Садовой А.В. ***Украина***
Дерец А.Л. ***Днепродзержинск***

Днепродзержинский государственный технический университет

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СКОЛЬЗЯЩЕГО РЕЖИМА ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Введение. Известные методы синтеза систем управления электроприводами не обеспечивают совместного решения задач устойчивости и оптимизацию по быстродействию в условиях ограничения фазовых координат. Так, построенные на основе принципа максимума нелинейные регуляторы [1], оптимизирующие движение по границам области фазового пространства, зачастую оказываются неустойчивыми в окрестности точки равновесия. В системах с формирователями траекторий устойчивость следящих контуров рассматривается вне связи с видом задаваемых диаграмм переходного процесса. Вместе с тем, системы модального управления, синтезируемые из условий устойчивости, не могут считаться строго оптимальными, так как строятся без учета характера движения по границам области [2]. Поэтому статические и динамические характеристики реальных электроприводов являются, как правило, результатом технического компромисса между устойчивостью и быстродействием.

Постановка задачи исследования. Метод N-i переключений позволяет осуществить параметрический синтез каскада релейных регуляторов, замкнутых по вектору состояния и формирующих расчетную переходную траекторию. Он не является исключением в отношении методологической несогласованности средств придания устойчивости и быстродействия. Тем не менее, в сочетании с данным методом синтеза структурные свойства релейной системы подчиненного регулирования (СПР) обеспечивают реализацию максимального быстродействия при устойчивости положения равновесия за счет использования различных режимов регуляторов. Условию существования устойчивого *скользящего режима* удовлетворяет весьма широкий диапазон возможных значений коэффициентов обратных связей, что допускает оптимизацию по быстродействию путем настройки регуляторов каскада на согласование *единичных переключений* при *вхождении* в скользящий режим. Сходимость расчетной переходной траектории, на которой лежат точки единичных переключений, служит предпосылкой к устойчивости синтезируемых данным методом систем, но не является *достаточным* условием существования скользящего режима, поскольку нелинейная переходная траектория не принадлежит целиком гиперплоскости скольжения, а только пересекает ее. Данное обстоятельство делает актуальной задачу проверки устойчивости скользящего режима релейных регуляторов систем, оптимизированных по быстродействию.

Базовый вариант метода N-i переключений, реализованный в виде вычислительного алгоритма [3], допускал подобную проверку только по значениям корней характеристических уравнений систем с конкретными настройками. Вывод параметров релейных СПР третьего порядка [4] в виде функций уровней ограничения канонических координат сделал возможной аналитическую проверку устойчивости таких систем [5]. Задачей настоящей работы является определение условий устойчивости оптимальной по быстродействию релейной системы четвертого порядка на основе полученных в [6] аналитических выражений ее параметров.

Материалы исследования. Дифференциальные уравнения динамики двухмассовой электромеханической системы (ЭМС) имеют вид

$$p\Omega = \frac{M_y - M_c}{J}; \quad pM_y = C_ж\left(k_p\omega_{дв} - \Omega\right); \quad p\omega_{дв} = \frac{M_{дв} - M_y}{J_{дв}}; \quad pM_{дв} = c \cdot \frac{u - R \cdot M_{дв}/c - c \cdot \omega_{дв}}{L}, \tag{1}$$

где $\Omega, \omega, M_y, M_{дв}$ - соответственно угловые скорости исполнительного вала и вала двигателя, упругий момент и момент двигателя, u-напряжение преобразователя; $k_p, R, L, J, J_{дв}, C_ж, c = k\Phi$ - параметры ЭМС, $p = d/dt$.

Первая производная скорости исполнительного вала Ω линейно связана с углом закручивания упругого элемента. Соответственно, вторая, третья и четвертая производные регулируемой координаты пропорциональны величинам угловых скорости, ускорения и рывка вала двигателя относительно исполнительного вала. Введем для производных выходной величины Ω символы $\varphi, \omega, \varepsilon, a$, принятые для координат позиционного привода. Это позволит обозначить вектор канонических координат как

$$\left.\begin{pmatrix} \Omega \\ p\Omega \\ p^2\Omega \\ p^3\Omega \\ p^4\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \varphi \\ \omega \\ \varepsilon \\ a \end{pmatrix}\right\}$$

