Лозинський А.О.,
Демків Л.І.

Україна
Львів

Національний університет «Львівська політехніка»

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ З РЕГУЛЯТОРОМ ТАКАГІ-СУГЕНО-КАНГА

Розглянуто нелінійну динамічну систему *n*-го порядку для якої побудовано нечіткий регулятор типу Такагі-Сугено-Канга. Досліджено стійкість за Ляпуновим такої лінеаризованої в кількох точках системи.

Вступ

Вимоги сьогодення щодо підвищення якості готової продукції та зменшення затрат на її виготовлення ставить нові задачі при проектуванні систем керування технологічними процесами. Значним резервом, щодо задоволення сформульованих вимог в багатьох технологічних процесах сучасних промислових виробництв є застосування інтелектуальних технологій керування, зокрема теорії нечітких множин. Нечіткі системи особливо ефективні в складних, нелінійних процесах з параметричними невизначеностями, для яких стандартні підходи синтезу систем керування є непридатними, або їх застосування в силу тих чи інших обставин є неможливим. В той же час при синтезі нечітких регуляторів усе частіше спостерігається поєднання принципів нечіткої логіки та традиційної теорії керування. Формування множини локальних лінійних моделей об'єкта керування дає змогу визначати бажане керування на основі методів теорії керування, а застосування теорії нечітких множин забезпечує формування відповідного сигналу керування при переході між областями, для яких сформовані моделі системи. Використання такого підходу вимагає аналізу стійкості системи з нечіткими регуляторами, побудованими на принципах керування за повним вектором стану. Зокрема, постає необхідність відшукати спільну функцію Ляпунова для сімейства асимптотично стійких динамічних систем, що в свою чергу є досить складною задачею.

Метою даної роботи є дослідження стійкості за Ляпуновим модельної системи з регулятором ТСК.

Побудова системи з ТСК регулятором

Розглянемо нелінійну систему, яка в загальному випадку описується диференціальним рівнянням *n*-го порядку, яке можна звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{x}'(t)=f(\overline{x}(t))+g(\overline{x}(t))\overline{u}(t)+\xi(t), \tag{1}$$

де $\overline{x}(t)=[x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)]^T$, $x_1(t)=x(t), x_2(t)=x'(t), x_2(t)=x''(t), \ldots x_n(t)=x^{(n-1)}(t)$, $\overline{u}(t)$ – вектор керуючих впливів, $\overline{\xi}(t)$ – зовнішні збурюючі впливи, $f(\overline{x}(t))$ та $g(\overline{x}(t))$ – нелінійні функції, описані в області робочих точок системи. Цю систему, нехтуючи зовнішніми збуреннями та використовуючи перший доданок ряду Тейлора, лінеаризовано в кількох точках, що дає можливість записати її таким чином:

$$\Delta\dot{\overline{x}}(t)=A^*\Delta\overline{x}(t)+B^*\Delta\overline{u}(t),$$

де $\Delta\overline{x}(t)=\overline{x}(t)-\overline{x}_0(t)$, $\Delta\overline{u}(t)=\overline{u}(t)-\overline{u}_0(t)$, $\overline{x}_0(t), \overline{u}_0(t)$ – вектори, в околі яких розкладаємо в ряд Тейлора праву частину рівняння (1), $A^*=\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^n=\dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_j}$, $B^*=\left(b_{i,j}\right)_{i,j=1}^n=\dfrac{\Delta g_i}{\Delta x_j}$. У результаті отримано лінійну модель зі змінними параметрами. Робочу область розбито на n підобластей, а загальну модель нелінійної системи утворено набором n нечітких правил виду:

$$\begin{aligned}
R^i:\ & IF\quad x_1\in M_1^i\ i\ x_2\in M_2^i\ i\ldots x_n\in M_n^i\quad THEN\\
& \qquad \dot{\overline{x}}(t)=A_i\overline{x}(t)+B_i\overline{u}(t),\\
& IF\quad x_1\in N_1^i\ i\ x_2\in N_2^i\ i\ldots x_n\in N_n^i\quad THEN\\
& \qquad \overline{u}(t)=K_i\overline{x}(t), \qquad\qquad i=\overline{1,k},
\end{aligned}$$

де R^i – *i*-те правило, $M_j^i, N_j^i, i=\overline{1,k}, j=\overline{1,n}$ – області розбиття, $A_i, B_i, K_i \in R^{n\times n}$ – матриці, що формують модель системи в околі певної робочої точки (локальна модель), $\overline{u}(t)\in R^n$ – вектор керуючих впливів.

