

**УДК 536-12:517.956.4:622**

*А. П. СЛЕСАРЕНКО*, д-р физ.- мат. наук, проф., вед. н. сотр. Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. Харьков;  
*И. Р. ВЕНГЕРОВ*, канд. физ.-мат. наук, ст. н. сотр. Института Физики горных процессов НАН Украины, Донецк

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ «МАССИВ-ПОЛОСТЬ»**

В статье обоснована, сформулирована и исследована математическая модель сопряженного теплообмена в системе «однородный горный массив-сферическая полость с источниками тепла» для прогнозирования аварийной температурной динамики в полости. Система краевых задач теплопроводности решена приближенным и численным методами.

**Ключевые слова:** горный массив, полость, сопряженный теплообмен, численный метод.

#### **Введение**

Рассматриваемая математическая модель, имеющая общетеплофизическое значение, инициирована потребностью в разработке метода прогноза аварийной температурной динамики в замкнутой полости горного массива, в которой находятся горнорабочие (т.н. «нулевой» режим проветривания подземной горной выработки [1]).

В семидесятые годы прошлого века предпринимались попытки моделирования нулевого режима: рассматривался теплообмен в системе «замкнутая подземная полость – горный массив» [1,2,3]. В этих моделях не учитывались источники тепла в подземной полости и начальная температурная неоднородность горного массива.

В последнее десятилетие такие модели вновь привлекли к себе внимание, в связи с разработками «модулей – укрытий», размещаемых в горных выработках [4,5]. Актуальным является также построение таких моделей (сопряженного теплопереноса в системе «полость – массив» при наличии в полости источников тепла и массы и теплофизической неоднородности массива) в связи с проектированием и строительством подземных хранилищ радиоактивных отходов, подземных атомных электростанций и полигонов захоронения вредных веществ [6 – 9].

#### **Вербальная формулировка модели**

Рассматривается изолированная выработка, имеющая близкую к сферической форму, окруженная сплошным однородным (теплофизически) горным массивом. Теплоперенос в массиве осуществляется теплопроводностью. В полости процессы более сложны: поскольку слабое движение воздуха всё же присутствует, имеется вынужденная конвенция. Ввиду температурной неоднородности (различие температур воздуха и поверхности тела горнорабочих, воздуха вблизи кровли и почвы камеры) имеется естественная температурная конвекция. Работа системы терморегуляции организмов горнорабочих ведёт к выделению и испарению влаги (пота), т.е. имеют место также процессы массообмена.

© А. П. СЛЕСАРЕНКО, И. Р. ВЕНГЕРОВ, 2013

Моделирование процессов естественной конвекции в трубах и полостях правильных форм требует задания большого числа параметров, в шахтных условиях не известных и весьма сложных математических конструкций [10,11]. Моделирование теплообмена организма горнорабочего с окружающей средой, даже при упрощенном, инженерном подходе, также требует знания многих эмпирических (практически отсутствующих) данных [12, 13].

Эти обстоятельства диктуют изначальный отказ от попыток «учесть всё» и ограничения претензий на «строгость и окончательность» модели. Рассматривается упрощенная, «рамочная» модель, предпосылки построения которой следующие.

1. Теплоперенос в полости (область  $\Omega_0^{(3)} = \{r \in (0, r_0)\}$ ) осуществляется теплопроводностью с эффективным коэффициентом температуропроводности  $a_e = \lambda_0 / c_0$ , где  $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности воздуха,  $c_0 = A^{-1} \rho c_p$  – эффективная теплоёмкость воздуха, зависящая от его плотности ( $\rho$ ), удельной теплоёмкости при постоянном давлении ( $c_p$ ) и теплового коэффициента влагообмена ( $A$ ) [1]. 2. Выделение тепла организмом одного горнорабочего постоянно и соответствует состоянию покоя, составляя  $Q_0 = 100$  ккал/час [14]. 3. Моменту начала нулевого режима ( $\tau = 0$ ) соответствует время  $t = t_1$  – продолжительность предварительного, технологического доаварийного периода охлаждения горного массива вентиляционным воздухом со средней температурой  $T_{в0}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) при коэффициенте теплообмена его с массивом  $-\alpha$  и начальной температуре массива на данной глубине  $T_n$  ( $^{\circ}\text{C}$ ). 4. Реакция организма горнорабочего на повышение температуры и изменение газового состава воздуха в полости не рассматривается.