и представить описание СПР в виде

$$\left.\begin{aligned} u_{R1} &= \varphi^* = -\varphi_{max} \cdot \mathrm{sign}\left(\Omega - \Omega^* + K_{\Omega\varphi} \cdot \varphi + K_{\Omega\omega} \cdot \omega + K_{\Omega\varepsilon} \cdot \varepsilon\right) \\ u_{R2} &= \omega^* = -\omega_{max} \cdot \mathrm{sign}\left(\varphi - \varphi^* + K_{\varphi\omega} \cdot \omega + K_{\varphi\varepsilon} \cdot \varepsilon\right) \\ u_{R3} &= \varepsilon^* = -\varepsilon_{max} \cdot \mathrm{sign}\left(\omega - \omega^* + K_{\omega\varepsilon} \cdot \varepsilon\right) \\ u_{R4} &= a^* = -U_{max} \cdot \mathrm{sign}\left(\varepsilon - \varepsilon^*\right) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где u_{Ri} - сигнал i-го (считая от входа) регулятора; символом «*» отмечены заданные значения координат, как входное, так и формируемые регуляторами; индексами «max» отмечены уровни ограничений координат.

Внутренние контуры системы подчиненного регулирования (2) образуют подсистему, идентичную позиционному приводу. Их параметры, синтезированные в принятой системе обозначений в работе [6], повторяют результаты работы [4] и определяются по выражениям:

$$K_{\omega\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{max}}{2a_{max}};\; K_{\varphi\omega} = \frac{\omega_{max}}{2\varepsilon_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}}{2a_{max}};\; K_{\varphi\varepsilon} = \frac{\omega_{max}}{4a_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}^2}{12a_{max}^2}. \tag{3}$$

Аналитиз устойчивости такой подсистемы выполнен в работе [5].

Найденные в [6] параметры внешнего контура выражаются через уровни ограничений следующим образом:

$$K_{\Omega\varphi} = \frac{\varphi_{max}}{2\omega_{max}} + \frac{\omega_{max}}{2\varepsilon_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}}{2a_{max}} \;;K_{\Omega\omega} = \frac{\varphi_{max}}{4\varepsilon_{max}} + \frac{\omega_{max}}{4a_{max}} + \frac{\varphi_{max}\varepsilon_{max}}{4\omega_{max}a_{max}} + \frac{\omega_{max}^2}{12\varepsilon_{max}^2} + \frac{\varepsilon_{max}^2}{12a_{max}^2};$$
$$K_{\Omega\varepsilon} = \frac{\varphi_{max}}{8a_{max}} + \frac{\varphi_{max}\varepsilon_{max}^2}{24\omega_{max}a_{max}^2} + \frac{\omega_{max}\varepsilon_{max}}{24a_{max}^2} + \frac{\omega_{max}^2}{24\varepsilon_{max}a_{max}}. \tag{4}$$

Данные величины являются коэффициентами уравнения переключения регулятора скорости исполнительного вала, который образует с объектом управления систему четвертого порядка. Однако, с учетом понижения на единицу порядка линеаризованной системы в скользящем режиме, проверка устойчивости внешнего контура системы (2) сводится к анализу характеристического уравнения третьего порядка вида

$$1 + K_{\Omega\varphi} \cdot p + K_{\Omega\omega} \cdot p^2 + K_{\Omega\varepsilon} \cdot p^3 = 0. \tag{5}$$

Взаимосвязь корней кубического уравнения с его коэффициентами, устанавливаемая формулами Кардано, в сочетании с громоздкими выражениями самих коэффициентов (4) является весьма сложной, что делает достаточно трудоемким подход к оценке устойчивости данной системы, основанный на определении корней уравнения (5). Поэтому проверку устойчивости скользящего режима системы (2) целесообразно выполнить с помощью косвенного алгебраического критерия Рауса-Гурвица, который для уравнения (5) дает систему неравенств:

$$\begin{vmatrix} K_{\Omega\omega} & 1 & 0 \\ K_{\Omega\varepsilon} & K_{\Omega\varphi} & 0 \\ 0 & K_{\Omega\omega} & 1 \end{vmatrix} > 0 \;;\; \begin{vmatrix} K_{\Omega\omega} & 1 \\ K_{\Omega\varepsilon} & K_{\Omega\varphi} \end{vmatrix} > 0 \;;\; K_{\Omega\omega} > 0. \tag{6}$$

Положительные значения всех коэффициентов обратных связей вытекают из вида выражений (4). Условие устойчивости (6) сводится к следующему неравенству:

$$K_{\Omega\omega}K_{\Omega\varphi} - K_{\Omega\varepsilon} > 0. \tag{7}$$

Подстановка в (7) коэффициентов (4), представленных явными функциями уровней ограничений, не позволяет упростить данное неравенство. Для его решения необходимо выразить коэффициенты характеристического полинома через иные базовые величины.

