УДК 519.8

Вісс. Гр. КЛИМЕНКО, канд. фіз.-мат. наук НТУ “ХПІ”, Харків

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ ПО МАКСИМУМУ НА ОРГРАФІ ПРИ СКАЛЯРНИХ ЗІСТАВЛЕННЯХ

В статті розглядається багатокритеріальна задача мінімізації по максимуму, яка моделює ситуацію по розміщенню точкових об’єктів на орграфових структурах. Встановлюються умови існування єдиного розв’язку поставленої задачі; доводиться еквівалентність поставленої задачі і задачі мінімізації по максимуму для простого неорієнтованого графа. Виклад матеріалу в статті ведеться із використанням термінології і позначень, введених автором в монографіях.

In the paper the multi-objective minimization problem on a maximum, which simulates a situation of arrangement point objects in digraph structures. We establish conditions for existence of a unique solution of the problem; equivalence of the problem and minimization problem on a maximum is proved for a simple undirected graph. The presentation of material in the paper is formulated using the terminology and notations introduced by the author in monographs.

В статье рассматривается многокритериальная задача минимизации по максимуму, которая моделирует ситуацию по размещению точечных объектов на орграфовых структурах. Устанавливаются условия существования единственного решения поставленной задачи; доказывается эквивалентность поставленной задачи и задачи минимизации по максимуму для простого неориентированного графа. Изложение материала в статье ведется с использованием терминологии и обозначений, введенных автором в монографиях.

Постановка задачі мінімізації по максимуму на орграфі при скалярних зіставленнях. Нехай $H=\left\{H_i \mid \overline{i,m}\right\}$ є регулярна сім’я компактів в евклідовому точково-векторному просторі R^n, який умовимось називати для сім’ї H опорним. Зауважуємо, що розмірність афінної оболонки $\dim(\mathrm{aff}\, H)=n$. Кожній множині H_i зіставляємо свій евклідів простір $R^n(i)$, тотожний опорному простору R^n. Позначаємо через B_0 декартовий добуток множин H_i, а через R^{nm} – декартовий добуток просторів $R^n(i)$:

$$B_0 = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m = \mathop{X}_{i=1}^{i=m} H_i, \quad R^{nm} = \mathop{X}_{i=1}^{i=m} R^n(i).$$

Візьмемо плинну точку $X=(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_m)\in B_0$, тут $X_i=(X_1^i,X_2^i,\ldots,X_n^i)\in H_i$, і розглянемо зв’язний, змінний орієнтований граф $G(X)\equiv G(X_1,\ldots,X_i,\ldots X_m)$ (зв’язна основа – граф $G(H)$).

Граф $G(X)$ опишемо за допомогою наступної таблиці суміжності його

вершин:

i/j	X_1	X_2	—	X_j	X_{j+1}	—	X_m
X_1	0	a_{12}	—	a_{1j}	$a_{1,j+1}$	—	$a_{1,m}$
X_2	a_{21}	0	—	a_{2j}	$a_{2,j+1}$	—	$a_{2,m}$
—	—	—	0	—	—	—	—
X_i	a_{i1}	a_{i2}	—	$a_{i,j}$	$a_{i,j+1}$	—	$a_{i,m}$
X_{i+1}	$a_{i+1,1}$	$a_{i+1,2}$	—	$a_{i+1,j}$	0	—	$a_{i+1,m}$
—	—	—	—	—	—	0	—
X_m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	—	$a_{m,j}$	$a_{m,j+1}$	—	0

Відсутність дуги (X_i,X_j) графа $G(X_1,\ldots,X_i,\ldots X_m)$ позначаємо нульовим значенням відповідного цій дузі елемента таблиці. Тут $a_{i,j}$ є значення функції $a_{ij}\left(\left|X_i-X_j\right|\right)$ ($a_{ij}(d)\in\Im$ – множина неперервних, опуклих і строго зростаючих на R_+ функцій), яке приписуємо упорядкованій парі (X_i,X_j) при $i,j=\overline{1,m}$.

Кожній вершині $X_i\in R^n(i)$ змінного графа $G(X_1,\ldots,X_i,\ldots X_m)$, в якості міри, ставимо у відповідність значення функції $P_i(X)\equiv\max\left\{a_{ij}\left(\left|X_i-X_j\right|\right)\middle| j=\overline{1,m}\right\}$. Зрозуміло, що функція $P_i(X)$ неперервна, опукла і строго явно квазіопукла на опуклому компакті H_i, $i=\overline{1,m}$.

Розглянемо для вектор-функції

$$\overrightarrow{q(X)}=\left(P_1(X),\ldots,P_i(X),\ldots,P_m(X)\right) \quad : \quad R^{nm}\to \overset{\vee}{R}{}^m$$

задачу:

$$\overrightarrow{q(X)} \xrightarrow[\underset{\max}{\leq}]{X\in B_0=H_1\times\ldots\times H_m} \min. \qquad \mathbf{(1)}$$

Функції $P_i(X)$ задовольняють умовам теорем 2.1.1, 2.1.2 із $[1]$, тож функція $\overrightarrow{q(X)}$ набуває свого мінімального по максимуму значення на опуклому компакті $B^0_{\min} = \operatorname{Arg}\min\{\overrightarrow{q(X)}; X \in B_0; \underset{\max}{\leq}\} \neq \varnothing$.