Численные значения параметров, используемые для оценок и расчётов приняты следующими. Для области  $\Omega_0^{(3)}: r_0 = 2,0$  м,  $V_0 = (4/3)\pi r_0^3 = 33,5$  м<sup>3</sup> – объём полости,  $\omega_0 = 0,15$  м<sup>3</sup> – объём, занимаемый одним горнорабочим,  $n = \{1, 2, 3\}$  – варианты количества горнорабочих в полости,  $w_0 = Q_0 n / (V_0 - \omega_0 n)$  – плотность источников тепла в полости (ккал/м<sup>3</sup> · час),  $\rho = 1,206$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_p = 0,241$  ккал/кг. град.  $\lambda_0 = 2,11 \cdot 10^{-2}$  ккал/м. час. град – теплофизические параметры воздуха [367],  $A = 0,4$  – тепловой коэффициент влагообмена А.Ф.Воропаева [1]. Для области  $\Omega_s^{(3)} = \{r \in (r_0, r_a(\tau))\} (r_a(\tau) = r_0 + \delta_s(\tau); \delta_s(\tau) = 4\sqrt{a_m \tau})$ :  $\lambda_m = 1,5$  ккал/м. час. град,  $a_m = 27,0 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/час – теплофизические параметры массива [1],  $t_1 = \{t_{1i}\} = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}\}$  – варианты продолжительности периодов предварительного (доаварийного) охлаждения горного массива ( $t_{11} = 1$  год,  $t_{12} = 5$  лет,  $t_{13} = 10$  лет),  $T_{в0} = 18,0^{\circ}\text{C}$  – средняя температура вентиляционного воздуха в период предварительного охлаждения,  $T_n = 45^{\circ}\text{C}$  – температура горного массива вне зоны влияния выработки,  $\alpha = 15,0$  ккал/ м<sup>2</sup>. час. град – коэффициент теплообмена на этапе предварительного охлаждения,  $Bi = \alpha r_0 / \lambda_m = 20,0$  – безразмерное число Био,  $Fo_i = \{Fo_{1i}\} (i = \overline{1,3})$  – безразмерные числа Фурье, соответствующие временам  $t_{1i}$ :  $Fo_{1i} = a_m t_{1i} / r_0^2$ ,  $Fo_{11} = 10$ ;  $Fo_{12} = 50$ ;  $Fo_{13} = 100$ ; продолжительность нулевого режима  $\tau_0 = 5$  суток = 120 часов.

### Математическая формулировка модели

Модель нулевого режима формулируем как краевую задачу теплопроводности в двухслойной системе  $\{\Omega_0^{(3)}, \Omega_s^{(3)}\}$ . Уравнение теплопроводности в области  $\Omega_0^{(3)}$ :

$$c_0 \frac{\partial T_0}{\partial \tau} = \frac{\lambda_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) + W_0, \quad T_0 = T_0(r, \tau), \quad r \in (0, r_0), \quad \tau \in (0, \tau_0), \quad (1)$$

где  $c_0 = A^{-1} \rho c_p$ , а краевые условия к (13.138) имеют вид:

$$T(r, 0) = T_{B0}, \quad T(r_0, \tau) = T_{CT}(\tau) = T_m(r_0, \tau), \quad (\partial T_0 / \partial r)_{r=r_0} = 0. \quad (2)$$

Второе из условий (2) вводит неизвестную заранее температура поверхности горного массива  $T_{CT}(\tau)$  – функцию склейки температурных полей в полости ( $T_0(r, \tau)$ ) и в массиве ( $T_m(r, \tau)$ ). Это условие – первое из граничных условий четвертого рода, характерных для слоистых моделей. Второе условие – склейки потоков тепла на границе слоёв (областей  $\Omega_0^{(3)}$  и  $\Omega_8^{(3)}$ ) – имеет вид:

$$q_0^{(+)}(\tau) = q_m^{(-)}(\tau), \quad q_0^{(+)}(\tau) = \lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad (3)$$

$$q_m^{(-)}(\tau) = \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad \tau \in (0, \tau_0).$$

В области  $\Omega_8^{(3)}$  (в горном массиве) имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T_m}{\partial \tau} = \frac{a_m}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_m}{\partial r} \right), \quad T_m = T_m(r, \tau), \quad r \in (r_0, r_a(\tau)), \quad \tau \in (0, \tau_0) \quad (4)$$

и краевые условия к нему:

$$T_{mi}(r, 0) = \Phi_{mi}(r) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad r \in (r_0, r_a(\tau)),$$

$$T_m(r_0, \tau) = T_{CT}(\tau), \quad T_m(r_a(\tau), \tau) = \Phi_m(r_a(\tau_0)).$$

Здесь  $\Phi_{mi}(r)$  начальное (для нулевого режима) распределение температуры в горном массиве, соответствующее температурному полю, сформировавшемуся в нём к моменту  $t = t_{ii}$  (к концу периода предварительного охлаждения).

