Худяев А.А. **Украина**

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ УСЛОВНО-СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Введение. В виду сложности случайных процессов (СП) $x(t)$, протекающих в электромеханических объектах и системах управления, их математические модели, как правило, неизвестны или аппроксимируются слишком грубыми соотношениями. При моделировании и анализе таких объектов и систем приходится прибегать к специальным экспериментальным исследованиям для определения достоверных оценок вероятностных характеристик действующих в них СП. Однако получаемые при этом оценки характеристик, построенные с помощью ПЭВМ по конечным реализациям СП $x_T(t)$, обычно представляются в виде таблиц или графиков и не имеют конкретной аналитической формы, необходимой для дальнейшего анализа и синтеза систем управления по квадратичным критериям качества. Быстрота проведения численных расчётов характеристик на ПЭВМ с применением широко известных пакетов прикладных программ (ППП) *Matlab, MathCAD, Maple* и других не компенсирует длительной и связанной со значительными погрешностями работы по последующей аппроксимации оценочных кривых, например корреляционной функции $R_{x_T}(\tau)$ или спектральной плотности $S_{x_T}(\omega)$ условно-стационарного СП, подходящими аналитическими зависимостями. Эту проблему часто называют проблемой идентификации и моделирования случайных процессов в САУ [1÷4].

Процесс получения достоверных аналитических оценок вероятностных характеристик условно-стационарных СП можно существенно упростить и автоматизировать применением метода ортогональных разложений, например разложений по ортогональным многочленам [5÷8]. В этом случае в качестве критерия используют либо взвешенную среднюю квадратичную ошибку аппроксимации, либо максимум абсолютной ошибки на всём выбранном интервале аппроксимации $[a,b]$. Заметим, что разложения в ряд Тейлора аппроксимируют функцию лишь в непосредственной близости от одной выбранной точки и поэтому редко применяются в аналитической аппроксимации СП (только при сверхбыстрой сходимости). Достоинства ортогональных разложений состоят в том, что математическая модель разлагаемой в ряд функции $f(x)$ получается в аналитической форме, вид которой последовательно уточняется с увеличением числа N членов ряда. При этом выбором подходящей функции веса $\gamma(x)$ можно при небольшом N добиться удовлетворительного приближения $f(x)$.

В частности, идея применения разложений по так называемой системе ортогональных функций *Лагерра*, высказанная ещё *Н.Винером* [9], позволяет непосредственно по экспериментальным данным получить аналитическую модель оценки спектральной плотности СП в виде удобной дробно-рациональной функции частоты. Возможность практической реализации предложенной идеи была отмечена в работе [10]. Такая аналитическая оценка спектральной плотности $S_{x_T}(\omega)$, как известно, необходима для синтеза систем управления при случайных воздействиях по критерию минимума дисперсии ошибки, вычисление которой сегодня осуществляют обычно с помощью наиболее подходящего и эффективного метода рекуррентных уравнений *К. Острема* [2,11,12].

Предлагаемый подход к идентификации спектральной плотности СП недостаточно отражен в технической литературе. Кроме того, указанные выше популярные ППП для ПЭВМ не содержат необходимого программного обеспечения с соответствующими пользовательскими возможностями.

Постановка задачи исследования. Известно, что система многочленов $\{\psi_n(x)\}_0^\infty$ (n – степень многочлена, x – действительная независимая переменная) называется ортогональной на отрезке $[a,b]$ с весовой функцией $\gamma(x)\geq 0$ при $x\in[a,b]$, если выполняется:

$$\int_a^b \gamma(x)\psi_n(x)\psi_m(x)dx = h_n\,\delta_{mn}\ ,(1)$$

где

$$\psi_n(x)=k_{n,n}x^n+k_{n,n-1}x^{n-1}+k_{n,n-2}x^{n-2}+\ldots+k_{n,1}x+k_{n,0}, \qquad n=0,1,2,\ldots; \tag{2}$$

$$\delta_{mn}=\begin{cases}0, & если \quad m\neq n,\\ 1, & если \quad m=n \qquad (n,m=0,1,2,\ldots)\end{cases} \tag{3}$$

- символ *Кронекера*;

$$h_n=(\psi_n,\psi_n)=\int_a^b \gamma(x)[\psi_n(x)]^2dx \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

- коэффициент нормировки. Если $h_n = 1$ для всех n, то говорят, что последовательность многочленов $\{\psi_n(x)\}_0^\infty$ ортонормированна. Ясно, что всякую ортогональную последовательность можно сделать ортонормированной, если заменить $\Psi_n(x)\psi_n(x)$ на $h_n^{-1/2}\psi_n(x)$. Каждая ортонормированная последовательность является линейно независимым множеством.

Предположим, что функция $\gamma(x)f^2(x)$ интегрируема (суммируема) по *Лебегу* на интервале $[a,b]$ $\left(f(x)\in L_\gamma^2[a,b]\right)$, т.е. $\int\limits_a^b \gamma(x)f^2(x)dx$ существует, и последовательность многочленов $\{\psi_n(x)\}_0^\infty$ также интегрируема по *Лебегу* и удовлетворяет (1). Тогда назовём

$$f_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\,\psi_i(x),\qquad n=0,1,2,... \tag{5}$$

приближением порядка n к функции $f(x)$. Точность такого приближения можно оценить интегралом

$$I_n=\int\limits_a^b\left[f(x)-\sum_{i=0}^{n}a_i\,\psi_i(x)\right]^2\gamma(x)dx\;\to\min_{a_0,a_1,\dots,a_n}. \tag{6}$$

Если условие (6) выполняется, то будем говорить, что получено наилучшее квадратичное приближение к функции $f(x)$ вида (5) с помощью последовательности ортогональных многочленов $\psi_i(x)\left(i=\overline{0,n}\right)$.

