

УДК 539.3

Н.А. ТКАЧУК, докт. техн. наук, проф., зав каф. ТММиСАПР НТУ „ХПИ”, Харьков;

А. Ю. ТАНЧЕНКО, мл. научн. сотр. каф. ТММиСАПР НТУ „ХПИ”, Харьков;

А.Н. ТКАЧУК, канд. техн. наук, асп. каф. строительной механики, университет Штутгарта, Германия;

П.В. ЧУРБАНОВ, нач. бюро КОГКО НТК ЧАО „АзовЭлектроСталь”, Мариуполь;

И.Я. ХРАМЦОВА, научн. сотр. каф. ТММиСАПР НТУ „ХПИ”, Харьков;

О.А. ИЩЕНКО, ст. преподаватель каф. высш. мат-ки, Гос. Таврический агротехнолог. ун-т, Мелитополь

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРОЧНОСТНЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ПРЯМОГО ВОЗМУЩЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Запропоновані методи прямого збурення скінченно-елементних моделей машинобудівних конструкцій для аналізу чутливості їх характеристик до зміни геометричної форми і розмірів. Показана застосовність лінеаризованих моделей до визначення переміщень, напружень і власних частот слабо стоншеної конструкції порівняно з номінальною (початковою).

Предложены методы прямого возмущения конечно-элементных моделей машиностроительных конструкций для анализа чувствительности их характеристик к изменению геометрической формы и размеров. Показана применимость линейризованных моделей к определению перемещений, напряжений и собственных частот слабо утоненной конструкции по сравнению с номинальной (исходной).

The methods of direct indignation of machine-building constructions finite-element models are offered for sensitiveness analysis of their characteristics to change of geometrical form and sizes. Applicability of linearized models is shown for determination of displacements, stresses and eigenfrequencies of weakly thinned construction compared with a nominal (initial).

Введение. При решении задач синтеза параметров машиностроительных конструкций по прочностным, жесткостным или динамическим характеристикам зачастую требуется определить не только реальный набор этих параметров, но и реакцию исследуемой конструкции на их изменение. При этом подразумевается, что сами эти изменения параметров незначительны. Например, на этапе конструирования обоснованные расчетным или экспериментальным путем параметры в силу различных соображений (компоновочных, технологических и т. п.) могут потребовать некоторой корректировки по сравнению с номинальными величинами. На этапе технологической подготовки и собственно производства также могут быть внесены согласованные с конструкторами изменения, обусловленные реальными условиями производителя и потребителей. В свою очередь в ходе эксплуатации может происходить изменение размеров и свойств материалов элементов конструкций (например, утонение вследствие механического, коррозионного или иного вида износа). На этапе же ремонта или реконструкции также могут вноситься изменения в конструкцию по сравнению с исходной.

Таким образом, вместо одного фиксированного объекта на протяжении его жизненного цикла приходится иметь дело с множеством объектов, в какой-то степени отличающихся от исходного, номинального. При этом в первую очередь изменениям подвергаются геометрические размеры, форма, механические и физико-механические свойства объектов. Это, в свою очередь, влечет за собой изменение его прочностных, жесткостных и динамических характеристик, что может быть промоделировано в ходе решения соответствующей задачи математической физики с определенным образом измененным оператором, граничными условиями или областью, занимаемой объектом. Данное изменение в определенных условиях можно рассчитать, привлекая аппарат теории возмущений [1, 2]. При малых изменениях параметров тенденции изменения контролируемых характеристик отражаются в соответствующих компонентах чувствительности [3-6]. В данном случае получаем в линейризованном виде отклик системы на изменение ее параметров.

Как правило, в настоящее время исследуемые машиностроительные конструкции моделируются в виде континуальных систем. Таким образом, возмущение параметров данных объектов исследований трансформируется в изменение (см. выше) соответствующего оператора задачи, граничных условий или области, в которой рассматривается задача, – то есть и исходная по-

становка, и задача в возмущениях являются бесконечномерными. Учитывая, что в реальности для анализа таких систем применяются численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ) [7], то для анализа чувствительности придется проводить дискретизацию всех типов задач. Однако уравнение метода конечных элементов имеют прямую явную аналогию с рассматриваемым физико-механическим процессом или состоянием для дискретной системы, образуемой при дискретизации исходной задачи. В связи с этим возникает идея применить подходы теории возмущений к уже дискретизированной системе разрешающих уравнений.

Постановка задачи. Целью работы является математическая постановка задачи анализа чувствительности прочностных, жесткостных и спектральных характеристик механических систем к изменению их размеров и геометрической формы путем исследования решений на дискретизированных (с помощью МКЭ) соответствующих моделях путем их прямого малого конечного возмущения. Таким образом, минуя этапы перехода от континуальной к дискретной форме, можно сразу же обратиться к анализу следующих систем уравнений МКЭ [7, 8]:

$$K \cdot x = f; \quad (1) \quad M\ddot{x} + Kx = 0; \quad (2) \quad \text{Det}(K - \omega^2 M) = 0. \quad (3)$$

Здесь x – массив узловых неизвестных, K – матрица жесткости конечно-элементного ансамбля, M – матрица масс, f – массив внешних нагрузок, ω^2 – собственные частоты динамической системы.

Заметим, что система уравнений (1) описывает так называемую задачу структурного анализа (то есть определения напряженно-деформированного состояния (НДС) исследуемого объекта под действием системы статических сил f). Уравнения (2) соответствуют свободным движениям динамической системы, а (3) – определению ее спектральных свойств, то есть собственных частот ω_i , ($i = 1, 2, \dots$) (ω_i^2 – собственные числа (3)).

Общий подход к решению задачи. В соответствии с предложенным подходом сформулируем возмущения данных величин в терминах x , K , M , f , ω^2 . Для этого рассмотрим механизм формирования и определения данных величин. Массив неизвестных x из задачи (1) формально определяется при помощи обратной матрицы K^{-1} :

$$x = K^{-1} f. \quad (4)$$

В данном случае массив нагрузок f формируется из заданных внешних сил путем распределения их по соответствующим степеням свободы. Спектр собственных частот ω_i , как отмечалось, определяется как набор корней (3).

Естественно, что базовыми возмущаемыми величинами являются матрицы K , M . Рассмотрим их изменения и влияния на решения (1), (3) на примере утонения элементов исследуемого объекта. При этом отвлечемся от механизма процесса

утонения, сосредоточив внимание на текущем состоянии, пренебрегаем также динамикой процесса утонения как существенно более медленного процесса.

Тогда введем в рассмотрение операцию сборки O , которая по координатам узлов (то есть матрице координат U) и матрице элементов C (то есть списку узлов, входящих в образуемые ими конечные элементы) производит формирование матриц K и M :

$$K = O(k^e), \quad e = 1, \dots, N_e \quad (5) \quad M = O(m^e), \quad e = 1, \dots, N_e, \quad (6)$$

где k^e , m^e – матрицы жесткости и масс отдельных конечных элементов, число которых в ансамбле N_e [7, 8].

Операция O как бы «наслаивает» в соответствующих ячейках матриц K и M влияние от всех конечных элементов. Проанализируем влияние изменений свойств отдельных элементов на компоненты k^e , m^e , а затем, проведя операцию сборки, оценим общий эффект на матрицах K , M .

«Точечные» конечные элементы. Если в конечно-элементном ансамбле существует некоторое количество масс и жесткостей, сосредоточенных в отдельных узлах, то их можно описать массами m , жесткостями c , моментами инерции I и крутильными жесткостями c_ϕ .

Для соответствующих степеней свободы (на рис. 1 – соответственно линейное перемещение вдоль оси x и поворот вокруг нее) элементами матриц k^e , m^e являются:

$$m_{**}^e = m; \quad m_{**}^e = I, \quad (7) \quad k_{**}^e = c; \quad k_{**}^e = c_\phi. \quad (8)$$

При утонении масса (момент инерции) и жесткости уменьшаются:

$$m^e = m_0^e(1 - \alpha), \quad (9) \quad k^e = k_0^e(1 - \alpha), \quad (10)$$

где m_0^e , k_0^e соответствуют номинальным (неутоненным) состояниям, $\alpha \in [0; 1]$ – коэффициент утонения.