Сделаем некоторые оценки. Поскольку  $\delta_3(\tau) = 4\sqrt{a_m \tau}$ , то максимальная ширина прогретой зоны в массиве (обусловленной тепловыделением и подъёмом температуры воздуха в полости) будет  $\delta_3(\tau_0) = 4\sqrt{a_m \tau_0} = 4\sqrt{27 \cdot 10^{-4} \cdot 120} \approx 2,25$  (м). В области  $\Omega_8^{(3)} = \{r \in (r_0, r_0 + 2,25)\}$  массива температура в ходе нулевого режима ( $\tau \in (0, \tau_0)$ ) будет меняться, а вне её (при  $r > r_0 + 2,25$ ), в силу применения «принципа замораживания» - оставаться постоянной по времени и зависящей от  $r$  согласно решению краевой задачи предварительного охлаждения массива на промежутке  $t \in (0, t_{ii})$ . Охлажденная зона в массиве к моменту времени  $t = t_{ii}$  будет иметь ширину  $\delta_m(t_{ii}) = 4\sqrt{a_m t_{ii}}$ , т.е. для  $i = \overline{1, 3}$  составит, соответственно, 19,5м, 43,6м, 61,5м. Поскольку даже для  $\delta_{mmin} = \delta_m(t_{ii}) = 19,5$ м имеем  $\delta_3(\tau_0) \ll \delta_{mmin}$ , решение краевой задачи предварительного охлаждения массива (приведенное в [15]) аппроксимируем в области  $r \in (r_0, r_0 + 2,25)$  прямыми.

Используем номограмму (для  $Ku(Bi, Fo)$ , построенную по аналитическому решению третьей краевой задачи охлаждения горного массива (области  $\Omega_8^{(2)}$ ) [15]. При  $Bi = 20$  и  $Fo^{(1)} = 10$  (один год),  $Fo^{(2)} = 50$  (пять лет),  $Fo^{(3)} = 100$  (десять лет) из номограммы находим:  $Ku^{(1)} = 0,5$ ;  $Ku^{(2)} = 0,35$ ;  $Ku^{(3)} = 0,31$ . Поскольку  $Ku = Bi \theta_{cT}$ , где  $\theta_{cT} = (T_{cT}(t) - T_{B0}) / (T_n - T_{B0})$  – безразмерная температура стенки выработки, соответственно находим  $\theta_{cT}^{(i)} = Bi^{-1} Ku^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), т.е.  $\theta_{cT}^{(1)} = 0,025$ ;  $\theta_{cT}^{(2)} = 0,0175$ ;  $\theta_{cT}^{(3)} = 0,0155$ . Поскольку  $T_n - T_{B0} = 45 - 18 = 27$  (°C), отсюда следует, что

$$T_{cT}^{(1)} = (T_{B0} + 0,68) \text{ } ^\circ\text{C}; \quad T_{cT}^{(2)} = (T_{B0} + 0,47) \text{ } ^\circ\text{C}; \quad T_{cT}^{(3)} = (T_{B0} + 0,42) \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (5)$$

С достаточной для инженерных расчетов точностью, на основе (5), далее полагаем что во всех случаях температура стенки совпадает с температурой воздуха.

Отсюда, из найденных значений  $K_{\alpha}^{(i)}$ , и принятой аппроксимации температурных полей массива в начальный момент периода нулевого режима  $\varphi_{mi}(r)$  следует:

$$\varphi_{mi}(x) = T_{B0} + (T'_{\Pi}(t_{1,i}) - T_{B0}) \frac{x}{x_a}, \quad (6)$$

$$x = r - r_0, \quad r \in [r_0, r_a(\tau_0)], \quad x_a = r_a(\tau_0) - r_0 = 2,25(\text{м}).$$

В (6) :

$$T'_{\Pi}(t_{1,1}) = 33,2^{\circ}\text{C}, \quad T'_{\Pi}(t_{1,2}) = 28,6^{\circ}\text{C}, \quad T'_{\Pi}(t_{1,3}) = 27,4^{\circ}\text{C}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что  $(T'_{\Pi}(t_{1,1}) - T'_{\Pi}(t_{1,2})) / 4 = 4,6 / 4 = 1,15(^{\circ}\text{C})$ , т.е. изменение температуры  $T'_{\Pi}$  за один месяц менее  $0,1^{\circ}\text{C}$ . Это подтверждает гипотезу о «замороженности» фонового (возникшего во время предварительного охлаждения массива) температурного поля на протяжении всего периода  $\tau_0$  нулевого режима ( $\tau_0 = 120$  часов).

