УДК 519.6 : 616-073.75

О. О. ФРАЗЕ-ФРАЗЕНКО, заступник начальника Центру інформаційних технологій, Одеський національний економічний університет

АНАЛІЗ СПЛАЙН-МЕТОДІВ З МЕТОЮ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ОБРОБКИ КОНТУРІВ ЗОБРАЖЕНЬ

Приведено опис та короткий аналіз сплайн-методів, які застосовуються або можуть бути застосовані для контурної обробки зображень. Розглядаються: оператор Лапласа, фільтр Лапласа, матриця Лапласа, оператор Собеля, дискретна функція Гріна, дискретний оператор Шредінгера.

Ключові слова: контур, зображення, оператор Лапласа, фільтр Лапласа, матриця Лапласа, оператор Собеля, дискретна функція Гріна, дискретний оператор Шредінгера.

Вступ

Завдання аналізу та розпізнавання зображень складних об’єктів (наприклад, електронних зображень людей, рукописних символів, картографічних зображень та ін.) у діючих технологічних системах та мережах на сьогодні не має достатньо ефективних рішень: точність розпізнавання варіюється від 60 до 70%. Така ж ситуація спостерігається у області теорії електронного зору, яка останнім часом активно впроваджуються в охоронних системах та у інших системах захисту. Багатьма дослідниками було встановлено, що чим складніший візуальний образ піддається аналізу, тим більшої важливості набуває розуміння того, що аналізується. Тільки маючи в своєму розпорядженні знання про наочну область, яка відображається, система розпізнавання зможе сформувати семантичні описи зображень. Відповідно, *актуальною проблемою* може бути вирішення завдання щодо аналізу та систематизації методів та алгоритмів аналізу зображень складних об’єктів. Об’єктом аналізу, як показав огляд літературних джерел, найчастіше є півтонове зображення об’єкту, що отримане з відеокамер зовнішнього огляду, контур якого може бути вербально (словесно) описаний.

Аналіз останніх досліджень і документів, у яких викладено підходи до вирішення проблеми

Як видно з вище викладеного, проблема автоматичного аналізу форми та стану просторових об’єктів, інформація про які представлена у вигляді зображень, є актуальною для охоронних систем та інших систем безпеки. Зазначеній проблемі достатньо приділяли увагу зарубіжні вчені, включаючи вчених країн СНД, а саме: T. Kanade та B. Lucas (Канада) [1], У. Претт [2], M. Kaas та A. Witkin [3], D. Terzopoulos [4], S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon та T. Clapp [5], R. Gonzalez та R. Woods [6] (США), M. Rachuta, B. Wilamowski та A. Malinowski [7] (Польща), Б. Залеський, К. Айда-заде, Дж. Гасанов, Е. Мустафаєв, В. Бериков та ін. [8] (Росія) та багато інших.

Як показали зазначені дослідники, теоретичні основи контурного аналізу та аспекти його практичного застосування для розпізнавання зображень є базою для подальших досліджень проблеми достовірної обробки даних, які можуть бути отримані спеціальними засобами в технологічних системах та мережах.

Невирішені проблеми

Окрім вище сказаного, для вирішення багатьох проблемних питань, необхідно привести деякі основні викладки, які, в основному, стосуються аспектів теорії. Як показав аналіз, багато таких питань недостатньо системно викладені в літературних джерелах. До них, наприклад, відносяться питання уточнення щодо використання відомих алгоритмів обробки зображень стосовно до спеціальних технологічних систем та мереж. Так, у таких системах однією з найбільш важливих складових є швидкість обробки зображення з метою прийняття оперативних рішень. При цьому рішення повинне прийматися з практично 100% вірогідністю, враховуючи той факт, що найчастіше воно приймається в автоматичному режимі.

Мета статті

Враховуючи сказане, метою статті є огляд, систематизація та внесення удосконалень щодо основних теоретичних положень про сплайн-методи, які можуть бути використані для дослідження методів розпізнавання зображень.

Виклад основного матеріалу

Перед тим, як розпочати розгляд основних елементів сплайн-методів, які можуть бути використані для обробки контурів зображень, приведемо загальні відомості щодо історії їх появи та загальних областей їх застосування. Так, поява *сплайнів* (див. далі) була наслідком теорії полігонального моделювання. ***Полігональне моделювання*** (від англ. *polygonal modeling*) [9] – це найперший різновид тривимірного моделювання, яке з'явилася в ті часи, коли для визначення точок у тривимірному просторі доводилося вводити вручну з клавіатури координати *X*, *Y* та *Z*. Як відомо, якщо три або більше точок координат задані в якості вершин і з'єднані ребрами, то вони формують багатокутник (полігон), який може мати колір та текстуру. З'єднання групи таких полігонів дозволяє змоделювати практично будь-який об'єкт. Недолік полігонального моделювання полягає в тому, що всі об'єкти повинні складатися з крихітних плоских поверхонь, а полігони повинні мати дуже малий розмір, інакше краї об'єкта будуть мати нечіткий вигляд. Це означає, що якщо для об'єкта передбачається збільшення, його необхідно моделювати з більшою кількістю полігонів (щільністю). Завдяки зростанню потужності процесорів та графічних адаптерів, останнім часом в графічних програмах спостерігається перехід з *полігонів* на *сплайни* і, на даний момент, вже існують програми, які абсолютно не підтримують технології полігонального моделювання. У зв'язку з цим багатофункціональні засоби редагування полігонів поступово перетворилися в інструменти для роботи зі сплайнами. Саме такі полігони є одним з предметів дослідження.