Введем в рассмотрение ранее не фигурировавшие в математическом аппарате метода N-i переключений величины T_i, определяемые как отношения максимумов канонических координат $E_{max\,i\text{-}1}$ к максимальным значениям их производных $E_{max\,i}$, имеющие размерность и физический смысл постоянных времени: $T_i = \dfrac{E_{max\,i\text{-}1}}{E_{max\,i}}$, где i – порядок производной ошибки регулирования $E_1 = \Omega - \Omega^*$.

В принятой системе обозначений постоянные времени определяются следующим образом:

$$T_a = \frac{\varepsilon_{max}}{a_{max}};\quad T_\varepsilon = \frac{\omega_{max}}{\varepsilon_{max}};\quad T_\omega = \frac{\varphi_{max}}{\omega_{max}}. \tag{8}$$

Следует подчеркнуть, что данные величины не связаны жестко с предельными значениями переменных состояния электромеханической системы, через которые выражаются постоянные времени в теории электропривода. Значения постоянных (8) характеризуют динамику замкнутой системы подчиненного регулирования вида (2), в которой уровни максимумов фазовых координат могут определяться как физическими ограничениями на состояние объекта управления, так и формой переходной траектории, задаваемой величиной скачка входного воздействия, то есть могут варьироваться в зависимости от текущего режима системы. В свою очередь, максимумы канонических координат однозначно определяют коэффициенты функций переключений регуляторов при синтезе методом N-i переключений. Следовательно, постоянные (8) присущи *замкнутой* релейной системе подчиненного регулирования *с текущими настройками* уровней ограничений и коэффициентов обратных связей. На этом основании введем для величин (8) термин *«постоянные времени замкнутой системы»*.

Выраженный через данные величины коэффициент $K_{\Omega\varphi}$ в (4) примет вид $K_{\Omega\varphi} = \frac{1}{2}\left(T_\omega + T_\varepsilon + T_a\right)$.

Для коэффициентов $K_{\Omega\varepsilon}$, $K_{\Omega a}$ выполним умножение числителей и знаменателей слагаемых выражений (4) на уровни ограничений, дополняющие их до вида (8), затем выделим комбинации постоянных времени (8) и, вынеся за скобки числовые коэффициенты, получим:

$$K_{\Omega\omega} = \frac{\varphi_{max}}{4\varepsilon_{max}}\frac{\omega_{max}}{\omega_{max}} + \frac{\omega_{max}}{4a_{max}}\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{max}} + \frac{\varphi_{max}\varepsilon_{max}}{4\omega_{max}a_{max}} + \frac{\omega_{max}^2}{12\varepsilon_{max}^2} + \frac{\varepsilon_{max}^2}{12a_{max}^2} = \frac{1}{4}\left(T_\omega T_\varepsilon + T_\varepsilon T_a + T_\omega T_a\right) + \frac{1}{12}\left(T_\varepsilon^2 + T_a^2\right);$$

$$K_{\Omega\varepsilon} = \frac{\varphi_{max}}{8a_{max}}\frac{\omega_{max}\varepsilon_{max}}{\omega_{max}\varepsilon_{max}} + \frac{\varphi_{max}\varepsilon_{max}^2}{24\omega_{max}a_{max}^2} + \frac{\omega_{max}\varepsilon_{max}}{24a_{max}^2}\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{max}} + \frac{\omega_{max}^2}{24\varepsilon_{max}a_{max}}\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{max}} = \frac{1}{8}T_\omega T_\varepsilon T_a + \frac{1}{24}\left(T_\omega T_a^2 + T_\varepsilon T_a^2 + T_\varepsilon^2 T_a\right).$$