### Решение для области $\Omega_0^{(3)}$ (сферическая полость)

Решение для области  $\Omega_0^{(3)}$  будем искать методами усреднения и аппроксимации. Плотность внутренних источников тепла в  $\Omega_0^{(3)} - W_0$  зависит от количества горнорабочих в полости  $n$ . Рассматриваем случаи  $n=1, n=2$  и  $n=3$  и получаем формулу

$$W_0 = W_0(n) = 2,985n(1 + 0,0448n). \quad (8)$$

Из (8) находим:  $W_0(1) = 3,12$ ;  $W_0(2) = 6,50$ ;  $W_0(3) = 10,16$  (ккал/м<sup>3</sup>.час).

Интегрируем уравнение (4) по области  $\Omega_0^{(3)}$  и получаем:

$$\frac{d\bar{T}_0(\tau)}{d\tau} = -\frac{3}{r_0 c_0} q_0^{(+)}(\tau) + \frac{W_0(n)}{c_0}, \quad \tau \in (0, \tau_0), \quad (9)$$

где

$$\bar{T}_0(\tau) = \frac{4\pi \int_0^{r_0} (r')^2 dr' T_0(r', \tau)}{|\Omega_0^{(3)}|}, \quad |\Omega_0^{(3)}| = \frac{4}{3}\pi r_0^3. \quad (10)$$

Используем степенную (по  $r$ ) аппроксимацию поля  $T_0(r, \tau)$

$$\hat{T}_0(r, \tau) = T_0(\tau) - [T_0(\tau) - T_{cT}(\tau)] \left(\frac{r}{r_0}\right)^m, \quad m \geq 2, \quad r \in [0, r_0], \quad (11)$$

удовлетворяющую граничным условиям (1) и содержащим неизвестную функцию  $T_0(\tau) = \hat{T}_0(0, \tau)$ . Полагаем, усредняя (11) по области  $\Omega_0^{(3)}$  и приравнявая средние величины

$$\bar{T}_0(\tau) = \langle \hat{T}_0(r, \tau) \rangle_{\Omega_0^{(3)}} = \left(1 - \frac{3}{m+3}\right) T_0(\tau) + \left(\frac{3}{m+3}\right) T_{cT}(\tau). \quad (12)$$

Учитывая фактическое перемешивание воздуха в области  $\Omega_0^{(3)}$ , полагаем температурный профиль в полости «квазисредним» (по аналогии с квазистержневым скоростным профилем в выработке), формализуя это предположение условием  $3/(m+3) = 0,1$ . Из последнего следует:

$$\bar{T}_0(\tau) = 0,9T_0(\tau) + 0,1T_{cT}(\tau), \quad m = 27,0. \quad (13)$$

В итоге имеем четыре неизвестные функции:  $\bar{T}_0(\tau), T_0(\tau), T_{cT}(\tau), q_0^{(+)}(\tau)$ . Для их определения необходимы четыре уравнения, два из которых – (9) и (13). Два недостающих уравнения даёт граничное условие четвертого рода на границе области  $\Omega_0^{(3)}$  с областью  $\Omega_0^{(2)}$ : это второе из условий (2) и (3). Чтобы воспользоваться ими, необходимо найти решение для области  $\Omega_0^{(3)}$ .

### Решение для области $\Omega_0^{(3)}$ (горный массив)

Поскольку аналитическое решение для переменной (расширяющейся со временем) области  $\Omega_0^{(3)}$  можно априори считать избыточно сложным, используем для

функции  $T_m(r, \tau)$  экспоненциальную аппроксимацию температурного поля, принимающую, в данном случае, вид:

$$\hat{T}_{m,i}(r, \tau) = \varphi_{m,i}(x) - \left[ \varphi_{m,i}(x) - T_{cT,i}(\tau) \right] \exp \left[ -\beta_3(Fo) \left( \frac{r-r_0}{\delta_3(t)} \right) \right], \quad (14)$$