Таким образом, элементы матриц жесткости и масс будут состоять из двух компонент:

$$k_{ij} = k_{ij}^{(0)} - \alpha k_{ij}^{(e)}, \quad m_{ij}^{(e)} = m_{ij}^{(0)} - \alpha m_{ij}^{(e)}, \quad (11)$$

то есть текущее состояние определяется в зависимости от коэффициента $\alpha = \alpha(t)$. При этом данный коэффициент может меняться от узла к узлу, может быть разным для масс и жесткостей в одном узле. Важной особенностью является то, что при $\alpha \ll 1$ компоненты матриц K и M состоят из 2-х слагаемых: первая соответствует компонентам «номинальных» матриц K , M (то есть

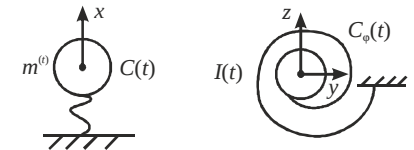


Рис. 1. Изменение массово-жесткостных свойств сконденсированных точечных элементов

$K(0)$, $M(0)$), а вторая образуется путем операции сборки из матриц, все компоненты которых являются линейными комбинациями «номинальных» матриц с малыми коэффициентами α . Тогда:

$$K(\alpha) = K_0 - K_0', \quad (12) \quad M(\alpha) = M_0 - M_0'. \quad (13)$$

Здесь в K_0 , M_0 сосредоточены компоненты, не зависящие от α , а в K_0' , M_0' – зависящие от них линейно.

Линейные конечные элементы. При формировании матриц жесткости и масс стержневых конечных элементов (рис. 2) обычно выделяются слагаемые от растяжения-сжатия, изгиба и кручения.

Тогда для степени свободы u , то есть растяжения-сжатия (см. рис. 2), соответствующий коэффициент матрицы жесткости пропорционален площади сечения F [7]

$$k_{**}^e = C_i F = C_i \int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi, t) d\varphi, \quad (14)$$

где C_i – здесь и далее – некоторые не зависящие от геометрической формы и размеров сечения величины. Тогда, обозначая через α степень изменения площади от «номинальной» F^0 , то есть

$$\alpha = \frac{\Delta F}{F^0} = \frac{F^0 - F(t)}{F^0}, \quad (15)$$

получаем:

$$k_{**}^e = k_{**}^{e0}(1 - \alpha). \quad (16)$$

Аналогично

для m_{**}^e :

$$m_{**}^e = m_{**}^{e0}(1 - \alpha). \quad (17)$$

Для случая кручения, учитывая, что

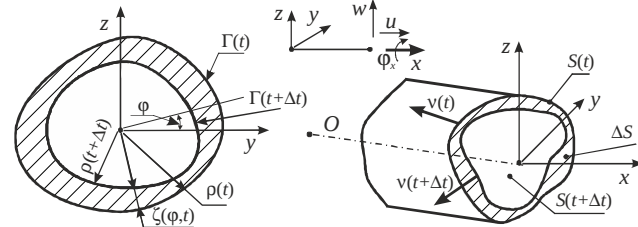


Рис. 2. Утонение поперечного сечения стержня

$$\alpha = 2 \int_0^{2\pi} \rho_0^2 \left(\frac{\zeta}{\rho_0} \right) d\varphi / \int_0^{2\pi} \rho_0^2 d\varphi, \quad (18)$$

ищем для относительного изменения полярного момента инерции поперечного сечения

$$\gamma = \frac{I_0^p - I^p(\alpha)}{I_0^p} = C_3 \left\{ \int_0^{2\pi} \rho_0^4 \left(\frac{\zeta}{\rho_0} \right) d\varphi / \int_0^{2\pi} \rho_0^4 d\varphi \right\}. \quad (19)$$

$$\text{Заклучив величину } \varepsilon = (\zeta/\rho_0) \text{ в границы } 2m \leq \varepsilon \leq 2M, \quad (20)$$

$$\text{получаем для оценки } \gamma: \quad C_3 m \leq \gamma \leq C_3 M. \quad (21)$$

$$\text{Таким образом, } \gamma = n\alpha, \quad n \in [C_3/2; C_3 M/2m], \quad (22)$$

n – конечное, компоненты матриц M и K выразятся через компоненты M_0 , K_0

$$k_{**}^e = k_{**}^{e0}(1 - n\alpha). \quad (23) \quad m_{**}^e = m_{**}^{e0}(1 - n\alpha). \quad (24)$$

Аналогичные соображения могут быть применимы и для «изгибных» компонент матриц жесткости и масс. Получаемые в этом случае зависимости аналогичны (23), (24). При этом коэффициенты n в данных соотношениях зависят от вида окружного (вдоль полярного угла φ , см. рис. 2) распределения утонения, однако остаются пропорциональными интегральному утонению поперечного сечения.

Таким образом, для стержневых элементов в общем случае справедливы те же тенденции изменения компонент матриц K и M , что для «точечных» (см. (11), (23), (24)), а сами матрицы представимы в виде сумм «номинальных» («невозмущенных») и «малых» слагаемых (последние состоят из линейной комбинации компонент первых, причем коэффициентами служат степени утонения сечений отдельных элементов α). Отсюда следует, что в дальнейшем можно пользоваться их представлениями (12), (13).

Пластиначатые элементы. При рассмотрении пластиначатых (а также оболочечных) элементов традиционно их напряженно-деформированное состояние представляется в виде комбинации плоского напряженно-деформированного состояния и изгиба (на рис. 3 соответствуют плоскостям xy и направлению z). Первое предполагает, что компоненты M и K прямо пропорциональны толщине конечного элемента h . Если при утонении взять коэффициент α как степень изменения h по сравнению с номинальным (исходным) значением h_0 , то есть

$$h = h_0(1 - \alpha), \quad (25)$$

то автоматически выполняются все соотношения (11)-(13).

Для изгибной компоненты НДС коэффициенты матрицы масс также пропорциональны h , и в части их представления справедливы соотношения (11)-(13). Коэффициенты же матрицы жесткости пропорциональны h^3 , и при малых α справедливо примерное равенство:

$$k_{**}^e \approx k_{**}^{e0}(1 - 3\alpha). \quad (26)$$

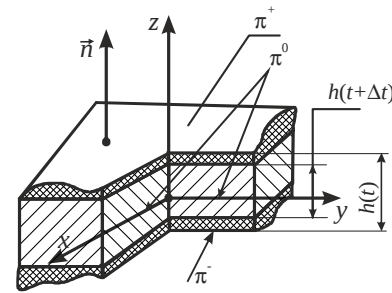


Рис. 3. Утонение пластин и оболочек

Отсюда по аналогии с (23) следует тот же вывод, что и для стержневых конечных элементов: соотношения (11) здесь справедливы относительно тенденций изменения компонент матриц жесткости и масс, а (12), (13) – относительно вида представления $M(\alpha)$, $K(\alpha)$.

Массивные тела. Моделирование утонения массивных тел (рис. 4) с точки зрения традиционного подхода МКЭ затруднительно, так как требует либо симуляции «смерти» части конечных элементов, либо локальной перестройки приповерхностной зоны конечно-элементной сетки, которую можно принудить отслеживать миграцию внешней поверхности Σ (см. рис. 4) вследствие процесса утонения, описываемого параметром α , который представляется здесь как

$$\alpha = V(\Delta\Omega)/V(\Omega(0)) = \Delta V / V_0. \quad (27)$$

Здесь V – объем соответствующих областей.

Однако ситуацию можно изменить, рассматривая не статичные конечно-элементные сетки, а «следящие». Имеется в виду, что существует некоторое непрерывное взаимнооднозначное преобразование текущей области в исходную

$$D: M = D(N), \quad N = D^{-1}(M) \quad \forall M \in \Omega^0, \quad N \in \Omega(\alpha). \quad (28)$$

Потребуем, чтобы якобиан преобразования J во всей области Ω_0 был не больше единицы. Тогда

$$\int_{(\Omega_0)} J dV_0 = V(\Omega(\alpha)) = V_0(1 - \alpha). \quad (29)$$

Потребовав также, чтобы для каждого конечного элемента выполнялось условие

$$(1 - \gamma)V_0^e \leq J_e = \int_{(\Omega_e)} J dV_0 \leq V_0^e, \quad (30)$$

где V_0^e – исходный объем конечного элемента в области Ω_0 , $\gamma = n\alpha \ll 1$, n – конечно, получим для элементов $M(\alpha)$, $K(\alpha)$ в текущей конфигурации конечно-элементного ансамбля (в силу известных отношений [7, 8]:

$$k_{**}^e = (1 - n^e\alpha)k_{**}^{e0}, \quad m_{**}^e = (1 - n^e\alpha)m_{**}^{e0}, \quad (31)$$

где $n^e \in [1; n]$ – конечное число, не превышающее n .