За встановленим означенням, ***сплайн*** (англ. *spline* – планка, рейка) [10] – функція, область визначення якої розбита на кінцеве число відрізків на кожному з яких сплайн співпадає з деяким алгебраїчним поліномом. Максимальний ступінь з використаних поліномів в науковій літературі називають *ступенем сплайну*. Різниця між ступенем сплайну та гладкістю, яка отримана в процесі обробки, названа *дефектом сплайну*. В подальшому поняття про сплайн будемо використовувати як в явному, так і неявному вигляді при описі тих чи інших процедур оброки зображень.

Як правило, об'єкти на зображеннях, які обробляються в технологічних системах, характеризуються істотною значущістю фонової складової, яка може перевищувати по амплітуді корисний сигнал, що надзвичайно ускладнює обробку зображення з метою виділення необхідного контуру. Це, звичайно, призводить до збільшення часу обробки.

Попередні дослідження показали, що безпосереднє використання стандартних методів обробки зображень виявляється неефективним, в основному, в силу складності та динамічності фонової та стохастичної складових тих процесів, за якими ведеться спостереження. Як зазначається в науковій літературі, на сьогоднішній день емпіричними шляхами є можливість підібрати попередні комбіновані методи обробки зображень, які забезпечують зниження впливу фону на результати спостережень. Це дозволило перейти до наступної задачі по виділенню характерних зон, пов'язаних з аналізом стану об‘єкту за яким ведеться спостереження. Т.ч., *однією зі складових статті* є аналіз існуючих методів сегментації та виявлення комплексного перетворення, що забезпечує виділення зон, діагностично важливих при обробці зображень.

Виходячи зі сказаного та з врахуванням даних, які є в достатньо чисельній літературі, було встановлено, що в основу методів сегментації покладені властивості розривності. При цьому виявлено, що інформативними ознаками є:

– різкі зміни яскравості;

– перепади інтенсивності та неоднорідності в сенсі заздалегідь обраних критеріїв сигналу яскравості.

Відомі методи дослідження розривів яскравості напівтонових зображень засновані на обробці зображень ковзною ізотропною або анізотропною маскою з підбором її коефіцієнтів відповідно до розв’язуваного завданням. Це еквівалентно визначенню першої та другої похідних на перепаді яскравості операторами Собеля та Лапласа.

Як слідує з літературних джерел [11], *оператор Собеля* застосовується в алгоритмах виділення меж. По суті, це дискретний диференційний оператор, що обчислює наближене значення градієнта яскравості зображення. Результатом застосування оператора Собеля в кожній точці зображення є або вектор градієнта яскравості в цій точці, або його норма. Оператор Собеля заснований на згортці зображення невеликими сепарабельними цілочисельними фільтрами у вертикальному та горизонтальному напрямах, тому його відносно легко обчислювати. З іншого боку, використовувана ним апроксимація градієнта досить груба, особливо це позначається на високочастотних коливаннях зображення. Як наслідок, можемо констатувати, що оператор Собеля доцільно використовувати при попередньому аналізі зображень. Спрощено суть використання полягає в наступному.

Оператора Собеля обчислює градієнт яскравості зображення в кожній точці. По суті, знаходиться напрям найбільшого збільшення яскравості та величина її зміни в цьому напрямі. Результат його використання показує, наскільки «різко» або «плавно» міняється яскравість зображення в кожній точці, а значить, ймовірність знаходження точки на грані, а також орієнтацію межі. Як показала практика, обчислення величини зміни яскравості (ймовірність приналежності до грані) є надійнішим та простішим методом щодо інтерпретації результатів, ніж розрахунок напряму.

Математично, градієнтом функції двох змінних для кожної точки зображення (що, по суті, являється *функцією яскравості*) є двовимірний вектор, компонентами якого є похідні яскравості зображення по горизонталі та по вертикалі. У кожній точці зображення градієнтний вектор орієнтований у напрямі найбільшого збільшення яскравості, а його довжина відповідає величині зміни яскравості. Це означає, що результатом оператора Собеля в конкретній точці області постійної яскравості буде нульовий вектор, а в точці, що лежить на межі областей різної яскравості – вектор, який перетинає межу у напрямі збільшення яскравості.

По методиці, яка пропонується деякими вченими, розглянемо формальну сторону питання щодо використання оператора собеля. строго кажучи, по визначенню, оператор використовує ядра 3×3, з якими згортається початкове зображення для обчислення наближених значень похідних по горизонталі та по вертикалі.