где  $i=1,2,3$  соответствуют  $t_{li}$ , а  $\varphi_{m,i}(x)$  и  $T'_{\Pi}(t_{li})$  даны (6) и (7). Выражение (14) можно представить в виде:

$$\hat{T}_{m,i}(x, r, \tau) = \varphi_{m,i}(x) - \left[ \varphi_{m,i}(x) - T_{cT,i}(\tau) \right] \exp \left[ -B_3(Fo) \left( \frac{r}{r_0} - 1 \right) \right], \quad (7)$$

где  $x$  играет роль параметра, постоянного при дифференцировании в по  $r$ , а

$$B_3(Fo) = \frac{\beta_3(Fo)}{4\sqrt{Fo}} = (Fo)^{-0.5} [2,844 - 0,760 \exp(-0,852Fo) - 1,193 \exp(-0,026Fo)] \quad (15)$$

Поскольку  $Fo_{max} = Fo_0 = a_m \tau_0 / r_0^2 = 0,081$  и  $0,852 \times 0,081 = 0,069 \ll 1,0$ , в (15) можно разложить экспоненты в ряды и ограничиться двумя первыми членами разложений. Выражение для  $B_3(Fo)$  тогда упрощается:

$$B_3(Fo) = Fo^{-0.5} [0,891 + 0,678Fo], \quad Fo \in [1,35 \cdot 10^{-3}; 81,0 \cdot 10^{-3}] \quad (16)$$

Изменению  $Fo$  в (16) соответствует изменение  $\tau$  от 2-х часов до 5-ти суток.

### Численное решение сопряженной задачи

Находим  $q_m^{(-)}(x, \tau)$ :

$$q_m^{(-)}(x, \tau) = \lambda_m \frac{\partial \hat{T}_{m,i}(x, r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \lambda_m \left[ \varphi_{m,i}(x) - T_{cT,i}(\tau) \right] \frac{B_3(Fo)}{r_0} \quad (17)$$

Для  $q_0^{(+)}(\tau)$  имеем:

$$q_0^{(+)}(\tau) = \lambda_0 \frac{\partial \hat{T}_0(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \lambda_0 m \left[ T_{cT,i}(\tau) - T_0(\tau) \right] \frac{1}{r_0}. \quad (18)$$

Из граничного условия  $q_0^{(+)}(\tau) = q_m^{(-)}(x, \tau)$  находим:

$$T_{cT,i}(\tau) = \left( 1 + \frac{B_3(Fo)\lambda_m}{m\lambda_0} \right)^{-1} \left[ T_0(\tau) + \left( \frac{B_3(Fo)\lambda_m}{m\lambda_0} \right) \varphi_{m,i}(x) \right]. \quad (19)$$

Исключив из системы уравнений (13) и (19) функцию  $T_0(\tau)$ , получаем:

$$T_{cT,i}(\tau) = \frac{\bar{T}_0(\tau) + 0,9s(Fo)\varphi_{m,i}(x)}{1 + 0,9s(Fo)}, \quad s(Fo) = \frac{\lambda_m B_3(Fo)}{\lambda_0 m}. \quad (20)$$

Подстановка (20) в (17) даёт:

$$q_m^{(-)}(\tau) = \frac{m\lambda_0 s(Fo)}{r_0} \left[ \frac{\varphi_{m,i}(x) - \bar{T}_0(\tau)}{1 + 0,9s(Fo)} \right], \quad (21)$$

а подстановка (21) в (9):

$$\frac{d\bar{T}_0(Fo)}{dFo} = K_C \left[ \left( \frac{3B_3(Fo)}{1 + 0,9s(Fo)} \right) \left( \varphi_{m,i}(x) - \bar{T}_0(Fo) \right) + \frac{W_0(n)r_0^2}{\lambda_M} \right], \quad K_C = \frac{c_M}{c_0}. \quad (22)$$

Поскольку  $\varphi_{m,i}(x)$  определена (6), где параметр  $x = x(Fo) = \delta_3(Fo) = 4r_0\sqrt{Fo}$ , учёт последнего соотношения и численных значений величин, входящих в (22), даёт:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}(Fo)}{dFo} &= 2035,763\tilde{W}_0(n) + \\ &+ \left[ \frac{2040,598 + 1552,778Fo}{2,111 + 1,607Fo + \sqrt{Fo}} \right] \left[ 18 + (T'_{\Pi} - 18) \cdot 3,514\sqrt{Fo} - \bar{T}_0(Fo) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