Данные отношения по тенденции изменения компонент M , K соответствуют (11). В силу этого справедливы и соотношения (12), (13).

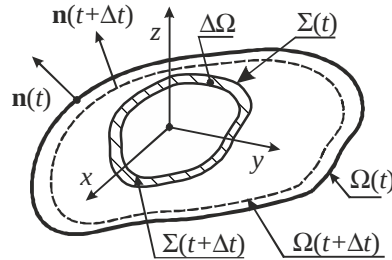


Рис. 4. Утонение массивного тела

Замечание 1. По форме и тенденциям изменения компонент K и M получены аналогичные соотношения для точечных, линейных, пластинчатых и массивных конечных элементов. В тоже время для 3D конечно-элементного ансамбля изменяются положения узлов и конечных элементов, а для редуцированных конечных элементов – только связанные с ними геометрически обусловленные характеристики. Однако это отличие формальное, так как физически во всех случаях область Ω (см. рис. 4), а также области, протянутые вдоль линии стержня ($\bar{\Omega} = S(\alpha) \times l$, l – стержня, см. рис.2) или наросшие от срединной плоскости π_0 до наружной π^+ и внутренней π^- ($\bar{\Omega} = \pi^0 \times h$, см. рис. 3), уменьшаются.

Замечание 2. В силу замечания 1 при сравнении результатов конечно-элементного анализа для случая 3D конечных элементов сравнению подлежат компоненты НДС, определяемые в различных точках $M \in \Omega^0$, $N \in \Omega(\alpha)$ (но связанных соответствием D (28)). Для редуцированных конечных элементов сравниваемые компоненты НДС вычисляются в тех же точках, но с соответственно измененными толщинами или поперечными сечениями.

Общие тенденции изменения решений задач анализа при утонении тел. Рассматривая (12), (13) как исходные соотношения, можно исследовать поведение решений задач (1), (3). Так, для задач структурного анализа при таких α можно решение представить в виде

$$x(\alpha) \approx x(0) + (K_0)^{-1} K_0' \cdot f, \quad (32)$$

где $x(0)$ – решение (4) при $\alpha = 0$, а компоненты матрицы K_0' есть линейные комбинации слагаемых типа (11). То есть, компоненты вектора решения $x(\alpha)$ представляет собой сумму решения для базовой неутоненной конструкции и линейной по степеням утонения отдельных конечных элементов. Таким образом, для определения решения при любой конфигурации утонения исследуемой конструкции необходимо знать лишь решение $x_0 = x(0)$ для базового неутоненного варианта, располагать матрицами K_0^{-1} , K_0' , и тогда компоненты решения $x^{(s)}$ представлены в виде линейной комбинации:

$$x^{(s)}(\alpha) = x_0^{(s)} + \sum_k \rho_{ks} \alpha_k x_0^{(s)}, \quad (33)$$

где $\rho_{ks} \cdot \alpha_k$ – элементы матрицы $K_0^{-1} K_0'$ (см. (32)).

Отсюда следует, что для организации многовариантных исследований НДС тонкостенных конструкций с учетом утонения стенок (т.е. при разных наборах α) можно использовать решение (33).

Замечание 3. Коль скоро данные соотношения выведены из приближенных равенств, то их применение ограничено малыми α . С другой стороны, точность

соотношений (33) хоть и может ухудшиться с ростом α_k , однако тенденцию изменения компонент решения $x(\alpha)$ они будут отражать удовлетворительно. Поэтому, задавшись предельно допустимыми (нормативными) значениями α^* , можно по значениям точных решений при задании различных сочетаний $\alpha^* = \{0, \dots, \alpha^*, \dots, 0\}$ получить соотношения для определения $\rho_{\text{кр}}^{\wedge}$:

$$\sum_{k=1}^N \rho_{\text{кр}}^{\wedge} \alpha_k x_0^{(p)} = x_*^{(p)} - x_0^{(p)}, \quad (34)$$

где $x_* = \{x_*^{(p)}\}$ - точные решения системы уравнений (1) при $K = K(\alpha^*)$.

Таким образом, получаем примерное решение в виде, аналогичном (33), но соответствующее большему диапазону изменения коэффициентов α_k .

Практичность предложенного подхода резко возрастает в случае, когда число уточняемых элементов исследуемой конструкции мало по сравнению с общим числом элементов. Это приводит к резкому уменьшению коэффициентов матрицы $\rho_{\text{кр}} \neq 0$. Соответственно, резко уменьшается количество требуемых решений системы уравнений (1) при пробных наборах α^* .

В результате полученные соотношения для определения решения могут быть использованы для многовариантных расчетов напряженно-деформированного состояния при различных сочетаниях утонений стенок, без необходимости решения полной системы уравнений МКЭ (1). Это дает возможность оперативного решения следующих задач:

1) параметрический анализ, например, определение зависимости максимальных напряжений или перемещений от параметров утонения α :

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{max}}(\alpha); \quad w_{\text{max}} = w_{\text{max}}(\alpha); \quad (35)$$

2) определение наиболее неблагоприятного сочетания $\tilde{\alpha}$

$$\tilde{\alpha} = \arg \max \sigma_{\text{max}}(\alpha); \quad \tilde{\alpha} = \arg \max w_{\text{max}}(\alpha); \quad (36)$$

3) определение рационального набора карты перераспределения номинальных толщин элементов, например, исследуемой пластинчатой конструкции:

$$h^* = \arg \min_h \max_{\alpha} \sigma_{\text{max}}(h, \alpha); \quad m = m(h) = \text{const}, \quad (37)$$

где $m = \sum S_k \cdot h_k \cdot \gamma$ - масса конструкции, элементы которой имеют плотность γ .

В данном случае путем варьирования α можно моделировать и естественный процесс утонения, например, вследствие коррозии металлоконструкции, и проектное варьирование толщин с целью оптимизации, и «восстановление» исходной конфигурации толщин по некоторой рациональной конечной путем задания отрицательных α (т.е. моделирование процесса утонения

в обратном направлении).

Замечание 4. Все описанные выше типы задач оперируют с параметрами α с точки зрения их апостериорного задания, поиска (путем прямого перебора или целенаправленного изменения с целью улучшения тех или иных характеристик) или определения неблагоприятных сценариев утонения. В этих задачах НДС и утонение не являются связанными процессами. В то же время для ряда задач применима связанная постановка. Например, для пластинчатой конструкции

$$\dot{h} = \zeta(\sigma); \quad h(0) = h_0; \quad K(h) \cdot x(t) = f, \quad (38)$$

где $\zeta(\sigma)$ - функция, которая связывает скорость утонения с напряженно-деформированным состоянием.

Эту задачу также можно сформулировать в параметрах α :

$$\dot{\alpha} = -\zeta(\sigma)/h_0; \quad \alpha(0) = 0; \quad K(\alpha) \cdot x(t) = f. \quad (39)$$

При этом на каждом этапе интегрирования по времени можно использовать предложенную в работе методику решения (с той лишь разницей, что α не задается, а определяется в процессе решения задачи).

Замечание 5. При использовании предложенного подхода, несмотря на увеличение числа необходимых расчетов (то есть, кроме «базового» расчета при нулевом утонении, требуется еще проведение стольких расчетов, сколько наличествует элементов с различными степенями утонения), есть преимущество по сравнению с традиционным анализом чувствительности по соотношениям (33). Оно заключается в том, что с ростом α приближенные формулы теряют не только точность, но и корректность, поскольку получены в предположении сохранения симметричности и положительной определенности матриц K_0' , M_0' (см. (32, 33)), которые могут теряться с увеличением α во все большей мере. В то же время предложенный подход предполагает оперирование на всех этапах с матрицами жесткости и масс, получаемыми напрямую по известным соотношениям МКЭ, справедливым при любом значении α . При этом все свойства матриц $K(\alpha)$, $M(\alpha)$, вычисленных без линеаризации, а путем прямого малого конечного возмущения конечно-элементной модели, идентичны свойствам $K(0)$, $M(0)$.

Замечание 6. Тенденции линейного поведения компонент вектора решения $x(\alpha)$ вызывают естественное ее распространение и для компонент тензора напряжений, по этим перемещениям вычисляемых. В то же время это не всегда относится к знаку линейной части выражений: при росте перемещений может наблюдаться как увеличение, так и уменьшение напряжений (см. пример далее).

