(t1,t2,t3,t4,t5):=\begin{pmatrix} d11(t1) & d21(t2) & d31(t3) & d41(t4) & d51(t5) \\ d12(t1) & d22(t2) & d32(t3) & d42(t4) & d52(t5) \end{pmatrix}.$$

Формуємо функції і вектор пайового внеску:

$$b1(t1):=\max(d11(t1),d12(t1)) \qquad b2(t2):=\max(d21(t2),d22(t2))$$

$$b3(t3):=\max(d31(t3),d32(t3)) \qquad b4(t4):=\max(d41(t4),d42(t4))$$

$$b3(t3):=\max(d31(t3),d32(t3)) \qquad b4(t4):=\max(d41(t4),d42(t4))$$

$$b5(t5):=\max(d51(t5),d52(t5))$$

\`

Зрозуміло, формуємо також і оціночну функцію:

$$F(t1,t2,t3,t4,t5)=\max\begin{pmatrix} P1(t1,t3,t4,t5),P2(t2,t3,t4,t5),P3(t1,t2,t3), \\ P4(t1,t2,t4),P5(t1,t2,t5) \end{pmatrix}$$

Розв'язування. Вибираємо довільним чином початкове розміщення вершин графа $G(w1,\mathbf{K},w5)$:

$$t1 := 0 \qquad t2 := \frac{\pi}{2} \qquad t3 := \pi \qquad t4 := \frac{3\pi}{2} \qquad t5 := 0\ .$$

Знаходимо розв'язок задачі

$$F(t1,\mathbf{K},t5) \xrightarrow[(t1,\mathbf{K},t5)\in B_0^{*}=H0\times\mathbf{K}\times H0]{} \min\ .$$

Given

$$0 \le t1 \le 2\pi \qquad 0 \le t2 \le 2\pi \qquad 0 \le t3 \le 2\pi$$

$$0 \le t4 \le 2\pi \qquad 0 \le t5 \le 2\pi$$

$$Q := \mathrm{Minimize}(F, t1, t2, t3, t4, t5)$$

$$Q^T = (\,0 \quad 2.586 \quad 3.509 \quad 4.712 \quad 0\,)$$

$$t1 := Q_{1,1} \quad t2 := Q_{2,1} \quad t3 := Q_{3,1} \quad t4 := Q_{4,1} \quad t5 := Q_{5,1}$$

$$t1 = 0 \qquad t2 = 2.586 \qquad t3 = 3.509 \qquad t4 = 4.712 \qquad t5 = 0$$

$$Q^T = (\,0 \quad 2.586 \quad 3.509 \quad 4.712 \quad 0\,)$$

$$M(t1,t2,t3,t4,t5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 34.385 & 36.044 & 37.663 \\ 0 & 0 & 43.358 & 38.882 & 34.837 \\ 34.385 & 43.358 & 0 & 0 & 0 \\ 36.044 & 38.882 & 0 & 0 & 0 \\ 37.663 & 34.837 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, визначилась база розв'язку задачі (6):

$$X(t1,t2,t3,t4,t5)^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 4.452 \\ -6.945 \end{pmatrix} \qquad X(t1,t2,t3,t4,t5)^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 8.133 \\ 4.282 \end{pmatrix}$$

– це вершини $w2(x2(t2),\, y2(t2))$ і $w3(x3(t3),\, y3(t3))$.

Для пошуку решти компонент розв'язку задачі (6) переходимо до її еквівалентної редукції:

$$\overrightarrow{q(t1, 2.586, 3.509, t4, t5)} \xrightarrow[\underset{\max}{\le}]{(t1,t4,t5)\in H0\times H0\times H0} \min\ . \qquad (7)$$

Формуємо для неї оціночну функцію –

$$F1(t1,t2,t3,t4,t5) := \max(P1(t1,t3,t4,t5),\, P4(t1,t2,t4),\, P5(t1,t2,t5))$$

і знаходимо розв'язок задачі:

$$F1(t1,\mathbf{K},t5) \xrightarrow[(t1,t4,t5)\in H0\times H0\times H0]{} \min\ .$$

Given

$$0 \le t1 \le 2\pi \qquad t2 = 2.586 \qquad t3 = 3.509$$

$$0 \le t4 \le 2\pi \qquad 0 \le t5 \le 2\pi$$

$$G := \mathrm{Minimize}(F1, t1, t2, t3, t4, t5)$$

$$G^T = (\,0 \quad 2.586 \quad 3.509 \quad 4.3 \quad 0\,)$$

$$t1 := G_{1,1} \quad t2 := G_{2,1} \quad t3 := G_{3,1} \quad t4 := G_{4,1} \quad t5 := G_{5,1}$$

$$t1 = 0 \qquad t2 = 2.586 \qquad t3 = 3.509 \qquad t4 = 4.3 \qquad t5 = 0\ .$$

$$\overrightarrow{q(t1,t2,t3,t4,t5)} = (\,37.663 \quad 43.358 \quad 43.358 \quad 38.314 \quad 37.663\,)$$

$$M(t1,t2,t3,t4,t5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 34.385 & 37.553 & 37.663 \\ 0 & 0 & 43.358 & 38.314 & 34.837 \\ 34.385 & 43.358 & 0 & 0 & 0 \\ 37.553 & 38.314 & 0 & 0 & 0 \\ 37.663 & 34.837 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, місце розташування забудови

$$w4(x4(t4),\, y4(t4)) = X(t1,t2,t3,t4,t5)^{\langle 4\rangle} = \begin{pmatrix} -1.202 \\ 6.168 \end{pmatrix}$$

також визначилось.