В полученном обыкновенном дифференциальном уравнении с переменными коэффициентами (23) содержатся два режимных параметра:  $n$  – число горнорабочих в полости  $\Omega_0^{(3)}$  и  $T'_{\Pi} = T'_{\Pi}(t_{li})$  – температуры на границе теплового погранслоя  $r = r_3(\tau_0)$ ,

обусловленные предшествующим технологическим режимом. В (23) размерность  $\bar{w}_0(n)$  – градусы Цельсия, а их численные значения:  $\bar{w}_0(1) = 3,12$ ;  $\bar{w}_0(2) = 6,50$ ;  $\bar{w}_0(3) = 10,16$ . Величины  $T'_{Пi}$  ( $i = \overline{1,3}$ ):  $T'_{П1} = 33,2^\circ\text{C}$ ,  $T'_{П2} = 22,6^\circ\text{C}$ ,  $T'_{П3} = 27,4^\circ\text{C}$ .

Уравнение (23) решаем численно, вводя дискретную шкалу безразмерного времени:

$$\begin{aligned} Fo \rightarrow Fo_j &= 1,35 \cdot 10^{-4} \cdot j, \\ \Delta Fo &= Fo_{j+1} - Fo_j = 1,35 \cdot 10^{-4}, j = \overline{0,600}. \end{aligned} \quad (24)$$

Левая часть уравнения (23) записывается в виде:

$$\frac{\bar{T}_0(Fo_{j+1}) - \bar{T}_0(Fo_j)}{\Delta Fo}, \quad \bar{T}_0(Fo_0) = \bar{T}_0(0) = T_{B0} = 18^\circ\text{C}. \quad (25)$$

Расчёт значений  $\bar{T}_0(Fo_j)$  осуществлялся по конечно – разностной аппроксимации уравнения (23):

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(Fo_{j+1}) &= \bar{T}_0(Fo_j) + 0,2748 \bar{w}_0(n) + \\ &+ \left( \frac{0,2775 + 0,2906 Fo_j}{2,111 + 1,607 Fo_j + \sqrt{Fo_j}} \right) [18 - \bar{T}_0(Fo_j)] + 3,514 (T'_{Пi} - 18) \sqrt{Fo_j} \end{aligned} \quad (25)$$

при постоянном временном шаге  $\Delta Fo = 1,35 \cdot 10^{-4}$ . Результаты расчётов по (25) для

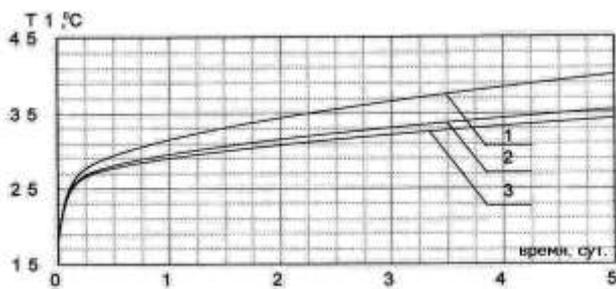


Рис.1 - Температурная динамика в полости n=1

случаев:

- 1)  $n=1$ ,  $T'_{П1} = 33,2^\circ\text{C}$ ,  
 $T'_{П2} = 28,6^\circ\text{C}$ ,  $T'_{П3} = 27,4^\circ\text{C}$ ;
- 2)  $n=2$  (при тех же значениях  $\bar{T}_0(i = \overline{1,3})$ );
- 3)  $n=3$  (при тех же  $\bar{T}_0$ ) приведены,

соответственно, на рисунках 1,2,3, где  $T1 = \bar{T}_0(n=1)$ ,  $T2 = \bar{T}_0(n=2)$ ,  $T3 = \bar{T}_0(n=3)$ , а номера кривых 1,2,3 - соответствуют временам предварительного охлаждения массива в один год, пять и десять лет.