Обращаясь к задаче анализа спектра (3), рассмотрим сначала задачу поиска квадрата первой (низшей) собственной частоты как абсолютного минимума функции Рэлея R :

$$\omega_1^2 = \min R = \min \left\{ \sum K_{ij} y_i y_j / \sum M_{ij} y_i y_j \right\}, \quad (40)$$

где K_{ij} , M_{ij} – компоненты матриц K и M , а y_k – компоненты пробных распределений, приближающих первую собственную форму колебаний A с компонентами A_k .

Находя достаточно хорошее приближение $\omega_1^2(\alpha)$, можно использовать то обстоятельство [9], что сама собственная частота, определяемая по функции Рэлея, при изменении формы A отклоняется от точного значения незначительно. В силу этого при малых α можно не делать различий между формами $A(0)$ и $A(\alpha)$. Тогда

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,j} (K_{ij}^0 - K_{ij}') A_i A_j}{\sum_{i,j} (M_{ij}^0 - M_{ij}') A_i A_j} = \frac{\sum_{i,j} K_{ij}^0 A_i A_j - \sum_{i,j} K_{ij}' A_i A_j}{\sum_{i,j} M_{ij}^0 A_i A_j - \sum_{i,j} M_{ij}' A_i A_j}. \quad (41)$$

Преобразовав к (41) виду

$$\omega^2(\alpha) = \omega_0^2 \frac{\left(1 - \sum_{i,j} K_{ij}' A_i A_j / \sum_{i,j} K_{ij}^0 A_i A_j\right)}{\left(1 - \sum_{i,j} M_{ij}' A_i A_j / \sum_{i,j} M_{ij}^0 A_i A_j\right)}, \quad (42)$$

где $\omega_0^2 = \sum_{i,j} K_{ij}^0 A_i A_j / \sum_{i,j} M_{ij}^0 A_i A_j$, можно сделать вывод, что по сравнению с неутоненной конструкцией нижняя собственная форма колебаний либо растет, либо уменьшается, либо остается неизменной в зависимости от скоростей роста числителя и знаменателя (42). Переписав для малых α последнее выражение в виде

$$\omega^2(\alpha) \approx \omega_0^2 (1 - \delta_K) (1 + \delta_M), \quad (43)$$

где δ_K , δ_M – отношения значений билинейных форм, вычисляемых для возмущений, вызванных утонением, и для базового неутоненного варианта (собственно, для матриц K и M), можно принять

$$\omega^2(\alpha) \approx \omega_0^2 (1 - \delta_K + \delta_M). \quad (44)$$

Замечание 7. Учитывая, что для определения более высоких частот колебаний с использованием функции Рэлея ищется ее условный экстремум на формах, ортогональных предшествующим, то вместо задачи минимизации получаем последовательность минимаксных задач. При этом, однако, вид самой функции Рэлея сохранится, и все выкладки сохранятся теми же. При малых α останутся справедливыми те же оценочные соотношения (43), (44), однако входящие в них величины δ_K , δ_M изменятся, в силу чего может измениться и тенденция миграции той или иной частоты в спектре исследуемого объекта.

Частный случай. Изменение спектра собственных колебаний шарнирно опертого стержня первоначально прямоугольного сечения. На рис. 5 представлен специально заданный частный вид утонения стержня прямоугольного сечения. Используя принятую выше форму записи с привлечением обозначений C_s (константы, в которых аккумулируются величины, неизменные при утонении), для спектра частот собственных колебаний стержня в плоскости zx имеем [9]

$$\omega_i = C_s \sqrt{I_y(\alpha) / F(\alpha)}, \quad (45)$$

где I_y , F – момент инерции и площадь сечения стержня (здесь $\alpha = t/h$ – степень утонения). Кроме того, обозначим $\chi = h/b$; $t/b = \gamma$; $\gamma = \chi\alpha$.

Вводя в рассмотрение относительное изменение частоты

$$\lambda_i = \omega_i(\alpha) / \omega_i(0), \quad (46)$$

получаем с учетом принятых обозначений

$$\lambda_i = \lambda = \sqrt{\frac{1 - 2\chi\alpha^2 \{2/3\alpha^2 + 1/3(3 - 2\alpha)^2\}}{1 - 2\chi\alpha^2}}. \quad (47)$$

Определим коэффициент изменения площади поперечного сечения

$$2\alpha\gamma = 2\chi\alpha^2 = \delta = \Delta S(\alpha) / S(0), \quad (48)$$

получаем

$$\lambda = \sqrt{\left[1 - (1/3)\delta \left[\delta/\chi + (3 - \sqrt{2\delta/\chi})^2\right]\right] / (1 - \delta)}. \quad (49)$$

При малых δ

$$\lambda \approx (1 + \delta/2)(1 - 3\delta/2) \approx 1 - \delta. \quad (50)$$

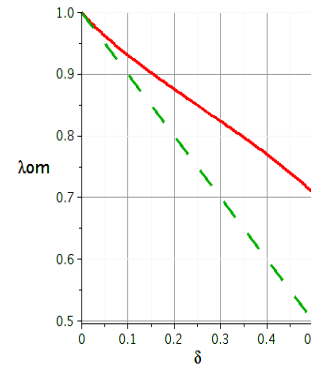


Рис. 6. Зависимость $\lambda(\delta)$ в интервале $\delta \in [0; 1/2]$

На рис. 6-8 представлена зависимость $\lambda(\delta)$ в интервале $\delta \in [0; 1/2]$, а также штриховой линией – линеаризованная зависимость (50). Видно, что линеаризованная зависимость дает значительную погрешность при $\alpha, \delta \rightarrow 1/2$ (до 40%), в то время как аппроксимация по секущей точке на кривой, соответствующей $\delta = 1/4$, дает возможность сократить погрешность до 2%, причем она минимальна при $\alpha, \delta \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 1/4$ (т.е. для номинального и максимально утоненного поперечного сечения, если

принять допустимый уровень утонения 25%).

Замечание 8. С учетом того, что все частоты поперечных колебаний стержня в одной выбранной плоскости одинаково зависят от геометрических параметров сечения [9], то при одном и том же утонении α (или δ) тенденции миграции частот данного множества (то есть λ) не зависят от номера частоты.

Это справедливо в данном случае для поперечных колебаний в плоскости zx .

Частный случай.

Изгиб шарнирно опертого стержня специального поперечного сечения. На рис. 9 представлена расчетная схема шарнирно опертого стержня со специальным поперечным сечением и с утоняемыми выступами по поверхностям П. Утоняются в случае I только выступы:

$h_1(\alpha) = h_1^0(1 - \alpha)$. Вводим обозначения: $b_1/b = K_1 \in [0;1]$; $h_1^0/b = K_2 \in [0;\infty]$. Тогда максимальные перемещения и напряжения будут равны:

$$W_{\max} = C_5 / \dot{I}_y(\alpha), \quad \sigma_{\max} = C_6 / W(\alpha). \quad (51)$$

где I_y , W – момент инерции и момент сопротивления поперечного сечения стержня.