нехай A початкове зображення, а G_X та G_Y – два зображення, у яких кожна точка містить наближені похідні по x та по y. вони можуть бути обчислені таким чином:

$$G_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix} * A \text{ and } G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} * A\ ,$$

де символ $*$ позначає двовимірну операцію згортки.

У приведеному виразі координата x зростає «направо», а y – «вниз».

У кожній точці зображення наближене значення величини градієнта можна поелементно обчислити, використовуючи набуті наближення значень похідних, а саме:

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}\,.$$

З використанням цієї інформації обчислюється напрям градієнта:

$$\Theta = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right),$$

де, наприклад, кут Θ, що дорівнює нулю для вертикальної межі у якої темна сторона зліва.

Втім, оскільки функція яскравості відома тільки в дискретних точках, немає можливості визначити похідні до тих пір, поки не яскравість не покладена у вигляді такої функції, яка є безперервною та проходить через ці точки. З врахуванням цієї додаткової передумови похідну безперервної функції яскравості можна обчислити від функції, з якої взяті виміри, тобто точки зображення. виявляється, що похідні в будь-якій окремій точці є функціями яскравості від всіх точок зображення. Проте наявні методи обчислень дозволяють розрахувати лише наближення їх похідних з більшим або меншим ступенем точності.

Оператор Собеля представляє собою менш точне наближення градієнта зображення, але він достатньо якісний для практичного застосування в багатьох задачах. З об'єктивної точки зору оператор використовує значення інтенсивності кожного пікселя тільки в околицях раніше розглянутої матриці (ядра) 3×3 для отримання наближення відповідного градієнта зображення. При цьому для оцінки градієнта використовуються тільки цілочисельні значення вагових коефіцієнтів яскравості. Втім, в літературних джерелах відзначається, що оператор Собеля може бути розширений на іншу кількість вимірювань, крім вище розглянутої. так, він складається з двох окремий операцій:

1) Згладжування трикутним фільтром в напрямі, який є перпендикулярним до похідній, тобто: $h(-1)=1$, $h(0)=2$, $h(1)=1$;

2) Знаходження простої центральної зміни у напрямі похідної, тобто: $h'(-1)=1$, $h'(0)=0$, $h'(1)=-1$.

Фільтри Собеля для похідних зображення в різних просторах для $x, y, z, t \in (0,-1,1)$ записуються так:

1D: $h'_x(x) = h'(x)$;

2D: $h'_x(x,y) = h'(x)h(y)$;

3D: $h'_x(x,y,z) = h'(x)h(y)h(z)$;

4D: $h'_x(x,y,z,t) = h'(x)h(y)h(z)h(t)$.

Приклад тривимірного ядра Собеля для осі z:

$$h'_z(:,:,-1) = \begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ +2 & +4 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix};\ h'_z(:,:,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ h'_z(:,:,1) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Розглянемо технічні деталі щодо практичної реалізації оператора Собеля.

Як випливає з визначення, зазначений оператор можна реалізувати простими технічними та програмними засобами: для наближення вектор-градієнта потрібні тільки вісім пікселів навколо точки зображення і цілочисельна арифметика. Більш того, обидва дискретні фільтри, згадані вище, можна розділити, тобто:

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +2 & 0 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} +1 & + & +1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тепер дві похідні, тобто G_x та G_y, обчислюються так:

$$G_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * A \right) \text{ and } G_x = \begin{bmatrix} +1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * A \right).$$

Роздільність приведених обчислень може привести до зменшення арифметичних дій з кожним пікселом, що, в принципі, відповідає поставленій меті.

Застосування згортки K до групи пікселів P представляється псевдокодом:

$$N(x, y) = \sum_{i}^{j} K(i, j) P(x - i, y - j) \text{ для } i,\ j \in (-1,1).$$

Значення $N(x, y)$ є результатом застосування матриці згортки K до P.

Програмна реалізація оператора Собеля може ефективно використовувати SIMD-расширения [12] системи команд сучасних процесорів, де SIMD-розширення має на увазі векторизацію коду. При цьому виграш в швидкості обчислення оператора, як зазначають багато дослідників, може складати до 5 разів в порівнянні з високорівневою реалізацією, відомості про яку також є в науковій літературі.

Як видно з приведеного, оператор Собеля може згладжувати паразитні ефекти на зображенні, що викликаються чисто центрально-диференційним оператором, але не володіє повною дзеркальною симетрією [13]. З метою усунення цього недоліку пропонується використати дослідження Щарра, який поліпшив оператор Собеля, і знайшов, що кращі результати дає наступне ядро:

$$\begin{bmatrix} +3 & +10 & +3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +3 & 0 & -3 \\ +10 & 0 & -10 \\ +3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Тепер проаналізуємо можливості використання оператора Лапласа [14].

Оператор *<u>Лапласа</u>* – диференційний оператор, що діє в лінійному просторі гладких функцій, та позначається як Δ. Досліджуваній функції F оператор Лапласа ставить у відповідність функцію $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) F$.