В работе [8] доказано, что из всех приближений n-го порядка вида (5) к функции $f(x)$ наилучшим в смысле (6) является то, при котором коэффициенты $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ представляют собой так называемые коэффициенты (интегралы) *Фурье* $f_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ функции $f(x)$ в ортонормированной системе $\{\psi_n(x)\}_0^\infty$ и определяются с учётом (1) по формуле:

$$a_i\equiv f_i=h_i^{-1}\int\limits_a^b\gamma(x)\psi_i(x)f(x)dx\qquad\forall i=\overline{0,n}. \tag{7}$$

При этом приближение

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\,\psi_i(x) \tag{8}$$

называют разложением функции $f(x)$ в полный ряд по ортогональным многочленам $\psi_i(x)\left(i=\overline{0,\infty}\right)$ на отрезке $[a,b]$. Если $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}f_i\,\psi_i(x)$, то разность $f(x)-f_n(x)$ обращается в нуль на отрезке $[a,b]$ не менее $n+1$ раза.

Ортогональные многочлены *Лагерра* $\{L_n(x)\}_0^\infty$ так же, как и многочлены *Лежандра*, *Эрмита* и некоторые другие, являются частным случаем решения дифференциального уравнения вырожденной гипергеометрической функции (*Куммера*) [5]. Различные близкие определения многочленов Лагерра можно найти, например, в работах [5,7,8] и другой литературе по специальным математическим функциям.

Каждый отдельный многочлен $L_n(x)$ может быть представлен с учётом (2) в виде ряда

$$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}-...+\frac{n^2(n-1)^2...(n-l)^2}{(l+1)!}x^{n-l-1}-...\right.$$
$$\left....-\frac{n^2(n-1)^2...(n-n+2)^2}{(n-1)!}x+\frac{n^2(n-1)^2...2^2\cdot1^2}{n!}\right],\qquad n=0,1,2,..., \tag{9}$$

или в свёрнутом виде

$$L_n(x)=(n!)\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{x^{n-i}}{[(n-i)!]^2\cdot i!}\equiv(n!)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^i}{(i!)^2(n-i)!}\qquad\forall n=\overline{0,\infty}, \tag{10}$$

где n - порядок многочлена, определяющий общее количество членов ряда без нулевого члена; $l(l<n)$ - нечетное целое положительное число. Для получения конкретной последовательности многочленов Лагерра $\{L_n(x)\}_0^\infty$ удобно воспользоваться следующими рекуррентными формулами:

$$L_0(x)=1;\quad L_1(x)=L_0(x)-x=1-x;\quad (n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x),\quad n=1,2,... . \tag{11}$$

Весовая функция $\gamma(x)$, интервал ортогонализации $[a,b]$ и коэффициент нормировки h_n (4) имеют вид:

$$\gamma(x)=e^{-x};\qquad a=0,\quad b=\infty;\qquad h_n=1. \tag{12}$$

Тогда из (1), (3) с учетом (9), (12) запишем условия ортогональности и нормировки для многочленов Лагерра:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx \ = \ \delta_{mn} \ = \begin{cases} 0 & при \quad m \neq n; \\ 1 & при \quad m = n, \qquad (n, m = 0,1,2,...), \end{cases} \tag{13}$$

откуда следует, что последовательность многочленов $\{L_n(x)\}_0^{\infty}$ является ортонормированной.

Представим многочлены Лагерра $L_n(x)$ ($n = 0,1,2,\ldots$) с учетом (10) в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{l_{n-i}}{n!} x^{n-i} \qquad \forall n = \overline{0, \infty}, \tag{14}$$

где коэффициенты разложения

$$l_{n-i} \ = \ (-1)^{n-i} \frac{(n!)^2}{[(n-i)!]^2 \, i!} \qquad \forall i = \overline{0, n}. \tag{15}$$

Тогда при $x = t$ функцией Лагерра n-го порядка $L_n(x)$ ($n = 0,1,2,\ldots$) называется функция вида [9, 10]

$$L_n(t) \ = \ (-1)^n \ e^{-t} \ \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i+1/2} \ \frac{l_{n-i}}{n!} \ t^{n-i} \ = \ \sqrt{2} \ e^{-t} \sum_{i=0}^{n} l^*_{n-i} \ t^{n-i}, \qquad t \geq 0, \tag{16}$$

где с учетом (14), (15) коэффициенты разложения l^*_{n-i}:

$$l^*_{n-i} \ = \ (-1)^n \ 2^{n-i} \ \frac{l_{n-i}}{n!} \ = \ (-1)^i \ 2^{n-i} \ \frac{n!}{[(n-i)!]^2 \ i!} \qquad \forall i = \overline{0, n}. \tag{17}$$