В итоге коэффициенты (4), выраженные через постоянные времени замкнутой системы, имеют вид

$$K_{\Omega\varphi} = \frac{1}{2}\left(T_\omega + T_\varepsilon + T_a\right);\; K_{\Omega\omega} = \frac{1}{4}\left(T_\omega T_\varepsilon + T_\varepsilon T_a + T_\omega T_a\right) + \frac{1}{12}\left(T_\varepsilon^2 + T_a^2\right);\; K_{\Omega\varepsilon} = \frac{1}{8}T_\omega T_\varepsilon T_a + \frac{1}{24}\left(T_\omega T_a^2 + T_\varepsilon T_a^2 + T_\varepsilon^2 T_a\right) \quad (9)$$

Подставим (9) в неравенство (7) с целью проверки устойчивости релейной системы четвертого порядка:

$$\frac{1}{2}\left(T_\omega + T_\varepsilon + T_a\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\left(T_\omega T_\varepsilon + T_\varepsilon T_a + T_\omega T_a\right) + \frac{1}{12}\left(T_\varepsilon^2 + T_a^2\right)\right) - \left(\frac{1}{8}T_\omega T_\varepsilon T_a + \frac{1}{24}\left(T_\omega T_a^2 + T_\varepsilon T_a^2 + T_\varepsilon^2 T_a\right)\right) > 0. \quad (10)$$

В результате упрощения (10) получим

$$\frac{1}{8}\left(2T_\omega T_\varepsilon T_a + T_\omega^2 T_a + T_\omega^2 T_\varepsilon + T_\omega T_\varepsilon^2 + T_\omega T_a^2 + T_\varepsilon T_a^2 + T_\varepsilon^2 T_a\right) + \frac{1}{24}\left(T_\varepsilon^3 + T_a^3 + T_\omega T_\varepsilon^2\right) > 0. \quad (11)$$

Постоянные времени (8) всегда положительны, что позволяет по виду выражения (11) сделать вывод об устойчивости регулятора скорости исполнительного вала привода с упругой связью, оптимизированного по быстродействию методом N-i переключений, при *любых* соотношениях постоянных времени замкнутой системы. Как было отмечено выше, данный факт основывается на сходимости расчетной траектории, к характерным точкам которой при синтезе «привязываются» переключения регуляторов.

Выводы. Метод N-i переключений устанавливает однозначную взаимосвязь между уровнями ограничений канонических координат ЭМС и параметрами оптимальной по быстродействию релейной СПР. Благодаря простоте расчета настроек (3), (4) оптимальных регуляторов данный метод синтеза может служить основой для построения адаптивных цифровых систем управления. В настоящей работе доказана устойчивость скользящего режима таких систем, что позволяет исключить из процедуры самонастройки какие-либо операции, связанные с проверкой устойчивости при обновлении параметров, и обеспечивает экономию вычислительных ресурсов контроллера. Представленное исследование выполнено для контура регулирования скорости двухмассовой электромеханической системы. Однако, подвергнутое анализу уравнение скольжения связывает канонические координаты системы, что позволяет распространить положительный результат проверки на все системы четвертого порядка, синтезированные данным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. - М.:Физматгиз, 1961, -392с.

2. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184с.

3. Садовой А.В., Дерец А.Л. Оптимизация по быстродействию релейных систем подчиненного регулирования методом N-i переключений. Вестник НТУ ХПИ. Серия «Электротехника, электроника, электропривод», «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика» – Харьков, 2004, №43. – с.53 - 56.

4. Садовой А.В., Дерец А.Л. Параметрический синтез позиционных релейных систем подчиненного регулирования методом N-i переключений. Вестник НТУ ХПИ. Серия «Электротехника, электроника, электропривод», «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика» – Харьков, 2005, №45. – с.71 - 73.

5. Садовой А.В., Дерец А.Л. Анализ характера скользящего режима оптимальной по быстродействию позиционной релейной СУЭП. Сборник научных трудов Днепродзержинского государственног технического университета (технические науки). – Днепродзержинск:ДГТУ, – 2008. – выпуск 8. – с.140 – 144.

6. Садовой А.В., Дерец А.Л. Параметрический синтез релейной системы подчиненного регулирования скорости электропривода с упругой связью. Вестник Кременчугского государственного политехнического университета – Кременчуг:КГПУ, – выпуск 3/2008(50). – часть 1.- с.83 – 87.