За визначенням, оператор Лапласа еквівалентний послідовному виконанню операцій градієнта та дивергенції, тобто: $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. Т.ч., значення оператора Лапласа в деякій точці може бути пояснено як щільність джерел потенційного векторного поля $\operatorname{grad} F$ в цій точці. В системі координат Декарта оператор Лапласа часто позначають, як $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \Delta^2$, тобто у вигляді скалярного добутку оператора Набла [15] на себе. Слід зазначити, що оператор Лапласа є унітарним оператором, тобто програмно-математична складність його обчислення є достатньо простою. Покажемо можливість його використання для рішення проблеми дослідження.

Для досягнення поставленої мети, розглянемо наступне визначення оператора Лапласа [14].

Оператор Лапласа є природним узагальненням на функції декількох змінних звичайної другої похідної функції однієї змінної. Так, якщо функція $f(x)$ має в околиці точки x_0 безперервну другу похідну $f''(x)$, то, як це витікає з відомої формули Тейлора [16],

$$f(x_0+r)=f(x_0)+rf'(x_0)+\frac{r^2}{2}f''(x_0)+O(r^2), \text{ при } r\to 0;$$
$$f(x_0-r)=f(x_0)-rf'(x_0)+\frac{r^2}{2}f''(x_0)+O(r^2), \text{ при } r\to 0.$$

Другою похідною є межа

$$f''(x_0)=\lim_{r\to 0}\frac{2}{r^2}\left\{\frac{f(x_0+r)+f(x_0-r)}{2}-f(x_0)\right\}.$$

Якщо, переходячи до функції F від k змінних, поступити таким же чином, тобто для заданої точки $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_k^0\right)$ розглядати її k-мірну кульову околицю Q_r радіусу r і різницю між середнім арифметичним $\frac{1}{\sigma(S_r)}\int_{S_r}Fd\sigma$ функції F на межі S_r такої околиці з площею межі $\sigma(S_r)$ і значенням $F(M_0)$ в центрі цієї околиці M_0, то у разі безперервності других часткових похідних функції F у околиці точки M_0, значенням лапласіана ΔF у цій точці, є межа $\Delta F(M_0)=\lim_{r\to 0}\frac{2k}{r^2}\left\{\frac{1}{\sigma(S_r)}\int_{S_r}F(M)d\sigma-F(M_0)\right\}$.

Одночасно з попереднім представленням для оператора Лапласа функції F, що має безперервні другі похідні, справедлива формула:

$$\Delta F(M_0)=\lim_{r\to 0}\frac{2(k+2)}{r^2}\left\{\frac{1}{\omega(Q_r)}\int_{Q_r}F(M)d\omega-F(M_0)\right\},$$

де $\omega(Q_r)$ – об'єм околиці Q_r.

Ця формула виражає безпосередній зв'язок лапласіана, як функції з її об'ємним середнім в околиці даної точки. Доказ цих формул приведений в [17].

Вищевикладені межі, у всіх випадках, коли вони існують, можуть служити визначенням оператора Лапласа функції F. Таке визначення щодо його практичного використання, є більш переважним, ніж звичайне визначення лапласіана, що припускає існування других похідних даних функцій, і співпадає зі звичайним визначенням у разі безперервності цих похідних. Втім, з наукової точки зору, для досліджень може бути цікавим представлення оператора Лапласа у різних криволінійних системах координат і, відповідно, покажемо зазначене так, як це зроблено в [14].

У довільних ортогональних криволінійних координатах у тривимірному просторі $\langle q_1,q_2,q_3\rangle$ оператор Лапласа може бути записаний так:

$$\Delta f\langle q_1,q_2,q_3\rangle=\operatorname{div}\operatorname{grad} f(q_1,q_2,q_3)=$$
$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right],$$

де H_i – коефіцієнти Ламе [18], які розраховуються так, як це показано нижче.

Застосовуючи відоме правило сумування Ейнштейна, диференціал дуги в криволінійних координатах записується у вигляді:

$$dS^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\mathbf{dq}_i\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\mathbf{dq}_i\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\mathbf{dq}_i\right)^2, \ i = 1,2,3 \cdot$$

Зважаючи на ортогональність систем координат, тобто $\mathbf{dq}_i \cdot \mathbf{dq}_i = 0$ при $i \neq j$, є можливість запису цього виразу у вигляді:

$$dS^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2,$$

де $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)^2}, \ i = 1,2,3 \cdot$

Позитивні величини H_i, залежні від точки простору, в літературі називають коефіцієнтами Ламе [18] або *масштабними коефіцієнтами*. Коефіцієнти Ламе показують, скільки одиниць довжини міститься в одиниці координат даної точки і використовуються для перетворення векторів при переході від однієї системи координат до іншої. Тензор риманової метрики [19], записаний в координатах $\mathbf{q}_i$, представляє з себе діагональну матрицю, на діагоналі якої стоять квадрати коефіцієнтів Ламе, а саме:

$$\left.\begin{aligned} q_{ii} &= H_i^2 \\ q_{ij} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ для } i \neq j \text{, тобто } q_{ij} = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{pmatrix} \cdot$$

В циліндричних координатах оператор Лапласа може бути записаний так:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

де $r \neq 0$.