Из (16), (17) по аналогии с (9) запишем функцию Лагерра $L_n(t)$ в развернутом виде

$$L_n(t) = \sqrt{2} \ e^{-t} \left\{ 2^n \frac{1}{n!} t^n - 2^{n-1} \frac{n}{(n-1)! \, 1!} t^{n-1} + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{(n-2)! \, 2!} t^{n-2} - \ \ldots \ + (-1)^i \ 2^{n-i} \frac{n!}{[(n-i)!]^2 \ i!} t^{n-i} + \ \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \ + (-1)^{n-1} \ 2 \frac{n!}{(1!)^2 (n-1)!} t \ + \ (-1)^n \right\}, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad t \geq 0, \tag{18}$$

откуда, в частности, при $n = 0,1,2,3,4,5$ несложно получить:

$$L_0(t) = \sqrt{2} \ e^{-t}; \quad L_1(t) = \sqrt{2} \ e^{-t} (2t - 1); \quad L_2(t) = \sqrt{2} \ e^{-t} \left(2t^2 - 4t + 1\right); \quad L_3(t) = \sqrt{2} \ e^{-t} \left(1\frac{1}{3} t^3 - 6t^2 + 6t - 1\right);$$

$$L_4(t) = \sqrt{2} \ e^{-t} \left(\frac{2}{3} t^4 - 5\frac{1}{3} t^3 + 12t^2 - 8t + 1\right); \ L_5(t) = \sqrt{2} \ e^{-t} \left(\frac{4}{15} t^5 - 3\frac{1}{3} t^4 + 13\frac{1}{3} t^3 - 20t^2 + 10t - 1\right), \ t \geq 0. \tag{19}$$

Графики функций Лагерра $L_n(t) \left(n = \overline{0,5}\right)$ (19) приведены на рис.1.

Главным достоинством ортогональных функций Лагерра $L_n(t)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ (18), (19) с точки зрения возможности идентификации спектральных плотностей $S_x(\omega)$ условно-стационарных СП $x(t)$ является сравнительно простой и удобный вид их изображений Фурье

$$L_n(j\omega) \ = \ \sqrt{2} \frac{(1 - j\omega)^n}{(1 + j\omega)^{n+1}} \quad \forall n = \overline{0, \infty}. \tag{20}$$

Чтобы убедиться в справедливости (20), рассмотрим функцию

$$f(t) \ = \begin{cases} t^n \, e^{-t} & при \quad t \geq 0, \\ 0 & при \quad t < 0. \end{cases} \tag{21}$$

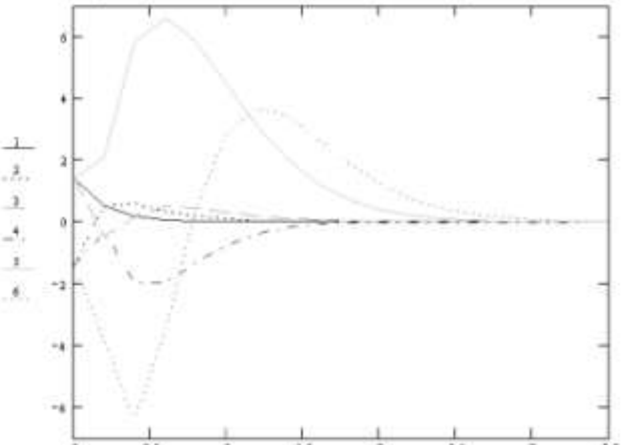

Рисунок 1 – Функции Лагерра $L_n(t) \left(n = \overline{0, 5}\right)$ для значений t от 0 до 3,5 с:n=0 (1); n=1 (2); n=2 (3); n=3 (4); n=4 (5); n=5 (6)

Используя табличные значения [13], найдем преобразование Фурье функции (21):

$$F\{f(t)\} \equiv f(j\omega) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \ = \ \int_0^{\infty} t^n \ e^{-t} \ e^{-j\omega t} \ dt \ = \ \frac{n!}{(1 + j\omega)^{n+1}}. \tag{22}$$

Принимая во внимание (22), найдем преобразование Фурье обобщенной функции Лагерра $L_n(t)$ (18):

$$F\{L_n(t)\} \equiv L_n(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} L_n(t) e^{-j\omega t} dt = \sqrt{2} \left[\frac{2^n}{(1 + j\omega)^{n+1}} - \frac{n!}{1!} \cdot \frac{2^{n-1}(1 + j\omega)}{(1 + j\omega)^{n+1}} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{2^{n-2}(1 + j\omega)^2}{(1 + j\omega)^{n+1}} - \ldots \right.$$

$$\ldots+(-1)^i\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}\cdot\frac{2^{n-i}(1+j\omega)^i}{(1+j\omega)^{n+1}}+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-1)!}\times\frac{2(1+j\omega)^{n-1}}{(1+j\omega)^{n+1}}+(-1)^n\frac{(1+j\omega)^n}{(1+j\omega)^{n+1}}\Bigg],\ n=0,1,2,\ldots \quad (23)$$

Из (23) с учетом формулы бинома *Ньютона* и свойств биномиальных коэффициентов $C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ $(i=0,1,2,\ldots\le n=0,1,2,\ldots)$ [5] нетрудно видеть, что выражение в квадратных скобках правой части есть не что иное, как $\frac{[2-(1+j\omega)]^n}{(1+j\omega)^{n+1}}=\frac{(1-j\omega)^n}{(1+j\omega)^{n+1}}$, откуда и следует справедливость соотношения (20).