Вводя в рассмотрение коэффициенты

$$\lambda_w = W_{\max}(\alpha) / W_{\max}(0), \quad \lambda_\sigma = \sigma_{\max}(\alpha) / \sigma_{\max}(0), \quad (52)$$

получаем:

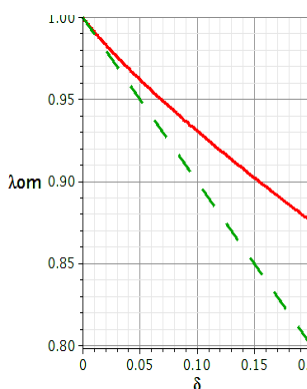


Рис. 7. Зависимость $\lambda(\delta)$ в интервале $\delta \in [0; 1/5]$

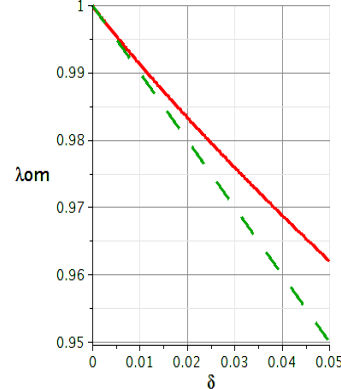


Рис. 8. Зависимость $\lambda(\delta)$ в интервале $\delta \in [0; 1/20]$

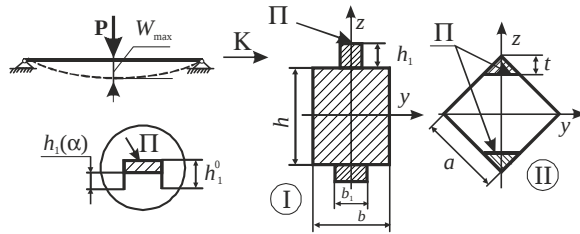


Рис. 9. Шарнирно опертый стержень со специальными поперечными сечениями и с утоняемыми выступами по поверхностям П

$$\lambda_w = \frac{(1 - K_1) + K_1[1 + 2K_2]^3}{(1 - K_1) + K_1[1 + 2K_2(1 - \alpha)]^3}, \quad \lambda_\sigma = \lambda_w \frac{1 + 2K_2(1 - \alpha)}{1 + 2K_2}. \quad (53)$$

В зависимости от соотношений размеров поперечного сечения можем наблюдать различный характер изменения λ_w , λ_σ в зависимости от α (рис. 10). При малых α : $\lambda_w \approx 1 + \mu \cdot \alpha$, $\lambda_\sigma \approx 1 + (\mu - \phi)\alpha$, где $\phi = 2K_2 / (2K_2 + 1)$, $\mu = [6K_2(1 + 2K_2)^2] / [1 - K_1 + K_1(1 + 2K_2)^3]$.

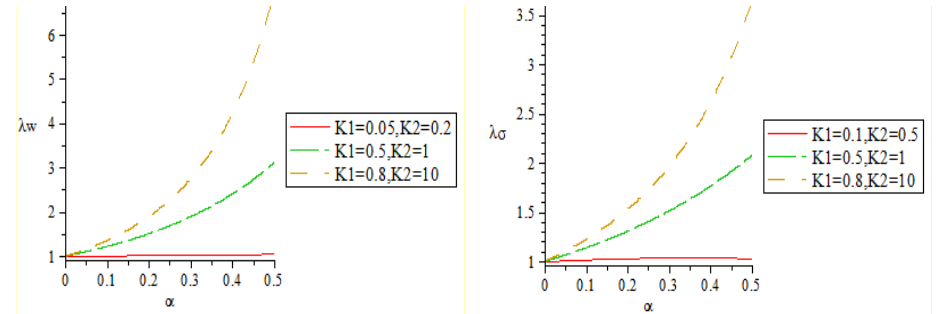


Рис. 10. Зависимости λ_w , λ_σ от α при разных K_1 , K_2

Таким образом, и при малых, и при конечных α λ_w и λ_σ имеют различные величины. Также получены результаты расчетов с применением конечно-элементного моделирования. Наблюдается удовлетворительное соответствие с аналитической моделью. На рассматриваемом частном примере изгиба стержня продемонстрирована справедливость линейаризации отклика его напряженно-деформированного состояния на утонение поперечного сечения, причем подтверждена необходимость раздельной линейаризации по перемещениям и напряжениям.

Частная задача об изгибе шарнирно опертого стержня ромбовидного поперечного сечения (см. рис. 9, случай II). Здесь процесс утонения описывается либо отношением линейных размеров α , либо площадей: $\alpha = t/a$, $\delta = 2t^2/a^2$. По аналогии с приведенными выше соотношениями получаем для данного случая

$$\lambda_w = 3 / \left\{ 3 - \delta^2 - 2\delta(3 - 2\sqrt{\delta})^2 \right\}, \quad \lambda_\sigma = 3(\sqrt{2} - \sqrt{\delta}) / \left\{ \sqrt{2} \left[3 - \delta^2 - 2\delta(3 - 2\sqrt{\delta})^2 \right] \right\}.$$

С точки зрения наличия особенностей распределение λ_w (рис. 11) не привносит ничего отличного от аналогичных зависимостей (см. выше), а вот λ_σ демонстрирует специфическое поведение при малых δ ($< 0,05$) (см. рис. 11). Эта особенность заключается, во-первых, в наличии ниспадающего участка $\lambda_\sigma(\delta)$ на интервале примерно до $\delta \approx 0,005$, а во-вторых, линейаризо-

ванная зависимость по α $\lambda_\sigma \approx 1 - \sqrt{(\delta/2)} = 1 - \alpha$, представленная в виде $\lambda_\sigma(\delta)$, имеет корневую особенность производной при $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, линейаризация по этому параметру в окрестности нуля некорректна (по теории малых возмущений).

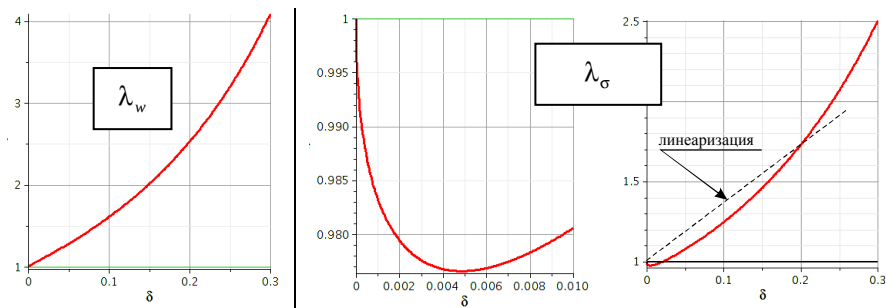


Рис. 11. Зависимости λ_w и λ_σ от δ

Тут же нужно заметить, что сама величина снижения λ_σ по сравнению с 1 мала, как мал и участок падения. В силу этого предлагаемая в работе линейаризация (см. штриховую линию на рис. 11) по конечному приращению δ (например, $\delta=0,2$), хоть и не отражает особенности изменения λ_σ при $\delta \rightarrow 0$, тем не менее, обеспечивает отличие от точной кривой на уровне 10% на интервале $\delta \in [0; 0,25]$.

Частный случай. Напряженно-деформированное состояние при утонении трубы. Рассматривается участок трубы, разбитый на сегменты (рис. 12). При численном решении для определенности взяты размеры и свойства материала следующими: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м², диаметр – 0,5 м, толщина – 10^{-2} м, длина – 11 м, на-

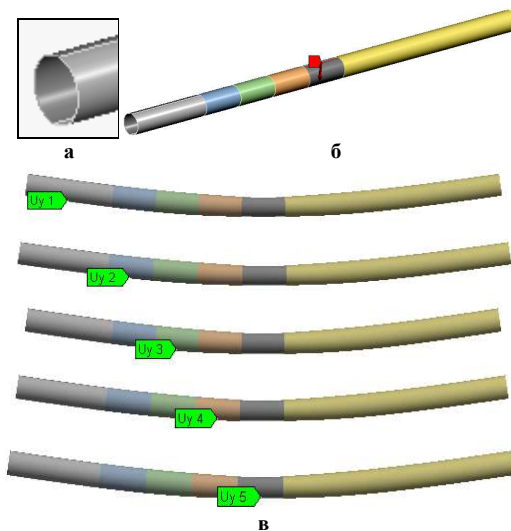


Рис. 12. Расчетная схема участка трубы. Цилиндрическая оболочка с независимо утоняемыми секциями 1-5 (нумерация – слева направо): а - шарнирное опирание по краям; б - нагрузка (сила, отмечена стрелкой, распределенная по линии вдоль образующей средней (пятой слева) секции; в - контрольные точки 1-5

грузка – 10 кН.

Рассматриваются утонения секций (указанные на рис. 13) с интенсивностями $\alpha_1 = \{0,05; 0,1; 0,2; 0,3\}$ и $\alpha_2 = \{0,05; 0,1; 0,2; 0,3\}$. Рассчитано при помощи МКЭ (с использованием Shell-элементов) 4 варианта НДС: I – базовый (неутоненный); II – при утонении $\alpha_1 = \alpha_1^*$; $\alpha_2 = 0$; III – при утонении $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \alpha_2^*$; IV – при утонении $\alpha_1 = \alpha_1^*$, $\alpha_2 = \alpha_2^*$ (рис. 13). Здесь звездочками обозначены некоторые выбранные значения из приведенных выше наборов α_1 , α_2 . Далее вычисляются характеристики $q_w = [W_I + W_{IV} - (W_{II} + W_{III})]/W_I$, $q_\sigma = [\sigma_I + \sigma_{IV} - (\sigma_{II} + \sigma_{III})]/\sigma_I$, где W , σ – некоторые компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, выбираемые в одной и той же точке трубы, а римские цифры индексируют описанные выше случаи сочетания утонений.