Для сферичних координат поза початком відліку (тобто в тривимірному просторі):

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

або

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} rf + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \cdot$$

У тому випадку, коли $f = f(r)$, в n-вимірному просторі оператор записується у вигляді:

$$\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr} \cdot$$

Для параболічних координат поза початком відліку (тобто в тривимірному просторі):

$$\Delta f = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right) + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)\right] + \frac{1}{\sigma^2\tau^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \cdot$$

Для координат параболічного циліндру поза початком відліку (тобто в тривимірному просторі):

$$\Delta F(u,v,z) = \frac{1}{c^2\left(u^2 + v^2\right)}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

І на закінчення покажемо, який вид має оператор Лапласа у загальних криволінійних координатах в просторі Римана [14].

Нехай плоскій множині *X* задана локальна система координат, а q_{ij} є риманів метричний тензор на *X*, тобто метрика має вигляд:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} dx^i dx^j \cdot$$

Позначимо через q^{ij} елементи матриці $(q_{ij})^{-1}$, а також $q = \det q_{ij} = \left(\det q^{ij}\right)^{-1}$. Дивергенція векторного поля F, яке задане координатами F^i (тобто такого поля, яке є диференційним оператором першого порядку $\sum_i F^i \frac{\partial}{\partial x^i}$) на плоскій множині X може бути обчислена по формулі $\operatorname{div} F = \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\sqrt{q}F^i$, а компоненти градієнта функції f – по формулі $\left(\nabla f\right)^i = \sum_{i=1}^{n} q^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}$. Свого часу Бельтрамі [20] показав, що на плоскій множині X оператор Лапласа можна представити у скалярній формі, тобто значення Δf не змінюється при будь-якому перетворенні координат. Оператор отримав назву «оператор Лапласа-Бельтрамі» і записується у вигляді:

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\nabla f\right) = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{q}\sum_{k=1}^{n} q^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right).$$

Як видно з вище приведеного, основна складність при використанні операторів Собеля та Лапласа для розпізнавання зображень, полягає в суттєвому впливі шумів на результати сегментації. Подальші проведені дослідження показали можливість використання цих методів лише спільно з попередньою фільтрацією зображень. На практичних випробовуваннях доцільним виявився метод, який використовує *дискретний оператор Лапласа* у якості цифрового фільтру.

Покажемо, що дискретний оператор Лапласа є саме тією математичною основою, яку доцільно використати для вирішення поставленого завдання, тобто для найбільш точного та достовірного розпізнавання зображень.

У математиці ***дискретний оператор Лапласа*** – аналог безперервного оператора Лапласа, який визначається як відношення на графі або дискретній сітці. У разі скінченномірного графа (що має кінцеве число вершин і ребер) дискретного оператора Лапласа має більш загальну назву – *матриця Лапласа*.

Згідно [21], поняття про дискретний оператор Лапласа походить з таких фізичних проблем, як модель Ізінга [22] та петльова квантова гравітація [23], а також з визначення динамічних систем [24]. Цей оператор використовується в обчислювальній математиці як аналог безперервного оператора Лапласа. Будучи відомим як фільтр Лапласа, він знайшов застосування в системах обробки зображень. Крім того, оператор використовується в машинному навчанні для кластеризації та напівавтоматичного навчання на графах сусідства [25].

Приведемо загальні відомості стосовно визначення дискретного оператора Лапласа [14] щодо обробки зображень.

Так, найчастіше зазначений оператор використовується при рішенні задач виділення контурів (меж, границь) та в додатках оцінки руху. У цьому сенсі дискретний лапласіан визначається як сума других похідних та обчислюється як сума перепадів на сусідах центрального піксела. Нами виконана практична реалізація цього алгоритму, але тут не приводиться у зв‘язку з достатньо великими обсягами отриманих даних.

Для одновимірних, двомірних та тривимірних сигналів дискретний лапласіан представляється як згортка з такими ядрами (фільтрами) [14]:

1D: $\vec{D}_x^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

2D: $\boldsymbol{D}_{xy}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

або з діагоналями:

2D: $\boldsymbol{D}_{xy}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

3D: для першої похідної: $\boldsymbol{D}_{xy}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

для другої похідної: $\boldsymbol{D}_{xy}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

для третьої –похідної: $\boldsymbol{D}_{xy}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ці ядра виводяться на основі відомих алгоритмів за допомогою дискретних часткових похідних. Саме ж представлення дискретного лапласіана для графа полягає в наступному [14].

Є різні визначення дискретного лапласіана, що розрізняються знаком та масштабним коефіцієнтом (іноді середні на сусідніх вершинах, іноді просто сума; це не має значення, якщо граф є регулярним).