Єдиність розв'язку. Перетворимо тепер граф $G(X)$, шляхом умовного ототожнення всіх паралельних дуг графа $G(X)$, тобто дуг спряжених парами суміжних вершин $\{X_i, X_j\}$, на простий неорієнтований граф $G^*(X)$.

Кожному ребру $\{X_i, X_j\}$ зв'язного простого неорієнтованого графа $G^*(X)$ зіставляємо функцію

$$b_{ij}(X_i, X_j) = a_{ij}(|X_i - X_j|) \vee a_{ji}(|X_j - X_i|) : R^n(i) \times R^n(j) \to R_+ .$$

Зауважуємо, що $b_{ij}(X_i, X_j) = b_{ji}(X_j, X_i)$.

Граф $G^*(X)$ опишемо за допомогою наступної таблиці суміжності його вершин:

i/j	X_1	X_2	—	X_j	X_{j+1}	—	X_m
X_1	0	b_{12}	—	b_{1j}	$b_{1,j+1}$	—	$b_{1,m}$
X_2	b_{21}	0	—	b_{2j}	$b_{2,j+1}$	—	$b_{2,m}$
—	—	—	0	—	—	—	—
X_i	b_{i1}	b_{i2}	—	$b_{ij}(X_i, X_j)$	$b_{i,j+1}$	—	$b_{i,m}$
X_{r+1}	$b_{i+1,1}$	$b_{i+1,2}$	—	$b_{i+1,j}$	0	—	$b_{i+1,m}$
—	—	—	—	—	—	0	—
X_m	$b_{m,1}$	$b_{m,2}$	—	$b_{m,j}$	$b_{m,j+1}$	—	0

Кожній вершині $X_i \in R^n(i)$ змінного графа $G^*(X_1, \ldots, X_i, \ldots X_m)$, в якості міри, ставимо у відповідність значення функції

$$P_i^*(X) \equiv \max\left\{b_{ij}(|X_i - X_j|) \,\middle|\, j = \overline{1,m}\right\}.$$

Зрозуміло, що функція $P_i^*(X)$ неперервна, опукла і строго явно квазіопукла на опуклому компакті H_i, $i = \overline{1,m}$.

Розглянемо для вектор-функції

$$\overrightarrow{q^*(X)} = \left(P_1^*(X), \ldots, P_i^*(X), \ldots, P_m^*(X)\right) \quad : \quad R^{nm} \to \overset{\vee}{R}{}^m$$

задачу:

$$\overrightarrow{q^*(X)} \xrightarrow[\underset{\max}{\leq}]{X \in B_0 = H_1 \times \ldots \times H_m} \min . \qquad (2)$$

Задача (2) згідно теореми 2.5.1 із $[2]$ має єдиний розв'язок $B^0_{\min} = \{X^*\}$.

Згідно ж тотожності оціночних функцій для цільових вектор-функцій $\overrightarrow{q^*(X)}$ і $\overrightarrow{q(X)}$:

$$\Psi^*(X) \overset{def}{=} \max\left\{P_i^*(X) \,\middle|\, i = \overline{1,m}\right\} \equiv \underset{i=1,m}{\underline{V}}\ \underset{j=1,m}{\underline{V}}\left(a_{ij}(|X_i - X_j|) \vee a_{ji}(|X_j - X_i|)\right) \equiv$$

$$\underset{i=1,m}{\underline{V}}\left(\underset{j=1,m}{\underline{V}} a_{ij}(|X_i - X_j|) \vee \underset{j=1,m}{\underline{V}} a_{ij}(|X_i - X_j|)\right) \equiv \max\left\{P_i(X) \,\middle|\, i = \overline{1,m}\right\} \overset{def}{=} \Psi(X)$$

випливає правильність наступного твердження.

<u>Теорема 1.</u> *Спряжені багатокритеріальні задачі*:

$$\overrightarrow{q(X)} \xrightarrow[\underset{\max}{\leq}]{X \in B_0 = H_1 \times \ldots \times H_m} \min \qquad (3)$$

і

$$\overrightarrow{q^*(X)} \xrightarrow[\underset{\max}{\leq}]{X \in B_0 = H_1 \times \ldots \times H_m} \min \qquad (4)$$

є еквівалентні.

Заключний висновок. Встановлені і викладені вище теоретичні результати, безумовно, можуть бути затребувані при проектуванні різноманітних мереж із орграфовою структурою.

Список літератури: 1. *Клименко Вісс. Гр.* Багатокритеріальне математичне проектування / *Вісс. Гр. Клименко*. – Харків: Майдан, 2010. – 488 с. **2.** *Клименко Вісс. Гр.* Багатокритеріальна оптимізація на графах / *Вісс. Гр. Клименко*.– Харків: Майдан, 2011. – 548 с.

Надійшла до редакції 23.03.2012