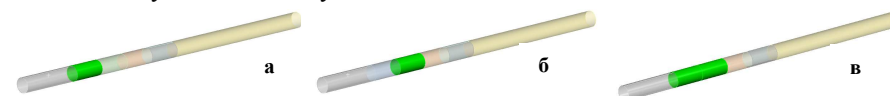
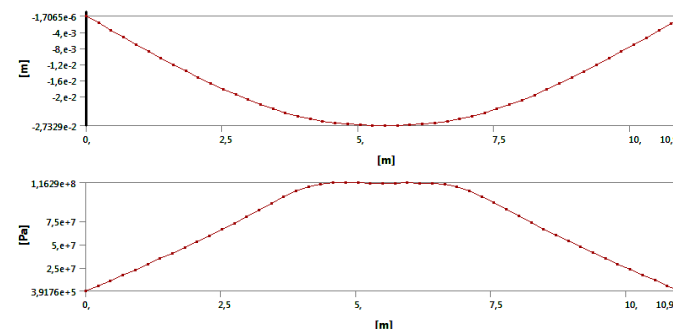


Рис. 13. Варианты утонения секции: а – утонение секции 2 (вариант II); б – утонение секции 3 (вариант III); в – утонение секций 2 и 3 (вариант IV)

На рис. 14 представлены зависимости характерных распределений прогибов и напряжений вдоль оси трубы $q_w = q_w(\alpha_1; \alpha_2)$, $q_\sigma = q_\sigma(\alpha_1; \alpha_2)$, а на рис. 15, 16 – зависимости $\lambda_w = W(\alpha)/W(0)$, $\lambda_\sigma = \sigma(\alpha)/\sigma(0)$.

Рис. 14. Распределение прогибов (а) и напряжений (б) (вариант I – неутоненная конструкция)



Из представленных зависимостей видно, что примерно линейная зависимость компонент W , σ наблюдается не только при достаточно малых α (до 0,1), но и для значительных величин (до 0,2-0,4). Несоответствие при этом меньше 1 % при α до 0,3. Если провести линейаризацию по точке с предельными утонениями (0,25; 0,25), то максимальное несоответствие линейаризованной модели и нелинейаризованной по перемещениям – 0,2 %, по напряжениям – 0,5 %. Таким образом, с достаточной для многих случаев точностью можно использовать линейаризованную модель для прогноза НДС в тонкостенной конструкции (в данном случае – труба).

Важно подчеркнуть и другое обстоятельство: при использовании линейризации по коэффициентам анализа чувствительности погрешности при α на уровне 0,25 могут составлять 30% и более (по теории малых возмущений).

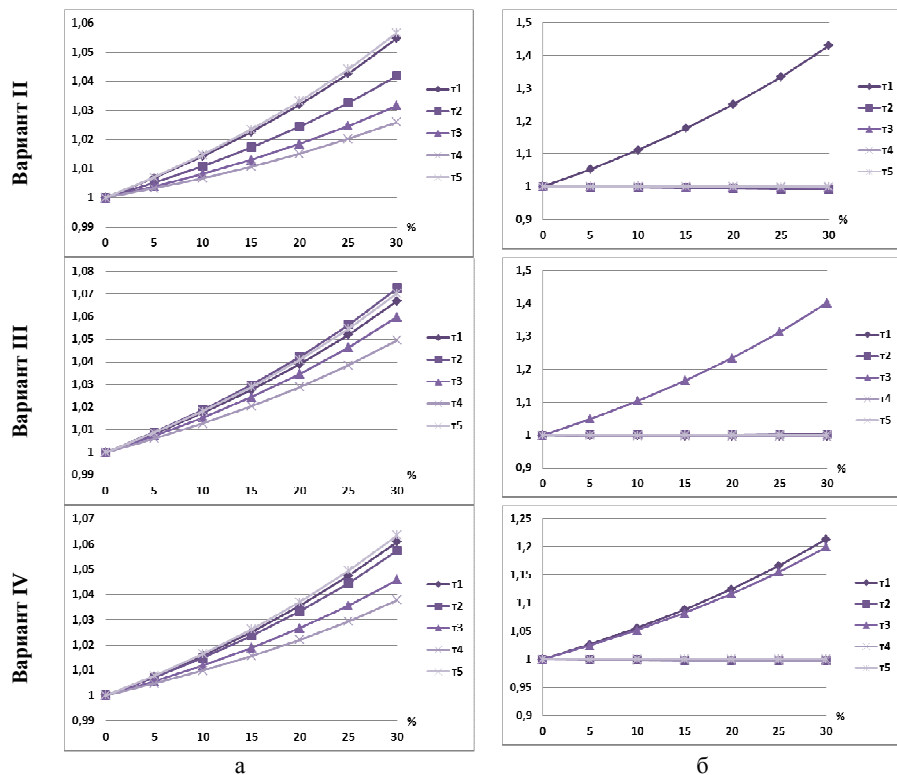


Рис. 15. Относительное изменение прогибов (а) и напряжений (б) в пяти контрольных точках для различных вариантов утонения секций

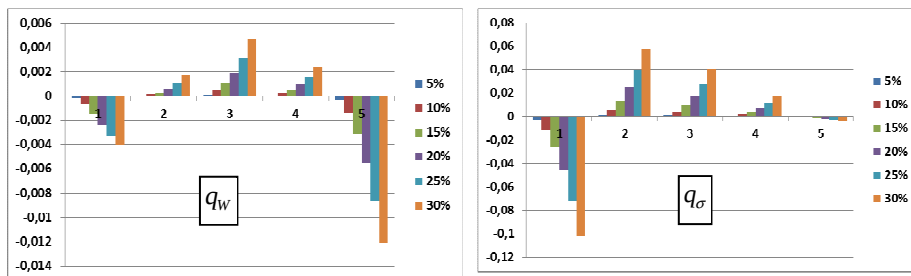


Рис. 16. Сравнение результатов расчетов НДС трубы с точки зрения степени отклонения от линейности по коэффициентам утонения (для различных точек 1-5 и степеней утонения 5-30%)

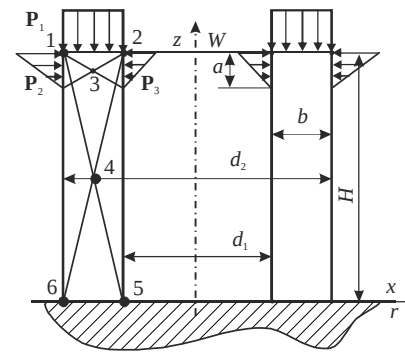


Рис. 17. Расчетная схема пуансон-матрицы [13]

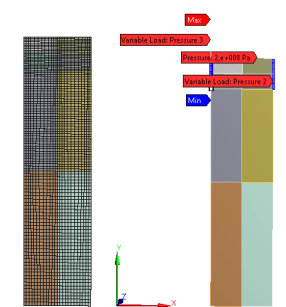


Рис. 18. КЭМ пуансон-матрицы

Частный случай. Напряженно-деформированное состояние пуансон-матрицы разделительного штампа. Во многих случаях разделительные операции листоштамповочного производства предполагают разделительные операции с применением пуансон-матриц [10-16] (рис. 17, 18).

При этом в зависимости от конструктивных соображений может варьироваться высота пуансон-матрицы H . Технологические соображения могут диктовать изменение диаметров d_1 , d_2 (в случае варьирования технологического зазора между режущими кромками пуансон-матрицы, матрицы и пуансона). Таким образом, введя некоторые «номинальные» величины H_0 , d_1^0 , d_2^0 , можно рассматривать процессы варьирования H , d_1 , d_2 как утонение конструкции, задаваемое параметрами $\alpha_H = H/H_0$; $\alpha_1 = d_1/d_1^0$; $\alpha_2 = d_2/d_2^0$. Применяя предложенный выше подход с перестройкой КЭМ, можно провести серию численных расчетов НДС исследуемой пуансон-матрицы.