Так, нехай $G=(V,E)$ буде графом з вершинами V та ребрами E. Нехай задана функція значень ϕ: $V \to R$. Тоді дискретний лапласіан Δ від ϕ буде визначатися, як $(\Delta\phi)(v) = \sum_{\omega:d(\omega,v)=1} \left[\phi(\omega)-\phi(v)\right]$, де $d[\omega,v]$ – функція відстані між вершинами графа. Ця сума – на найближчих сусідах вершини v. Для графа з кінцевою кількістю вершин та ребер це визначення співпадає з матрицею Лапласа, тобто ϕ може бути записано як вектор-стовбець, $\Delta\phi$ є вектор-стовбець, помножений на матрицю Лапласа, а $(\Delta\phi)(v)$ є лише запис векторного добутку для v. Якщо ребра графа мають ваги, тобто задана вагова функція $\gamma: E \to R$, то визначення записується у вигляді: $(\Delta_\gamma\phi)(v) = \sum_{\omega:d(\omega,v)=1} \gamma_{\omega v}\left[\phi(\omega)-\phi(v)\right]$, де γ – вага ребра $\omega v \in E$.

Доцільним є використання *усереднюючого оператора* [26]:

$$(M\phi)(v) = \frac{1}{\deg v} \sum_{\omega:d(\omega,v)=1} \phi(\omega)$$

Спектр дискретного Лапласіана представляє ключовий інтерес: коли він має самозв'язаний спектр, він є дійсним. Якщо $\Delta = I - M$, то спектр лежить на відрізку $[0,2]$ та містить нуль (для постійних функцій). В той же час для усереднюючого оператора його спектральні значення лежать на відрізку $[-1,1]$. Найменше ненульове власне число λ_1 в літературі називають спектральною щілиною. Зазвичай розрізняють і поняття про спектральний радіус, визначуваний як найбільше власне число.

Власні вектори не залежать від умовностей (для регулярних графів), і вони схожі з власними векторами усереднюючого оператора (розрізняючись додаванням), хоча власні значення можуть розрізнятися залежно від попередніх домовленостей [27].

Основою щодо використання Лапласіана для вирішення задач розпізнавання зображень, є наступна теорема.

Теорема. якщо граф представлений у вигляді нескінченних квадратних ґрат, то визначення Лапласіана можна пов'язати з безперервним лапласіаном через межу нескінченних ґрат.

Доведення. Доведенням є наступна формула:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left[F(x+\varepsilon) - F(x)\right] + \left[F(x-\varepsilon) - F(x)\right]}{\varepsilon^2}.$$

Теорема доведена.

Саме приведене визначення Лапласіана використовується в обчислювальній математиці та може бути використане при обробці зображень. У останньому випадку воно може розглядатися як різновид цифрового фільтру, або як граничний фільтр, що відомий з літератури [14], як фільтр Лапласа.

Не зважаючи на те, що для практичного використання є вибір дискретного оператора Лапласа та на його основі – фільтра Лапласа, для повноти огляду приведемо також узагальнюючі відомості щодо можливого застосування інших операторів-фільтрів. У цьому сенсі зазначимо, що їх технічна та програмна реалізація є ненабагато складнішою у порівнянні з математичними засобами Лапласа і, при необхідності, вони можуть бути використані при обробці зображень.

Розглянемо дискретний оператор Шредінгера [28].

Нехай $P: V \to R$ є потенціал, заданий на графі. Відмітимо, що P можна розглядати і як мультиплікативний оператор, що діє діагонально на ϕ: $(P\phi)(v) = P(v)\phi(v)$. Тоді $H = \Delta + P$ є дискретним оператором Шредінгера, тобто аналогом відомого неперервного оператора Шредінгера.

Якщо кількість ребер вершини рівномірно обмежена, то H є обмеженим і самозв'язаним. Спектральні властивості його гамільтоніана [29] можуть бути отримані з теореми Стоуна [30]: це слідство з подвійності між частково впорядкованими множинами та булевою алгеброю.

На регулярних ґратах оператор **Шредінгера** зазвичай має і хвилю, що біжить, і вирішення локалізації Андерсона – залежно від періодичності або випадковості потенціалу.

Наостаннє розглянемо дискретну функцію Гріна [31]. Вона пов'язана та слідує з оператора Шредінгера. Так, функція Гріна дискретного оператора Шредінгера задається резольвентою лінійного оператора [32]:

$$G(v,\omega,\lambda) = \left\langle \delta_v \left| \frac{1}{H-\lambda} \right| \delta_\omega \right\rangle,$$

де δ_ω розуміється як символ Кронекера [33] на графі $\delta_\omega(v) = \delta_{\omega v}$, тобто це дорівнює 1, якщо $v = \omega$, та 0 – в інших випадках.