Кроме того, как показано в работе [9] и отмечено в [10], изображения функций Лагерра (20) так же, как и сами функции Лагерра (18) на интервале $[0,\infty]$ (для аппроксимируемых воздействий $f(x)$, равных нулю при $t<0$), образуют на интервале $[-j\infty,+j\infty]$ полную систему ортонормированных функций $\{L_n(j\omega)\}_0^\infty$ с весом $\gamma(\omega)=1$. Следовательно, изображения Фурье функций Лагерра могут аппроксимировать изображения представляемых функций $f(j\omega)$, с любой степенью точности.

Тогда из (5)÷(7) можно записать

$$f_N(j\omega)=\sum_{n=0}^{N}c_n\,L_n(j\omega), \quad (24)$$

где N - порядок приближения;

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{L_n(j\omega)}\,f_N(j\omega)\,d\omega \quad (25)$$

– коэффициенты разложения; $\overline{L_n(j\omega)}$ - функция, сопряжённая к функции $L_n(j\omega)$.

Более удобный способ получения коэффициентов c_n $\left(n=\overline{0,N}\right)$ основан на том, что билинейная форма (22) не изменяет своей величины, если функции заменить их изображениями Фурье [10]. Следовательно, коэффициенты c_n можно вычислить по формуле:

$$c_n=\int_0^\infty L_n(t)\,f(t)\,dt \qquad \forall n=\overline{0,N}. \quad (26)$$

Совокупность величин $\{c_n\}_0^N$ как коэффициентов разложения функции $f(j\omega)$ в ряд по выбранному конечному ортонормированному базису $\{L_n(j\omega)\}_0^N$ представляет собой *ортогональную спектральную характеристику*, аналитически определяющую динамические свойства исследуемой функции $f(j\omega)$.

Заметим, что аппроксимация ортогональными функциями, в том числе функциями $L_n(xj\omega)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ имеет то замечательное преимущество, что улучшение аппроксимации путём добавления нового члена $c_{n+1}L_{n+1}(j\omega)$не меняет ранее вычисленных коэффициентов $c_0, c_1, c_2,\ldots, c_n$. Вместе с тем, на практике вычисление коэффициентов по формуле (26) требует знания функции $f(x)$ на всём рассматриваемом конечном интервале $[a,b]$, а скорость сходимости ряда (24) зависит от реального значения верхнего предела интеграла (26) и при неудачно выбранном значении может быть медленной.

Результаты исследования.

Если некоторая функция времени t, например $f(t)$, квадратично интегрируема на интервале $[0,\infty]$, то на основании (5)÷(8), (18) она может быть с любой заданной степенью точности разложена в конечный ряд по ортогональным функциям Лагерра $L_n(t)$ $\left(n=\overline{0,N}\right)$ с коэффициентами ряда c_n $\left(n=\overline{0,N}\right)$, определяемыми согласно (26), т.е.

$$f(t)\approx f_N(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\,L_n(t). \quad (27)$$

Тогда из (27) с учетом (20) для преобразования Фурье аппроксимирующей функции $f_N(t)$ получим

$$F\{f_N(t)\}=f_N(j\omega)=\int_0^\infty f_N(t)e^{-j\omega t}\,dt=\sum_{n=0}^{N}c_n\int_0^\infty L_n(t)e^{-j\omega t}\,dt=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{N}c_n\frac{(1-j\omega)^n}{(1+j\omega)^{n+1}}. \quad (28)$$

Пусть имеются экспериментальные графики (осциллограммы) некоторого условно-стационарного эргодического СП $x(t)$. Введем в рассмотрение реализацию $x_T(t)$ СП $x(t)$, задав ее на выбранном интервале конечной длительности $t\in[0,T]$. Определив оценку текущего спектра реализации $\dot{X}_T(j\omega)=\int_0^T x_T(t)e^{-j\omega t}dt$, в качестве оценки спектральной плотности $S_X(\omega)$ СП $x(t)$ при достаточно больших T $(T<\infty)$ получим:

$$S_x(\omega) \approx S_{x_T}(\omega) = \frac{1}{T}\left[\overline{\hat{X}_T(j\omega)} \cdot \hat{X}_T(j\omega)\right] = \frac{1}{T}\left|\hat{X}_T(j\omega)\right|^2 . \tag{29}$$

Разложим процесс $x_T(t)$ в ряд по функциям Лагерра $L_n(t)$ $\left(n = \overline{0, N}\right)$ аналогично (27)

$$x_T(t) \approx x_{T,N}(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n L_n(t). \tag{30}$$

Так как последовательность функций Лагерра $\{L_n(t)\}_0^\infty$ образует полную ортонормированную систему функций, обращающихся в нуль при $t < 0$, то при достаточно больших N равенство (30) будет удовлетворяться с любой степенью точности. При этом коэффициенты c_n ряда (30) с учетом (26) должны вычисляться (оцениваться) по формуле:

$$c_n \approx \hat{c}_n = \int_0^T L_n(t) x_T(t) dt \qquad \forall n = \overline{0, N} . \tag{31}$$

На практике подынтегральные функции $L_n(t)$ и $x_T(t)$ в правой части (31) имеют дискретный характер, т.е. по аналогии с (30) и (16),(17) можно записать:

$$x_T(t_i) \approx x_{T,N}(t_i) = \sum_{n=0}^{N} c_n L_n(t_i), \qquad t_i = i \cdot \Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N_x} \qquad i = 0,1,2,\ldots,N_x; \tag{32}$$

$$L_n(t_i) = \sqrt{2}\, e^{-t_i} \sum_{\kappa=0}^{n} (-1)^\kappa \frac{2^{n-\kappa} n!}{[(n-\kappa)!]^2 \kappa!} t_i^{n-\kappa} , \qquad t_i \ge 0 , \tag{33}$$

где $t_0 = 0$, $t_{N_x} = T$; Δt – интервал дискретизации или заданный шаг выборки, определяемый по реализации СП $x_T(t)$ длительностью T; N_X – количество интервалов дискретизации. Поэтому для вычисления самих интегралов (31) необходимо воспользоваться численными методами, основанными, как правило, на применении так называемых квадратурных формул [5,6].