Для определенности взяты: $d_2^0 = 50$ мм, $d_1^0 = 30$ мм, $H_0 = 40$ мм, $p_1 = 200$ МПа, $p_2 = 50$ МПа, $p_3 = 40$ МПа. В качестве контролируемых точек для сравнения перемещений и напряжений выбраны точки 1-6 (см. рис. 17). На рис. 19 представлены зависимости $\alpha_w = W(\alpha)/W(0)$, $\alpha_\sigma = \sigma(\alpha)/\sigma(0)$, рассчитанные по некоторым компонентам НДС пуансон-матрицы.

Анализ представленных картин дает основание сделать вывод о том, что изменение высоты, внутреннего и внешнего диаметров пуансон-матрицы оказывает практически линейное влияние на ее НДС (за исключением некоторых точек).

Частный случай. Напряженно-деформированное состояние силовой структуры крана-перегрузчика при утонении элементов металлоконструкции. Одним из ответственных видов машиностроительных конструкций, потенциально подверженных коррозионному утонению, являются краны-перегрузчики [17]. Их силовая структура образуется в виде металлоконструкции (рис. 20), которую нельзя моделировать в виде стержней, пластин или оболочек, а нужно строить сложные КЭМ. Такая модель, дополненная авторскими разработками, которые дают возможность варьировать степень утонения или отдельных элементов, или

всех секций основной балки, опор и шпренгельной системы, была создана и использована для анализа чувствительности НДС перегружателя ПМГ-20 на различные сценарии утонения элементов силовой структуры.

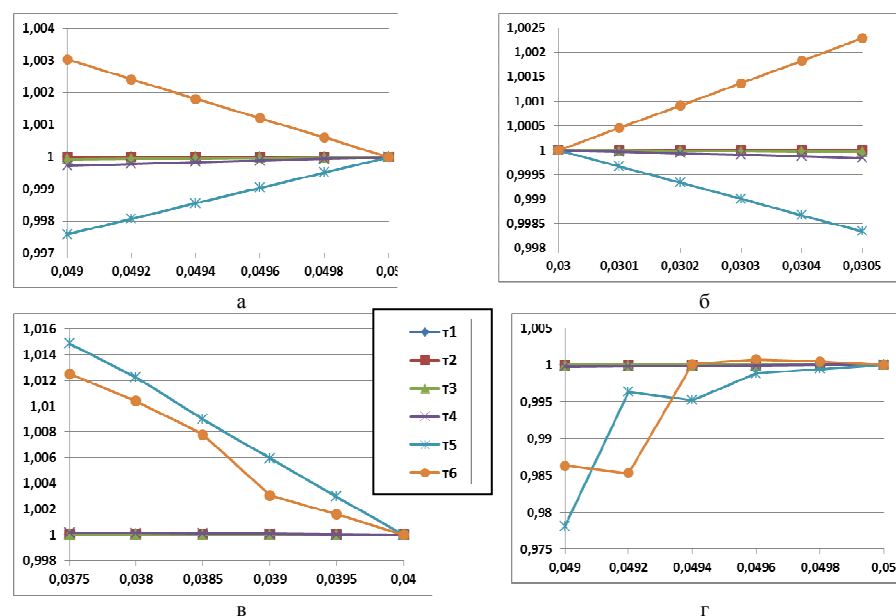


Рис. 19. Относительное изменение напряжений σ_z (относительно начального /базового/ варианта) для 6 контрольных точек:

а – изменение внешнего диаметра d_1 (в пределах 1 мм); б – изменение внутреннего диаметра d_2 (в пределах 0,5 мм); в – изменение высоты H (в пределах 2 мм); г – одновременное изменение всех трех параметров (d_1 , d_2 , H)

Был проведен большой объем расчетов при различных видах нагружения и утонения различных секций конструкции. В частности, на рис. 21 представлены изменение прогибов основной балки в процессе утонения всех элементов металлоконструкции (1 – тележка на ремонтной консоли, 2 – тележка в центре пролета, 3 – тележка на консоли за шарнирной опорой), а на рис. 22 – интегральные зависимости максимальных напряжений от степени утонения для случая нагружения весом грейферной тележки с грузом.

Как показывает анализ, подтверждаются достаточно плавные зависимости характеристик НДС от степени утонения элементов металлоконструкции. Они допускают линеаризацию в диапазоне до 25% утонения с допускаемой погрешностью не выше 5%. Это дает в руки проектантов удобный инструмент для начального обоснования проектных параметров по критериям прочности и жесткости. Кроме того, данная мета-модель дополняется подобными зависимостями, но полученными для случая утонения секций, опор и раскосов.

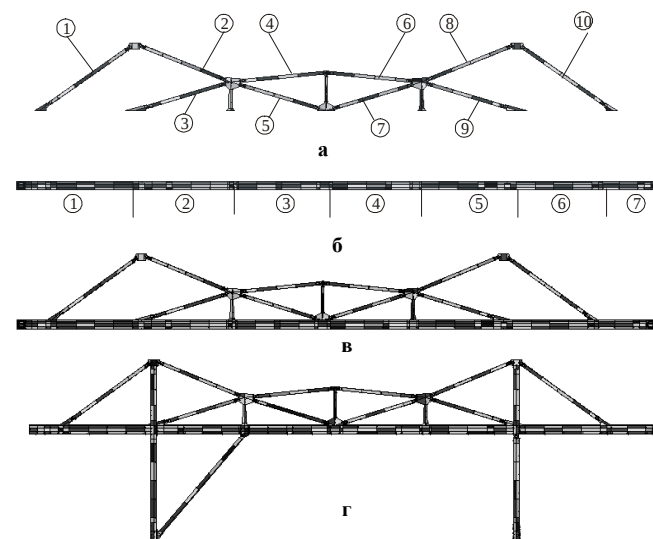


Рис. 20. Схема верхнего строения мостового перегружателя с номерами структурных элементов [17]: а - шпренгельная система (раскосы № 1-10); б - балка (секции № 1-7); в - верхнее строение; г - модель перегружателя

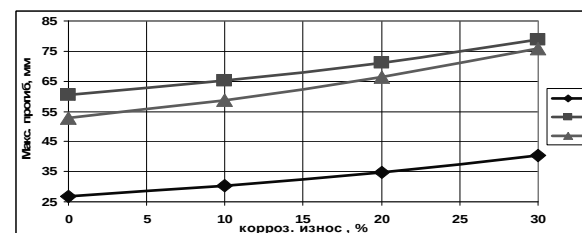


Рис. 21. Изменение максимального прогиба в балке при утонении всех поверхностей для 3-х вариантов положения тележки:

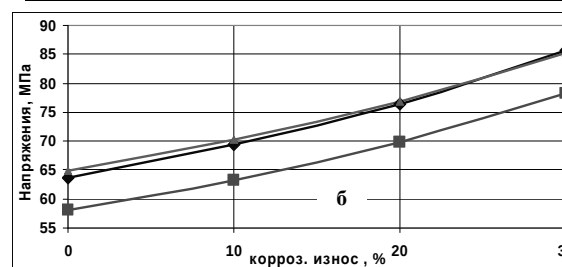
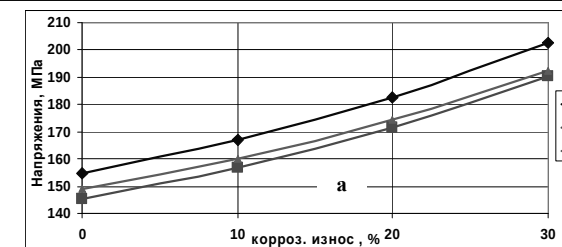


Рис. 22. Увеличение максимальных напряжений по Мизесу в случае одновременного утонения всех поверхностей модели для 3-х вариантов положения тележки при утонении всех поверхностей: а – в шпренгельной системе; б – в балке

Это дает возможность для более подробного анализа и синтеза параметров отдельных компонентов конструкции перегружателя.

Частный случай. Напряженно-деформированное состояние при утонении стержня коробчатого сечения. Рассматривается конструкция такого же трубчатого исполнения, как и выше (см. рис. 12,13), но с поперечным сечением в виде прямоугольного короба (рис. 23). Схемы закрепления и утонения – аналогичные. Исследуется влияние степени утонения на спектр собственных частот поперечных колебаний стержня. На рис. 24 представлены характерные зависимости для изменения спектра частот собственных колебаний. Видно, что первые 5 собственных частот изменяются (убывают) примерно по линейной зависимости от степени утонения вплоть до 30%-го утонения.