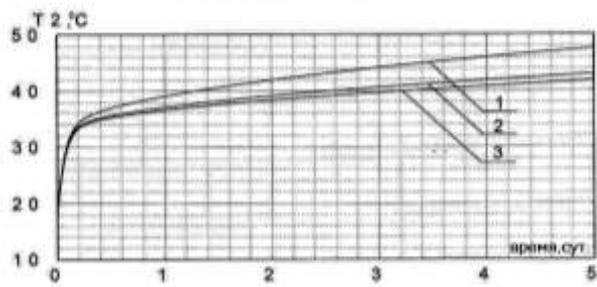


Рис.2 - Температурная динамика в полости n=2

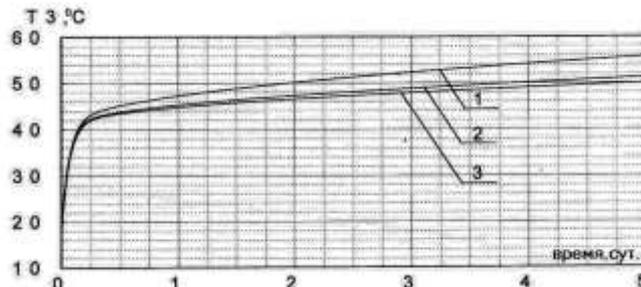


Рис. 3 - Температурная динамика в полости n=3

## Выводы

Из результатов математического моделирования температурной динамики в замкнутой полости массива, представленных на рис. 1-3 следует:

1. Во всех случаях температуры растут вначале быстро (примерно первые шесть часов), а затем – достаточно медленно;

2. Рост температур на первом этапе определяется величиной  $n$ : при  $n=1$  они достигают значений  $27 \div 28^\circ\text{C}$ , при  $n=2$  –  $34 \div 35^\circ\text{C}$ , при  $n=3$  –  $42 \div 44^\circ\text{C}$ .

3. Этот рост обусловлен наличием источников тепла, при том, что стоки тепла (уход его в массив) в этот период ещё не эффективны;

4. На протяжении последующего периода времени температурная динамика определяется совместным действием источников и стоков тепла.

5. Влияние времени предварительного охлаждения массива свыше пяти лет несущественно.

**Список литературы:** 1. Венгеров И. Р. Теплофизика шахт и рудников. Математические модели. – Монография в 2-х том. том 1 / И. Р. Венгеров. - Донецк: Норд-Пресс. - 2008. – 632с. 2. Венгеров И. Р. Теплофизика шахт и рудников. Математические модели. – онография в 2-х том. том 2 / И. Р. Венгеров. - Донецк: Донбасс. – 2012. – 685 с. 3. Мельник В. К. Моделирование температурного режима при остывании зоны внутренних взрывов / В. К. Мельник, Ю. П. Добрянский, А. Н. Щербань // ДАН УССР, Сер. А., 1978, № 12, С. 1129-1132. 4. Ильинский Э. Г. Требование к оборудованию и размещению камер убежищ в горной выработке / Э. Г. Ильинский, Е. И. Конопелько, В. К. Овчаров // В кн.: Материалы II-й научно-практ. конф. «Пути повышения безопасности горных работ в угольной отрасли». – Макеевка. – МакНИИ. – 2007. – С. 65-67. 5. Голик А. С. Обеспечение безопасности жизнедеятельности в аварийных условиях на угольных шахтах / А. С. Голик, В. А. Зубарова, А. С. Апальков // Безопасность жизнедеятельности. – 2009. - № 7. – С. 10-12. 6. Черняк В. П. Теплофизическое обеспечение безопасной изоляции радиоактивных отходов / В. П. Черняк. – Промышленная теплотехника. – 2000, т. 22, № 3. – С. 47-51. 7. Абубекеров Р. А. Основа будущей энергетики Украины – в строительстве региональных подземных атомных электростанций на базе судового оборудования и судостроительных технологий / Р. А. Абубекеров, Е. Д. Домашев, В. Е. Домашев и др. // Промышленная теплотехника. – 2000, т. 22, № 5-6. – С. 92-97. 8. Лаверов Н. П. Проблемы безопасного хранения облученного ядерного топлива: геологогеохимические аспекты / Н. П. Лаверов, В. И. Величкин, Б. И. Омеляненко, С. В. Юдинцев // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. – 2006. - № 4. – С. 293-304. 9. Амосов П. В. Диффузионный перенос радионуклидов в инженерных барьерах объектов долговременного хранения отработанного ядерного топлива и захоронения радиоактивных отходов / П. В. Амосов, А. В. Наумов, Н. В. Новожилова // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. – 2008. - № 3. – С. 244-252. 10. Бежан А. Теплообмен при вынужденной и свободной конвекции в горизонтальном канале с различно нагретыми концами / Пер. с англ. – А. Бежан, Дж. Имбергер // Теплопередача. – 1979, т. 101, № 3. – С 40-46. 11. Травкин В. С. Стационарная естественная конвекция в полости с переменной температурой стенки / В.С. Травкин. В кн.: Теплообмен в одно- и двухфазных средах // Сб-к научн. трудов ИТТФ АН УССР. – Киев: Наукова думка. – 1981. – С. 15-19. 12. Марийчук И. Ф. Теплообменные процессы в аккумуляторе холода противотепловой одежды / И. Ф. Марийчук, В. Н. Попов, В. О. Положий, А. А. Онасенко // Горноспасательное дело. – 2007, вып. 44. – С. 139-146. 13. Щербань А. Н. Новый метод оценки комфортных условий труда горнорабочих в шахтах / А. Н. Щербань, А. В. Примак, В. Н. Поляков // Уголь. – 1972, № 12. – С. 9-12. 14. Витте Н. К. Тепловой обмен человека и его гигиеническое значение / Н.К. Витте. – Киев: Медгиз. – 1956. – 144 с. 15. Щербань А. Н. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт. – В 2-х томах, том 1 / А. Н. Щербань, О. А. Кремнев // Киев: АН УССР. – 1959. – 430 с.