Исследования показали, что одной из наиболее подходящих квадратурных формул в данном случае является формула парабол (или формула *Симпсона*) [6]:

$$I = \int_a^b y(z) dz \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n} d_i y(z_i), \tag{34}$$

где

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{35}$$

- шаг квадратурной формулы Симпсона; $y(z)$ - заданная подынтегральная функция; $n = 2\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ - количество равных интервалов дискретизации сегмента $[a,b]$, которое должно соответствовать чётному числу; z_i $\left(i = \overline{0, n}\right)$ - заданные дискретные значения аргумента z на сегменте $[a,b]$; d_i - заданные постоянные коэффициенты численного интегрирования. Формула (34) даёт абсолютно точные результаты только для полиномов $y(z)$ не выше третьей степени, для которых $y^{(4)}(z)=0$, что в случае реальных стохастических объектов и систем встречается крайне редко. Однако с её помощью можно показать, что если погрешность найденного результата больше допустимой, то необходимо увеличить число n точек деления сегмента $[a,b]$ и тем самым уменьшить h. В частности, при каждом удвоении числа n погрешность формулы (34) уменьшается примерно в 16 раз!

Применение формул (34), (35) для рассматриваемого случая (31) с учётом (32), (33) при чётном значении числа N_X даёт:

$$\hat{c}_n \approx \frac{\Delta t}{3} \sum_{i=0}^{N_X} d_i y_n(t_i) \qquad \forall n = \overline{0, N} , \tag{36}$$

где $y_n(t_i) = L_n(t_i) x_T(t_i)$; (37)

$$d_0 = d_{N_x} = 1 , \qquad d_i = \begin{cases} 4 \ \text{при} \ i - \text{нечётное}; \\ 2 \ \text{при} \ i - \text{чётное}, \qquad i = \overline{1, N_x - 1}. \end{cases} \tag{38}$$

При нечётном N_X значения $\hat{c}_n$ $\left(n = \overline{0, N}\right)$, найденные по формуле (36) для дискретных моментов времени t_i $\left(i = \overline{0, N_X - 1}\right)$, должны быть дополнены соответствующим дополнительным слагаемым:

$$I_{n,\,доп} = \frac{\Delta t}{3}\left[-\frac{1}{4} y_n(t_{N_x - 2}) + 2\, y_n(t_{N_x - 1}) + \frac{5}{4} y_n(t_{N_x})\right]. \tag{39}$$

Определив из (36)÷(39) с учётом (32), (33) оценки коэффициентов c_n $\left(n = \overline{0, N}\right)$ (31), найдём преобразование Фурье обеих частей равенства (30):

$$F\{x_T(t)\} = \hat{X}_T(j\omega) \approx \sum_{n=0}^{N} c_n L_n(j\omega) \tag{40}$$

Тогда из (29), (40) для оценки спектральной плотности СП $x(t)$ получим

$$S_{x_T}(\omega) \approx \hat{S}_{x_T}(\omega) = \frac{1}{T}\left|\hat{X}_T(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{T}\left|\sum_{n=0}^{N} c_n L_n(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{T}\left[\sum_{k=0}^{N} c_k \overline{L_k(j\omega)}\right]\left[\sum_{n=0}^{N} c_n L_n(j\omega)\right]; \tag{41}$$

или с учетом (20)

$$S_{x_T}(\omega) \approx \hat{S}_{x_T}(\omega) = \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{N} c_k \frac{(1+j\omega)^k}{(1-j\omega)^{k+1}} \cdot \sum_{n=0}^{N} c_n \frac{(1-j\omega)^n}{(1+j\omega)^{n+1}} = \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_k c_n \frac{(1+j\omega)^k (1-j\omega)^n}{(1-j\omega)^{k+1}(1+j\omega)^{n+1}}. \tag{42}$$

При этом изображения функций Лагерра, входящие в первый сомножитель в правых частях (41), (42), содержат все полюсы на мнимой оси в нижней полуплоскости, а входящие во второй сомножитель, – в верхней полуплоскости.