Переходимо тепер до знаходження розв'язка еквівалентної редукції задачі (7) (зрозуміло, що і задачі (6)):

$$\overrightarrow{q(t1, 2.586, 3.509, 4.3, t5)} \xrightarrow[\substack{\le \\ \max}]{(t1,t5)\in H0\times H0} \min . \qquad (8)$$

Формуємо для неї оціночну функцію

$$F2(t1, t2, t3, t4, t5) := \max(P1(t1, t3, t4, t5), P5(t1, t2, t5)).$$

Знаходимо розв'язок задачі

$$F2(t1, \mathbf{K}, t5) \xrightarrow[(t1,t5)\in H0\times H0]{} \min :$$

Given

$0 \le t1 \le 2\pi \qquad t2 = 2.586 \qquad t3 = 3.509$

$t4 = 4.3 \qquad 0 \le t5 \le 2\pi$

$D := \mathrm{Minimize}(F2, t1, t2, t3, t4, t5)$

$D^T = (\,0.51 \;\; 2.586 \;\; 3.509 \;\; 4.3 \;\; 0\,)$

$t1 := D_{1,1} \quad t2 := D_{2,1} \quad t3 := D_{3,1} \quad t4 := D_{4,1} \quad t5 := D_{5,1}$.

$t1 = 0.51 \qquad t2 = 2.586 \qquad t3 = 3.509 \qquad t4 = 4.3 \qquad t5 = 0$

$$\overrightarrow{q(t1, t2, t3, t4, t5)} = (\,36.907 \;\; 43.358 \;\; 43.358 \;\; 38.314 \;\; 36.907\,)$$

$$\overrightarrow{q(t1, t2, t3, t4, t5)} = (\,36.907 \;\; 43.358 \;\; 43.358 \;\; 38.314 \;\; 36.907\,)$$

$$M(t1, t2, t3, t4, t5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32.727 & 36.798 & 36.907 \\ 0 & 0 & 43.358 & 38.314 & 34.837 \\ 32.727 & 43.358 & 0 & 0 & 0 \\ 36.798 & 38.314 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K(t1, t2, t3, t4, t5) = \begin{pmatrix} 14.834 & 25.465 & 17.893 & 12.849 & 9.372 \\ 21.871 & 17.738 & 10.027 & 14.927 & 15.036 \end{pmatrix}$$

$$X(t1, t2, t3, t4, t5) = \begin{pmatrix} -5.381 & 4.451 & 8.133 & -1.202 & -8 \\ -7.024 & -6.945 & 4.282 & 6.168 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{T(t1, t2, t3, t4, t5)} = (\,21.871 \;\; 25.465 \;\; 17.893 \;\; 14.927 \;\; 15.036\,) .$$

Отже, як бачимо, визначились і місця розташування забудов w1,w5, і величини пайових внесків. Згідно теорем 1 і 2, єдиним розв'язком задачі (5) буде точка

$$B^0_{\min} = \begin{pmatrix} w1(-5.381, -7.024), w2(4.451, -6.945), \\ w3(8.133, 4.282), w4(-1.202, 6.168), w5(-8, 6) \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

якій відповідає мінімальний по максимуму вектор

$$\overrightarrow{q(B^0_{\min})} = (36.907, 43.358, 43.358, 38.314, 36.907) .$$

Таким чином, якщо учасники проекту зголошуються на розміщення своїх забудов на ділянках $H1, \mathbf{K}, H5$ згідно розв'язка $B^0_{\min}$, то фірма може порадити синдикату створити фонд фінансування будівництва комунікаційної мережі в сумі

$$TS := \sum \overrightarrow{T(t1, t2, t3, t4, t5)} \qquad TS = 95.191 .$$

Пайові внески в цей фонд розподіляються згідно табл. 1.