Для фіксованого $\omega \in V$ та комплексного λ, функция Гріна розглядається як функція від v, та дає єдине унікальне рішення у вигляді рівняння:

$$(H-\lambda)G(v,\omega;\lambda) = \delta_\omega(v).$$

Висновки

Зважаючи на той факт, що проблема автоматичного аналізу форми та стану просторових об'єктів, інформація про які представлена у вигляді зображень, є актуальною для охоронних систем та інших систем безпеки, розглянуті основні теоретичні аспекти щодо систематизації методів контурного аналізу та аспекти його практичного використання спеціальними засобами в технологічних системах та мережах. Приведений огляд та внесенні удосконалень щодо основних теоретичних положень про сплайн-методи, можуть бути використані для дослідження методів розпізнавання зображень з метою оптимізації швидкості обробки зображень в системах оперативного прийняття рішень.

Список літератури: **1**. Kanade, T. The image stabilizer plugin for Image [Електронний ресурс] / *T. Kanade, B. Lucas* // Портал : без назви. – Режим доступу \www/ URL: http://www.cs.cmu.edu/~kangli/code/Image_Stabilizer.html. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 30.10.2012.**2.** *Прэтт, У.* Цифровая обработка изображений [Текст] : пер. с англ. / *У. Прэтт*. – В 2-х кн. – М. : Мир, 1982. – 792 с. **3**. *Kaas, M.* Analyzing oriented patterns [Текст] / M. Kaas, A. Witkin // Comput. Vision Graphics Image Process. – 1987. – 362-385. **4**. *Terzopoulos, D.* Regularization of inverse visual problems involving discontinuities [Текст] / *D. Terzopoulos* // IEEE Trans. PAMI. – 1986. – №4(8). – pp. 413-424. **5.** *Arulampalam, M. A* Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/ Non-Gaussian Bayesian Tracking [Текст] / *M. Arulampalam, S. Maskell*, N. Gordon, T. Clapp // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2002. – Vol. 50. – №2. – pp. 174-188. **6**. *Gonzalez, R.* Digital Image Processing [Електронний ресурс] / *R. Gonzalez, R.* Woods // Addison Wesley Longman. – AWL, Inc. – 1992. – Портал : без назви. – Режим доступу \www/ URL: 202.197.67.17/yxtxcl/xtysj/dip_ answer.pdf. – Заголовок з контейнера, доступ вільний, 30.10.2012. **7**. *Wilamowski, B. M.* Computing Gradient Vector and Jacobian Matrix in Arbitrarily Connected Neural Networks [Текст] / *B. M. Wilamowski* та ін. – IEEE Transactions On Industrial Electronics. – 2008. – T. 55. – №10. – C. 3784-3790. **8**. Математические методы распознавания образов [Електронний ресурс]: Доклады XI Всерос. конф. (окт. 2003) / отв. ред. *Ю. И. Журавлев*. – М. : РАН, 2003. – 511 с. – Портал: без назви. – Режим доступу \www/ URL: http://window.edu.ru/resource/825/50825/files/mmro11.pdf. – Заголовок з контейнера, доступ вільний, 30.10.2012**. 9.** Polygonal Modeling [Електронний ресурс] / Портал : без назви. – Режим доступу \www/ URL:http://www.arch.cuhk.edu.hk/server1/staff1/marcaurel/desc9019/tutorials/Readings/mayaDocs/ PolygonalModeling. pdf. – Заголовок з контейнера, доступ вільний, 28.09.2012. **10**. Spline [Електронний ресурс]/Портал: En.wikipedia.– Режим доступу \www/ URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics). – Заголовок з екрану, доступ вільний, 23.10.2012. **11**. Оператор Собеля [Електронний реурс] / Портал : Ru.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/оператор_Собеля. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 16.10.2012. **12.** Prescott New Instructions (SSE3): обзор новых SIMD расширений с точки зрения разработки и оптимизации программного обеспечения [Електронний ресурс] / Портал: IXBT. – Режим доступу \www/ URL: http://www. ixbt.com/cpu/sse3.shtml. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 17.10.2012. 13. Методи згладжування та корекції зображень [Електронний ресурс] / Портал: без назви. – Режим доступу \www/ URL: http://www.kazedu.kz/referat/192238. – Заголовок з екрану, доступ умовно-вільний, 17.10.2012. **14.** Оператор Лапласа [Електронний ресурс] / Портал: Wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/оператор_Лапласа. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 05.11.2012. **15.** Оператор набла в различных системах координат [Електронний ресурс] / Портал : Ru.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Оператор_Набла_в различных системах координат. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 05.11.2012. **16**. Формула Тейлора. Степенные ряды [Електронний ресурс] / Портал : Прикладная математика. – Режим доступу \www/ URL: http://www.pm298. ru/tei.php. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 05.11.2012. **17.** *Тиман, А. Ф.* Введение в теорию гармонических функций : монография / *А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов*. – М. : Наука, 1968. – 208 с. **18**. Коэффициенты Ламе [Електронний ресурс] / Портал: Wikia. – Режим доступу \www/ URL: http://ru.math.wikia.com/wiki/Коэффициенты_Ламе. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 04.11.2012. **19**. Риманова метрика [Електронний ресурс] / Портал: Академик. – Режим доступу \www/ URL: http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/ 4844/Риманова. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 30.09.2012. **20**. Laplace-Beltrami operator [Електронний ресурс] / Портал : En.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace-Beltrami_operator. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 30.09.2012. **21**. Дискретный оператор Лапласа [Електронний ресурс] / Портал: Wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Дискретный_оператор_Лапласа. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 27.09.2012. **22**. Модель Ізінга [Електронний ресурс] / Портал: Uk.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://uk.wikipedia.org/wiki/Модель_Ізінга. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 05.11.2012. **23**. Петльова квантова гравітація [Електронний ресурс] / Портал: Uk.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://uk.wikipedia.org/wiki/ Петльова_квантова_гравітація. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 27.09.2012. **24**. Динамічна система [Електронний ресурс] / Портал: Uk.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://uk.wikipedia.org/wiki/Динамічна_система. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 28.09.2012. 25. Способы задания графов и операции над графами [Електронний ресурс] / Портал Образовательный блог – всё для учебы. – Режим доступу \www/ URL:

http://all4study.ru/matematika/sposoby-zadaniya-grafov-i-operacii-nad-grafami.html. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 09.09.2012. **26**. Усредняющий оператор [Електронний ресурс] / Портал : Академик. – Режим доступу \www/ URL: http://universal_ru_en.academic.ru/2891741/ Усредняющий_оператор. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 21.09.2012. **27**. Собственные векторы, значения и пространства [Електронний ресурс] / Портал : Ru.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Собственные_векторы,_значения_и_пространства, 05.11.2012. 28. Шрёдингера оператора спектр [Електронний ресурс] / Портал : Академик. – Режим доступу \www/ URL: http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_ physics/5233/Шрёдингера. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 27.09.2012. **29.** Гамильтониан [Електронний ресурс] / Портал : Энциклопедия физики и техники. – Режим доступу \www/ URL: http://www.femto.com.ua/articles/part_1/0668.html. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 28.09.2012. **30**. Теорема Стоуна про представления булевих алгебр [Електронний ресурс] / Портал: Uk.wikipedia. – Режим доступу \www/ URL: http://uk.wikipedia.org/wiki/Теорема_Стоуна_про_представления_булевих_алгебр. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 01.10.2012. **31**. Функция Грина [Електронний ресурс] / Портал : Wikia. – Режим доступу \www/ URL: http://ru.math.wikia.com/wiki/Функция_Грина. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 01.10.2012. **32**. Резольвента [Електронний ресурс] / Портал : без назви. – Режим доступу \www/ URL: http://znaimo.com.ua/Резольвента.doc. – Заголовок з контейнера, доступ вільний, 01.10.2012. **33**. Символ Кронекера [Електронний ресурс] / Портал : Викизнание http://www.wikiznanie.ru/ru-wz/index.php/Символ_Кронекера. – Заголовок з екрану, доступ вільний, 01.10.2012.

Надійшла до редколегії 06.11.2012

УДК 519.6 : 616-073.75

Аналіз сплайн-методів з метою їх застосування ля обробки контурів зображень/ О. О.Фразе-Фразенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2012. - № 66 (972). – С. 52-63. – Бібліогр.: 33 назв.

Приведено описание и краткий анализ сплайн-методов, которые используются или могут быть использованы для контурной обработки изображений. Рассматриваются: оператор Лапласа, фильтр Лапласа, матрица Лапласа, оператор Собеля, дискретная функция Грина, дискретный оператор Шредингера. Ил.: 0. Библиогр.: 33 назв.

Ключевые слова: контур, изображение, оператор Лапласа, фильтр Лапласа, матрица Лапласа, оператор Собеля, дискретная функция Грина, дискретный оператор Шредингера.

A description and brief analysis of spline methods that are used or can be used for contouring images. Considered: the laplacian, the filter of Laplace, the matrix of Laplace, the operator of Sobel, the discrete Green's function, the discrete Schrödinger operator. Im.: 0 : Bibliogr.: 33.

Keywords: contour, images, laplacian, filter of Laplace, matrix of Laplace, operator of Sobel, discrete Green's function, discrete Schrödinger operator.

УДК 621.391

В. В. КОРЧИНСКИЙ, канд. техн. наук, доц., Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

ПОВЫШЕНИЕ СКРЫТНОСТИ ПЕРЕДАЧИ НА ОСНОВЕ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕСТРОЙКИ РАБОЧЕЙ ЧАСТОТЫ И ТАЙМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Для задачи повышения скрытности передачи предложен метод формирования сигнальных конструкций на основе псевдослучайной перестройки рабочей частоты и таймерных сигналов.

Ключевые слова: таймерный сигнал, псевдослучайная перестройка рабочей частоты.

Введение

В последнее время все больше внимания уделяется методам защиты передаваемой конфиденциальной информации на уровне физического канала [1]. Объясняется это возросшими возможностями средств несанкционированного доступа (НСД) по перехвату сигналов в канале и их дешифрированию.