Можно показать, что после перемножения и приведения подобных членов в правой части (42) оценка спектральной плотности $\hat{S}_{x_T}(\omega)$ будет представлять собой действительную дробно-рациональную функцию частоты ω:

а) при $N = 0$:

$$\hat{S}_{x_T}(\omega) = \frac{2c_0^2}{T} \cdot \frac{1}{1+\omega^2}; \tag{43}$$

б) при $N \geq 1$:

$$\hat{S}_{x_T}(\omega) = \frac{2}{T}\left\{\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2c_k c_{n-k}}{\left(1+\omega^2\right)^{n-2k+1}} \sum_{\kappa=0}^{n-2k} (-1)^{\kappa} \frac{[2(n-2k)]!}{(2\kappa)!\,[2(n-2k-\kappa)]!}\,\omega^{2\kappa} + \\ &+ \sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{k=n-N}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2c_k c_{n-k}}{\left(1+\omega^2\right)^{n-2k+1}} \sum_{\kappa=0}^{n-2k} (-1)^{\kappa} \frac{[2(n-2k)]!}{(2\kappa)!\,[2(n-2k-\kappa)]!}\,\omega^{2\kappa} - \frac{1}{\left(1+\omega^2\right)}\sum_{n=0}^{N} c_n^2 \end{aligned}\right\}, \tag{44}$$

где

$$E\left(\frac{n}{2}\right) = \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{при} \quad n - \text{чётное}; \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{при} \quad n - \text{нечётное} \end{cases} \tag{45}$$

– так называемая функция *Энтье* или наибольшее целое число, не превосходящее $n/2$.

Следовательно, определив требуемый порядок N приближения реализации СП $x_T(t)$ с помощью ортогональных функций Лагерра $L_n(t)$ $\left(n = \overline{0, N}\right)$ и вычислив значения оценок (36) соответствующих коэффициентов c_n $\left(n = \overline{0, N}\right)$ разложения оценки СП $x_{T,N}(t)$ в ряд (30), из (43)÷(45) можно не только рассчитать оценочную кривую спектральной плотности $\hat{S}_{x_T}(\omega)$, но и определить соответствующее аналитическое выражение для оценки $\hat{S}_{x_T}(\omega)$. Для решения большинства прикладных задач анализа и синтеза электромеханических САУ при случайных воздействиях более удобным оказывается знание аналитической оценки не самой спектральной плотности $\hat{S}_{x_T}(\omega)$ (43), (44), а ее так называемого формирующего оператора $\hat{V}_{x_T}(s)$ $(s = j\omega)$, для получения которого необходимо выполнить центрирование СП $x_T(t)$. Тогда, определив центрированный дискретный СП $\left\{\overset{*}{x}_T(t_i)\right\}_0^{N_x}$, из (41) для оценки спектральной плотности $\hat{S}_{\overset{*}{x}_T}(\omega)$ можно записать

$$\hat{S}_{\overset{*}{x}_T}(\omega) = \hat{V}_{\overset{*}{x}_T}(s)\hat{V}_{\overset{*}{x}_T}(-s), \tag{46}$$

откуда с учётом (41), (42) находим, что

$$\hat{V}_{\overset{*}{x}_t}(s) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=0}^{N} c_n L_n(s) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{n=0}^{N} c_n \frac{(1-s)^n}{(1+s)^{n+1}}. \tag{47}$$

В работе, в частности, получены конкретные аналитические выражения оценок формирующих операторов спектральных плотностей (47) для значений порядка приближения N аппроксимирующего ряда (30) от $N = 0$ до $N = 8$.

Рассмотренный алгоритм (27)÷(47) реализован в виде компьютерной программы SPECTRAL DENSITY в среде *Maple*. В качестве примера в табл. 1 приведен дискретный СП перегрузки тока в цепи питания усилителя мощности системы управления приводом: $\Delta I(t_i)$ $\left(i = \overline{0,50}\right)$ на интервале $t \in [0, 110c]$.

Таблица 1 – Дискретный случайный процесс перегрузки тока $\Delta I(t_i)$ в цепи питания усилителя мощности системы управления приводом на интервале времени $t \in [0,100c]$

t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A	t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A	t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A	t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A	t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A	t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A	t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A	t_i,c	$\Delta I(t_i)$,A
0	1,0	14	0,8	28	0,5	42	1,0	56	1,0	70	0,8	84	0,6	98	0,4
2	1,3	16	0,8	30	0,5	44	0.9	58	0,8	72	1,2	86	0,9	100	1,2
4	1,1	18	0,4	32	0,7	46	1,4	60	1,1	74	0,7	88	0,8	102	1,4
6	0,7	20	0,3	34	0,8	48	1,4	62	1,1	76	0,7	90	0,8	104	0,8
8	0,7	22	0,3	36	0,6	50	1,0	64	1,2	78	1,1	92	0,9	106	0,9
10	1,1	24	0,6	38	1,0	52	1,1	66	1,0	80	1,5	94	0,9	108	1,0
12	1,3	26	0,3	40	0,5	54	1,5	68	0,8	82	1,0	96	0,6	110	0,8

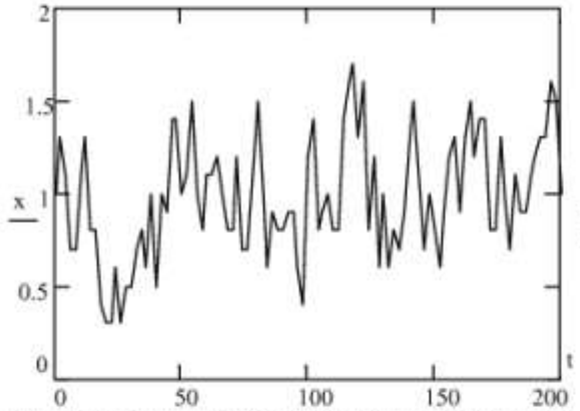

Рисунок 2 – Случайный процесс перегрузки тока в усилителе мощности: $\hat{m}_{\Delta I} \approx 0.982\ A$; $\hat{D}_{\Delta I} \approx 0.103\ A^2$