Таблиця 1

H1	21.871
H2	25.465
H3	17.893
H4	14.927
H5	15.036
TS	95.191

Зрозуміло, що ці пайові внески є надлишковими. Надлишок може бути повернутим після того, як мерія визначиться із місцем розташування мосту **B**. Наприклад, нехай мерія, після диверсифікації навколишнього району, воліє розмістити міст **B** так, щоб була мінімізована загальна сума внеску синдикату на будівництво комунікаційної мережі $G(w1, \mathbf{K}, w5)$ (такі собі альтруїстичні мотиви мерії по відношенню до синдикату). Формуємо функцію $S(x)\colon\ [-3, 3] \to R_+$ – величини внеску синдикату на будівництво комунікаційної мережі в залежності від місця розташування мосту **B**. Паї учасників проекту:

$$b1(x) := 2\sqrt{(x+5.381)^2 + 7.024^2} \qquad b2(x) := 2.5\sqrt{(x-4.451)^2 + 6.945^2}$$

$$b3(x) := 1.5\sqrt{(x-8.133)^2 + 4.282^2} \qquad b4(x) := 2\sqrt{(x+1.202)^2 + 6.168^2}$$

Функція і вектор функція пайових внесків:

$$S(x) := b1(x) + b2(x) + b3(x) + b4(x) + b5(x) \; ;$$

При довільному виборі початкового значення x, нехай x = 0, знаходимо розв'язок задачі $S(x) \xrightarrow[x\in[-3,\,3]]{} \min$. Зауважимо, що, в силу опуклості функції S(x), цей розв'язок єдиний.

$$\text{Given} \quad -3 \le x \le 3$$

$$B := \mathrm{Minimize}(S, x) \qquad B = 0.158$$

$$x := B \qquad x = 0.158 \quad S(x) = 76.665$$

$$\overrightarrow{SS(x)} = (\,17.891 \;\; 20.411 \;\; 13.577 \;\; 12.632 \;\; 12.153\,).$$

Отже, учасники проекту будуть мати в цьому випадку „економію" своїх фінансів:

$$\overrightarrow{T(t1, t2, t3, t4, t5)} - \overrightarrow{SS(x)} = (\,3.98 \;\; 5.054 \;\; 4.315 \;\; 2.294 \;\; 2.883\,) \;,$$

$$TS - S(x) = 18.527 \;.$$

Заключний висновок. Отримані вище результати по дослідженню багатокритеріальної оптимізаційної моделі разом із результатами, викладеними в розділі 5 із [1, 2], безумовно, знадобляться в конкретній практиці інженерного проектування і саме там, де присутність фактора невизначеності його учасників із прийняттям рішення є суттєвим.

Список літератури: 1.*Вісс.Гр.Клименко*. Багатокритеріальні формалізації. Харків, СПДФО Яковлєва Г.Г., 2004. – 308 с. **2.***Вісс.Гр.Клименко*. Задачі багатокритеріальної оптимізації. Харків, Бізнес Ін форм, 2001. – 168 с. **3.***В. Липский*. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 216 с. **4**. Whitney H. On the abstract properties of linear independence. // Amer. J. Math., 1935. – № 57. – PP. 509-533.

Поступила в редколегію 23.04.09

УДК 539.3:621.225

А.В. МАРТЫНЕНКО, преподаватель-стажер каф. „ТММиСАПР"
НТУ „ХПИ"

К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИДРООБЪЕМНЫХ ПЕРЕДАЧ

Робота присвячена питанням дослідження гідрооб'ємних передач. Запропоновано удосконалену числову модель взаємодії елементів передачі. Модель втілена у вигляді програмного продукту, за допомогою якого проведено дослідження і наведені їх результати. Також розглянуто експериментальні дослідження масштабної моделі насосу гідропередачі.

Paper deals with the investigation of hydrovolumetric transmission. New improved numerical model is offered. This model was implemented into software program, used for numerical studies. Results are given and examined. Experimental study of the hydrovolumetric transmission scale model was conducted and results analyzed.

Введение. Гидроприводы в трансмиссиях транспортных средств получили широкое распространение благодаря своим уникальным характеристикам – удельная мощность, малые относительные габариты, бесступенчатость регулирования скорости передвижения и передаваемого потока мощности от двигателя к исполнительным элементам [1]. Однако промышленность постоянно предъявляет дополнительные, все возрастающие, требования к таким элементам. Появляются задачи по форсированию существующих и созданию новых образцов приводов повышенной мощности с прежними (а чаще меньшими) массогабаритными показателями.

В данной статье рассматривается перспективная гидропередача, предназначенная к установке в гусеничной технике. Наша страна, к большому сожалению, оказалась в роли „догоняющей" относительно применения гидравлических передач, так как все современные, актуальные к применению в реальных условиях, зарубежные машины уже оснащаются гидропередачами. Более того, в механические трансмиссии западной техники гидродинамические передачи стали вводить еще в середине 70-х годов XX века [2]. О преимуществах применения современных гусеничных машин с гидрообъемными трансмиссиями над машинами с обычной трансмиссией можно судить по публикациям, освещающим результаты последних мировых событий, в которых использовалась эта техника [3-5].

С учетом данных факторов, КП „Харьковское конструкторское бюро по машиностроению им. А.А. Морозова" разработало радиальную гидрообъемную передачу ГОП-900. Цель применения такой передачи – повышение тактико-технических характеристик перспективных тяжелых гусеничных машин производства ГП „Завод им. Малышева". Подробное описание конструкции ГОП-900 и основные ее характеристики приведены в работе [6]. Опыт использования данной гидропередачи в реальных условиях показал, что необхо-