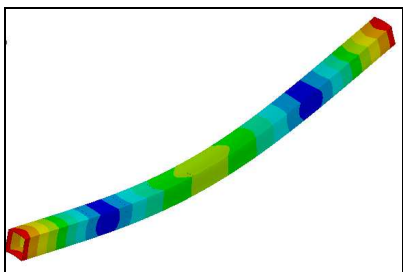


Рис. 23. Первая собственная форма колебаний шарнирно опертого стержня коробчатого сечения

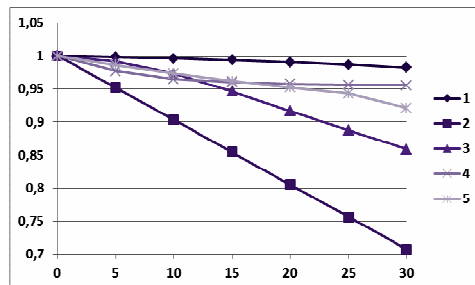


Рис. 24. Относительное изменение собственных значений частот №№1-5 при утонении (в %) стенок элементов конструкции

Частный случай. Собственные частоты колебаний стержня с утонением средней части сечения. Ставится задача определения реакций спектра поперечных колебаний стержня с поперечным сечением, представленным на рис. 25.

Здесь $h_2 = K_2 \cdot h_1^0 = const$, $h_3 = K_3 \cdot h_1^0 = const$, а утоняется внутренняя область «I». Тогда

$$\lambda_w = \sqrt{\frac{[(1-\alpha)^3 + (K_3^3 - K_2^3)]}{(1 + K_3^3 - K_2^3)} \cdot \frac{1 + K_3 - K_2}{1 - \alpha + K_3 - K_2}}.$$

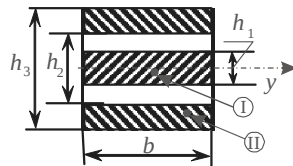


Рис. 25. Стержень с утоняемой средней частью

Картины изменения λ_w от степени утонения α – на рис. 26. Видно, что при утонении данного поперечного сечения собственные частоты поперечных колебаний стержня возрастают. При этом линейаризация зависимости $\lambda_w(\delta)$ по теории малых возмущений приводит к существенным погрешностям для расчета миграции частот.

Заключение. Предложенный в работе подход к анализу реакции НДС различных тел на малое утонение, в отличие от традиционной методики анализа

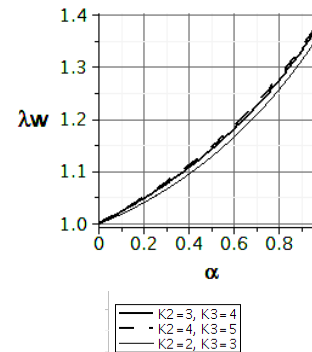


Рис. 26. Зависимости λ_w

чувствительности, предполагает линейную по итогам серии расчетов путем конечно-элементного моделирования с прямым возмущением КЭМ. При этом было продемонстрировано, что реакция исследуемых конечно-элементных моделей на малое конечное утонение исследуемого тела линейаризуется в достаточно широких пределах с сохранением приемлемой точности. Справедливость данного утверждения продемонстрирована на примерах ряда стержней, оболочек, пластин, массивных тел и сложных конструкций.

В результате оказывается возможным, проведя серию расчетов с прямым возмущением конечно-элементной модели при малых, но конечных значениях утонения α , получить набор «реперных» точек для построения линейаризованной мета-модели НДС или спектра собственных частот исследуемого объекта. В отличие от аналогичных моделей, построенных на основе традиционных методик анализа чувствительности по теории малых возмущений, данные мета-модели демонстрируют более широкий диапазон применимости на ряде модельных задач для стержней, пластин, оболочек, а также для реальных машиностроительных конструкций. Это обстоятельство дает возможность использовать создаваемые таким образом мета-модели не только для экспресс-анализа и оценочных предварительных расчетов, но и в качестве начальной базы для решения задач синтеза оптимальных параметров проектируемых конструкций, восстановления выгодных начальных профилей конструкций по условию сохранения несущей способности с учетом коррозионного или иного вида утонения, а также отстройки или настройки от/на резонансные режимы. При этом важно, что эти мета-модели сохраняют для некоторых объектов точность вплоть до утонения на уровне 25 – 30% от номинальной толщины, площади сечения или объема, в то время как нормативно установленные предельные величины для многих типов машиностроительных конструкций – на уровне 20 – 25%.

Установлено, что в зависимости от карты утонения могут наблюдаться как сонаправленные, так разнонаправленные изменения пар «перемещения-напряжения», «частоты поперечных колебаний в одной плоскости и в другой». Установлено также, что для некоторых вариантов конструкций возможны сочетания параметров, обеспечивающих квазиулеву чувствительность к степени утонения по прочностным или динамическим характеристикам.

Следует заметить, что неочевидные особенности в реакции компонент НДС и собственных частот на утонение сопровождают достаточно экзотические поперечные сечения при решении модельных задач для стержней. Однако, здесь можно возразить, что для реальных конструкций такая же ситуация может создаваться за счет стремления разнести материал силовых элементов на периферию с целью по-

вышения прочностных и жесткостных свойств. Таким образом, полученные решения и эффекты можно считать опорными точками, которые являются ориентирами при интерпретации результатов расчетов для реальных машиностроительных конструкций, особенно для случаев их неочевидной реакции на утонение.

Принимая во внимание, что в настоящее время при наличии значительных вычислительных ресурсов (аппаратных компьютерных комплексов с производительностью сотни Gflops, а также программных комплексов ANSYS, Abaqus, Nastran) проведение многовариантных исследований не очень затратно и продолжительно, то предложенный подход к построению мета-моделей для анализа изменений напряженно-деформированного состояния и спектра собственных частот от утонения элементов машиностроительных конструкций представляется эффективным и продуктивным. В дальнейшем планируется его развитие и адаптация для исследования реакции НДС и спектров частот собственных колебаний объектов транспортной техники, подъемно-транспортного оборудования, транспортных средств специального назначения, оборудования химической, пищевой и фармацевтической промышленности, а также других типов машин, оборудования, сооружений на различные виды утонения.

Список литературы: 1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 536 с. 2. Гузь А. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – К.: Вища шк., 1989. – 352 с. 3. Штейн-вольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов. М.- К.: МАШГИЗ, 1961. – 340 с. 4. Симсон Э.А. Методика анализа чувствительности вибрационных параметров механических систем / Э.А. Симсон, С.А. Назаренко, М. В. Трохан // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2/4 (32). – 2008. 5. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания механических систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1966. – 335 с. 6. Гринев В.Б. Оптимизация стержней по спектру собственных значений / В.Б. Гринев, А.П. Филиппов. – К.: Наук. думка, 1979. – 211 с. 7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542. 8. Fish J. A First Course in Finite Elements PDF / J. Fish, T.Belytschko. – John Wiley & Sons Ltd, 2007. – 336 p. 9. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с. 10. Романовский В.П. Справочник по холодной штамповке / В.П. Романовский. – Л.: Машиностроение, 1979. – 520 с. 11. Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки / Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1968. – 283 с. 12. Скворцов Г.Д. Основы конструирования штампов для холодной листовой штамповки / Г.Д. Скворцов. – М.: Машиностроение, 1972. – 360 с. 13. Заярненко Е.И. Расчеты на прочность вырубных матриц и пуансон-матриц для листовой штамповки / Е.И. Заярненко, Н.А. Ткачук, А.В. Ткачук // Кузнечно-штамповочное производство. – 1990. – № 12. – С. 18-21. 14. Ткачук Н.А. Элементы разделительных штампов: методы и модели для исследования напряженно-деформированного состояния / Н.А. Ткачук, А.Я. Мовшович, Ткачук А.Н. // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2009. – № 2. – С. 16-25. 15. Ткачук А.Н. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм / А.Н.Ткачук, И.Я.Мовшович, Н.А.Ткачук // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2009. – № 12. – С. 25-32. 16. Ткачук А.Н. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм / А.Н.Ткачук, И.Я.Мовшович, Н.А.Ткачук // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2010. – № 1. – С. 19-28. 17. Гусев Ю.Б. Обґрунтування параметрів високонавантажених машин на основі моделювання напружено-деформованого стану з урахуванням деградації властивостей основних елементів: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.02.02 / Ю.Б. Гусев; Голов. спец. конструктор.-технол. ін-т. – Маріуполь, 2009. – 20 с.

Поступила в редакцию 09.02.2012