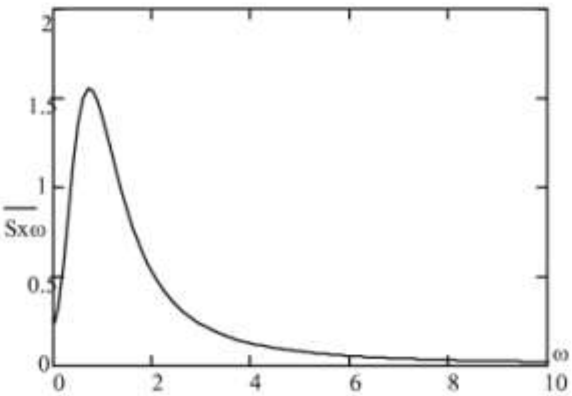

Рисунок 3 – График оценки спектральной плотности (49) СП перегрузки тока в цепи питания усилителя мощности

Полагая СП перегрузки тока (рис.2) условно-стационарным, получим следующие результаты идентификации и моделирования его спектральной плотности (рис 3):

$$N = 3; \quad c_0 = 1.651, \ c_1 = 1.396, \ c_2 = 2.651, \ c_3 = -10.591; \tag{48}$$

$$\hat{S}_{\Delta I}(\omega) = \frac{0.239\left(7.609\omega^6 + 43.63\omega^4 + 39.944\omega^2 + 1\right)}{\omega^8 + 4\omega^6 + 6\omega^4 + 4\omega^2 + 1} \tag{49}$$

В качестве второго примера на рис.4 приведены осциллограммы типичного СП изменения продольного профиля грунтовой дороги ΔH при движении бронеобъекта. На рис.5, в частности, показана модель низкочастотной составляющей продольного профиля дороги $\Delta h(S)$ па отрезке пути $S \in [0,44\,м]$, принятая в качестве экспериментального условно-стационарного СП. Соответствующий центрированный дискретный случайный процесс приведен в табл. 2.

Результаты идентификации спектральной плотности рассматриваемого СП имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} N = 8; \quad & c_0 = -307.665, \ c_1 = -1458.787, \ c_2 = -243.131, \ c_3 = 1806.192, \ c_4 = 301.032, \\ & c_5 = -2503.128, c_6 = -417.188, \ c_7 = 2856.295, \ c_8 = 476.049; \end{aligned} \tag{50}$$

$$\hat{V}_{\Delta h}(s) = \frac{108.66\begin{pmatrix} 10.431s^8 + 27.445s^7 + 43.477s^6 + 0.781s^5 + 67.558s^4 + 59.586s^3 + \\ +159.762s^2 + 10.929s + 1 \end{pmatrix}}{s^9 + 9s^8 + 36s^7 + 84s^6 + 126s^5 + 126s^5 + 84s^3 + 36s^2 + 9s + 1}.$$

Таблица 2 – Центрированный дискретный случайный процесс изменения низкочастотной составляющей продольного профиля дороги $\Delta h(S_i)$ на отрезке пути $S \in [0,44\,м]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S_i,*м*	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
Δh,*мм*	48	53	38	18	-2	-12	-27	-52	-77	-102	-117	-137	-152	-147	-127	-107	-92	-67	-57	-47
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
S_i,*м*	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5
Δh,*мм*	-42	-52	-67	-107	-132	-167	-197	-237	-252	-262	-272	-262	-247	-207	-167	-127	-82	-27	-2	28
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
S_i,*м*	20	20,5	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5	27	27,5	28	28,5	29	29,5
Δh,*мм*	28	-2	-27	-77	-107	-117	-122	-112	-102	-67	-47	-7	28	58	93	98	88	53	38	-12
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
S_i,*м*	30	30,5	31	31,5	32	32,5	33	33,5	34	34,5	35	35,5	36	36,5	37	37,5	38	38,5	39	39,5
Δh,*мм*	-47	-62	-67	-72	-52	-7	18	58	98	148	183	208	238	253	248	243	223	203	198	188
	81	82	83	84	85	86	87	88	89											
S_i,*м*	40	40,5	41	41,5	42	42,5	43	43,5	44											
Δh,*мм*	193	198	203	223	243	253	253	258	253											