При використанні лінійних функцій належності з "нормальним" перекриттям ми можемо, застосовуючи дефазифікацію гравітаційним методом, перейти до такої моделі системи:

$$\dot{\overline{x}}(t)=\left[\nu_1(x)\left(A_1+B_1\sum_{i=1}^{2}\mu_i(x)K_i\right)+\nu_2(x)\left(A_2+B_2\sum_{i=1}^{2}\mu_i(x)K_i\right)\right]\overline{x}(t), \tag{2}$$

де $v_i = v_i(\overline{x}) = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} M_j^i(x_j(t))}{\sum_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n} M_j^i(x_j(t))}$, $\mu_i = \mu_i(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{n} N_j^i(x_j(t))$, $M_j^i(x_j(t))$, $N_j^i(x_j(t))$ – функції належності $x_j(t)$ до відповідної нечіткої множини M_j^i чи N_j^i $v_1 + v_2 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Тобто, модель i-тої системи матиме вигляд

$$\dot{\overline{x}}(t) = (A_i + B_i K_i)\overline{x}(t). \tag{3}$$

Нехай кожна з таких систем буде асимптотично стійкою за Ляпуновим, тобто для кожної з них виконується

$$(A_i + B_i K_i)^T P_i + P_i(A_i + B_i K_i) = -Q_i, \quad i = \overline{1..2} \tag{4}$$

де $Q_i = Q_i^T > 0, P_i = P_i^T > 0$.

Проведемо деякі перетворення системи (2)

$$\dot{\overline{x}}(t) = \sum_{i=1}^{2} v_i(A_i + B_i K_i)\overline{x}(t) + \sum_{i=1}^{2} v_i B_i\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_j K_j - K_i\right)\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} v_i(A_i + B_i K_i)\overline{x}(t) + \sum_{i=1}^{2} v_i B_i\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_j K_j - \sum_{j=1}^{2}\mu_j K_i\right)\overline{x}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} v_i(A_i + B_i K_i)\overline{x}(t) + \sum_{i=1}^{2} v_i B_i\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_j (K_j - K_i)\right)\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} v_i(A_i + B_i K_i)\overline{x}(t) - (K_2 - K_1)(v_1\mu_2 B_1 - v_2\mu_1 B_2)\overline{x}(t) \tag{5}$$

Основний результат

В цій статті будемо користуватись означенням несиметричної додатньо-визначеної матриці [1]: дійсна матриця називається додатньо-визначеною якщо $(A\overline{z}, \overline{z}) > 0$, $\forall \in R^n, \overline{z} \neq 0$. Аналогічно вводять означенная несиметричної від'ємно-визначеної матриці. Властивості симетричних додатньо-визначених матриць широко розглянуті, зокрема, в [2], [3].

Якщо прийняти функцію Ляпунова рівною $V = \overline{x}^T P \overline{x}$, $P > 0$, то для забезпечення стійкості системи (2) необхідно, щоб

$$[(K_2 - K_1)(v_2\mu_1 B_2 - v_1\mu_2 B_1)]^T P + P(K_2 - K_1)(v_2\mu_i B_2 - v_i\mu_2 B_1) > -\sum_{i=1}^{2}\overline{Q}_i, \tag{6}$$

$\overline{Q}_i > 0, i = \overline{1..2}$. При цьому відкритим залишається питання пошуку матриці P, спільної для всіх систем (3). Доведено, що таку матрицю можна визначити як добуток окремих матриць P_i, $i = \overline{1,2}$ для кожної з підсистем (3). Справедливими є

Лема 1. *Якщо матриці $Z, R, C, D \in R^{n\times n}$ і $Z = Z^T > 0$, $R = R^T > 0$, $C < 0$, $D < 0$, то*

а) $C + D < 0$; б) $Z \cdot R > 0$; в) $C \cdot R < 0$; г) $Z \cdot C < 0$; д) $C^T < 0$.

Лема 2. *Якщо $Z, R, C \in R^{n\times n}$, $Z = Z^T > 0$, $R = R^T > 0$ та справедлива рівність $C^T R + RC = -Z$, то $C < 0$.*

Таким чином, при аналізі стійкості для систем з нечітким регулятором, які можна представити у вигляді окремих лінійних підмоделей при викорнстанні "нормального" розбиття лінійних функцій належності, спільну для всіх систем матрицю P визначають так:

$$P = \prod_{i=1}^{2} P_i \tag{7}$$

і має місце

Теорема. *Якщо системи (3) стійкі за Ляпуновим, справедливою є нерівність (6) та якщо вибирати матрицю P у вигляді (7), то система (2) є стійка за Ляпуновим.*

Доведення теореми очевидним чином випливає з двох попередніх лем.

Література:

[1] Y. Saad Iterative methods for sparse linear systems – SIAM, 2003. –528p.

[2] А.А. Самарский, Е.С. Николаев Методы решения сеточных уравнений – М.: Наука, 1978. –592с.

[3] Б.П. Демидович, И.А. Марон Основы вычислительной математики – М.: Наука, 1966. – 664с.