Надійшла до редколегії 12.01.2013

**УДК 536-12:517.956.4:622**

**Математическое моделирование сопряженного теплообмена в системе «массив-полость» / А. П. Слесаренко, И. Р. Венгеров, // Вісник НТУ «ХП». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХП», – 2013. - № 4 (978). – С. 157-164. – Бібліогр.:15 назв.**

У статті обґрунтована, сформульована і досліджена математична модель сполученого теплообміну в системі "однорідний гірський масив - сферична порожнина з джерелами тепла" для прогнозування аварійної температурної динаміки в порожнині. Система крайових задач теплопровідності вирішена наближенням і чисельними методами.

**Ключові слова:** гірничий масив; порожнина; сполучений теплообмін; чисельний метод.

In the paper a mathematical model of conjugate heat transfer in the “homogeneous mountain – spherical cavity with heat source” is justified, formulated, and studied in order to predict the emergency temperature dynamics in the cavity. The system of heat-conduction boundary problems is solved by approximate and numerical methods.

**Keywords:** maintain; cavity; conjugate heat transfer; numerical method

**УДК:** 517.53

**І. П. КШАНОВСЬКИЙ**, канд. фіз.-мат.наук, ст. викл., НУ " Львівська політехніка", Львів

## **КРИТЕРІЙ СКІНЧЕННОСТІ $\lambda$ -ТИПУ АНАЛІТИЧНИХ В ПРОКОЛЕНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ**

Отримано критерій скінченності  $\lambda$ -типу аналітичної в проколеній площині функції  $f$  в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма її модуля у випадку обмеження на зростання двопараметричної характеристики  $T(s, r, f)$ .

**Ключові слова:** аналітична функція, двозв'язна область, характеристика Неванлінни

### **Вступ**

В класичній теорії цілих та мероморфних функцій зростання максимуму модуля функції порівнюється зі степеневими або близькими до них функціями типу  $r^{\rho(r)}$ , де  $\rho(r)$  – уточнений порядок. В 60-х роках минулого століття Л. Рубел та Б. Тейлор розвинули метод рядів Фур'є, який дозволив вивчати класи цілих та мероморфних функцій з обмеженнями на зростання, що задаються довільними додатними, неперервними, зростаючими, необмеженими функціями  $\lambda(r)$ . Такі функції  $\lambda(r)$  називаються функціями зростання.

Значна частина задач теорії розподілу значень потребує вивчення властивостей мероморфних функцій у двозв'язних областях. Відомо, що кожна двозв'язна область конформно еквівалентна деякому кільцю, проколеному кругові чи проколеній площині. При перенесенні теорії Неванлінни мероморфні функції в кільці, проколеній площині чи проколеному крузі найновішими є підходи А. Кондратюка, А. Християнина та І. Кшановського. Зокрема, А. Кондратюк ввів двопараметричну характеристику  $T(s, r, f)$  для функцій мероморфних у вищезгаданих областях та поширив цю характеристику на субгармонійні функції [1]. В [2] отримано критерій скінченності  $\lambda$ -типу аналітичної в проколеній площині функції в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля цієї функції у випадку, коли обмеження на зростання однопараметричної характеристики  $T_0(r, f)$  задається функцією зростання  $\lambda(r)$ .

В даній роботі отримано критерій скінченності  $\lambda$ -типу аналітичної в проколеній площині функції у випадку обмеження на зростання її двопараметричної характеристики  $T(s, r, f)$ .

### **Означення та позначення**

Нехай  $f$  – мероморфна функція в проколеній площині  $A = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ .

© І. П. КШАНОВСЬКИЙ, 2013