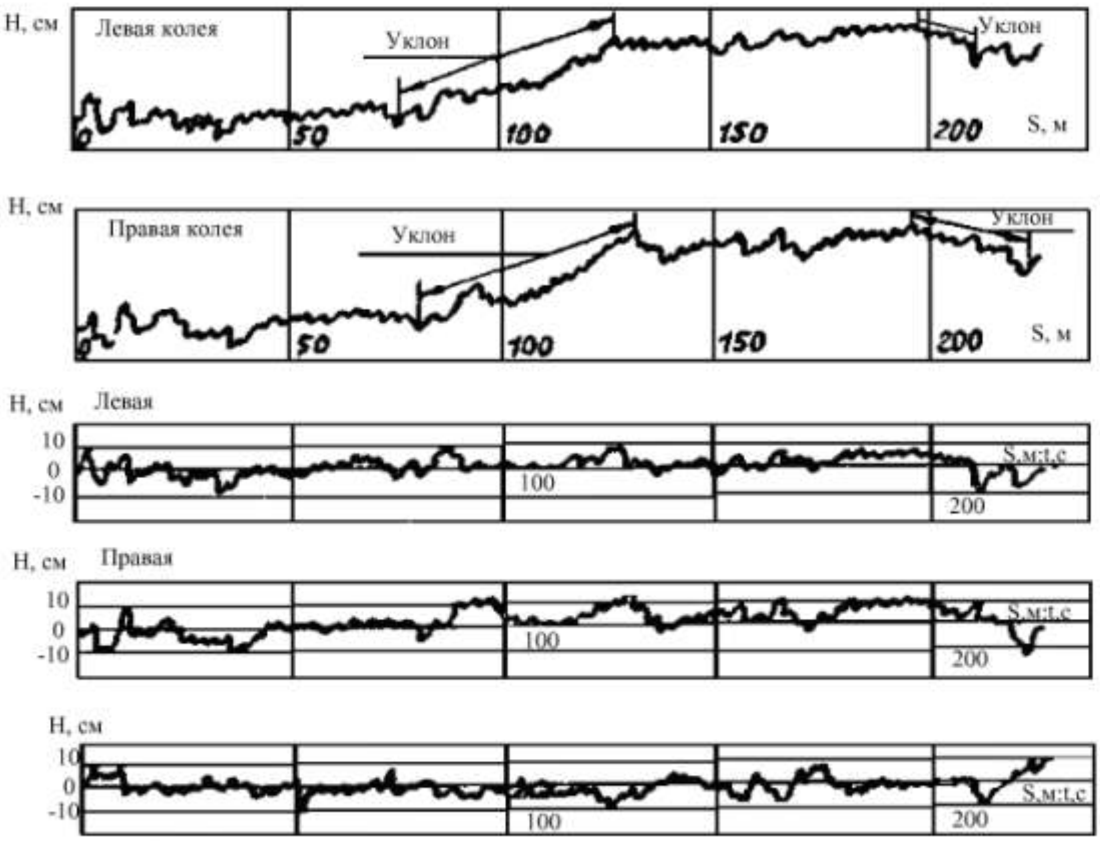

Рисунок 4 - Осциллограммы изменения продольного профиля дороги и соответствующие им случайные процессы: а) – левая колея, б) – правая колея, в) – средняя часть дороги

Рисунок 5 - Модель низкочастотной составляющей продольного профиля неровностей дороги

В заключение отметим, что коэффициенты c_n (48), (50), представляющие собой ортогональные спектральные характеристики, могут быть определены не только при помощи численных методов вычисления интегралов (31), например из (36)÷(39), но и при помощи специальных вычислительных устройств. Таким устройством может быть спектральный анализатор, основанный на формуле (31) и состоящий из генератора функций Лагерра, умножителя и интегратора. Генератор функций Лагерра можно выполнить в виде программируемого цифрового устройства или в виде специального фильтра. Если к фильтру приложено единичное напряжение, то токи, проходящие по последовательным ветвям фильтра, будут изменяться по законам изменения функций Лагерра.

Выводы. Таким образом, рассмотренные методика и алгоритм (27)÷(47), основанные на методе ортогональных разложений, позволяют решить поставленную задачу идентификации и моделирования спектральной плотности $S_X(\omega)$условно-стационарного случайного процесса $x(t)$ по его экспериментально полученной реализации $x_T(t)$ конечной длительности T. Изложенный подход обладает тем преимуществом, что позволяет найти удобное аналитическое дробно-рациональное приближение (оценку) спектральной плотности $\hat{S}_{x_T}(\omega)$ (43)÷(45) или её формирующего оператора $\hat{V}_{x_T}(s)$ (47) непосредственно по записи соответствующего случайного процесса без необходимости специальной предварительной обработки этой записи. При этом для проведения экспериментальной идентификации исследователю не требуется наличия какой-либо специальной измерительно-анализирующей аппаратуры кроме самой «снятой» реализации (осциллограммы) СП $x_T(t)$ и современной ПЭВМ.

Литература.

1. Райбман Н.С. Что такое идентификация. – М.: Наука, 1970.
2. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления /Пер. с англ. Под ред. Н.С.Райбмана. – М.: Мир, 1973. – 324 с.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа /Пер. с англ. Под ред. акад. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
4. Семесенко М.П. Случайные процессы в системах управления. – Киев-Донецк: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 192 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1973. – 832 с.
6. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – Киев: Наукова думка, 1972. – 744 с.
7. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации /Пер. с англ. Под ред. К..И.Бабенко. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
9. Wiener N. The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Application, Wiley, N.Y.: MIT Press, 1949.
10. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р. Теория следящих систем /Пер. с англ. Под ред. Я.З.Цыпкина. Второе издание. – М.: Иностранная лит-ра, 1953. – 464 с.
11. Худяев А.А. Алгоритм расчёта дисперсий ошибок многоканальных итерационных систем методом рекуррентных уравнений //Автоматика. – 1986. - № 6. – С. 43 – 52.
12. Худяев А.А. Вычисление интегральных квадратичных функционалов качества линейных систем рекуррентным методом К.Острема //Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 1999. - № 1. – С. 94 – 102.
13. Худяєв О.А. Моделювання електромеханічних систем. Частина 1: Засоби і методи моделювання. Операторні перетворення рівнянь динаміки: Навчальний посібник. – Харків: УІПА, 2007. – 88 с.