Долбня В.Т. **Украина**

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

О НЕКОТОРЫХ ПРИЕМАХ УСТНОГО СЧЕТА

У инженеров и научных работников постоянно возникает необходимость в выполнении арифметических действий с числами для быстрой оценки того или иного результата. При наличии под руками простейшего калькулятора или мобильного телефона трудностей обычно не возникает. Однако, многие вычисления можно производить в уме практически мгновенно, не прибегая к помощи вычислительного устройства. Во-первых, в нужный момент такого может просто не оказаться рядом, а если оно и есть, то на пользование им уйдет некоторое время: нужно извлечь его из кармана или сумочки, открыть, включить, нажать ряд кнопок, не ошибившись при этом. Это время можно сократить, используя приемы устного счета, изложенные ниже. Ведь никому не придет в голову пользоваться калькулятором для перемножения однозначных чисел - в нашей памяти с детства надежно хранится таблица умножения (правда, к сожалению, не у всех) и мы не задумываясь, мгновенно называем результат подобного вычисления. Но наши возможности можно значительно расширить по крайней мере в 50 раз, научившись быстро перемножать в уме еще около двух с половиной тысяч других пар чисел, необходимость в чем довольно часто встречается даже в повседневной жизни.

Прежде всего, несколько ограничим круг сомножителей.

1. Исключим из рассмотрения перемножение однозначных чисел, а также двухзначных с однозначными, что легко выполняется в уме без особого труда.

2. Ограничимся только произведениями двухзначных чисел, а также некоторых трехзначных, не превышающих 125. Все такие числа разобьем на три числовые группы:

- первая группа: все числа до 25;
- вторая группа: числа от 25 до75;
- третья группа: числа от 75 до 125,

3. Будем рассматривать произведения чисел, входящих в одну числовую группу. Подобных различных пар чисел будет около 2500, что совсем не мало для наших нужд.

Парадоксально, но легче всего, практически мгновенно, выполняется произведения самых больших чисел, входящих в третью группу.

I Перемножение чисел 1-й группы

I.1 Перемножение чисел второго десятка (от 10 до 20).

Если одно из чисел представить в виде $10+a$, а второе – в виде $10+b$, где a и b – цифры единиц, то удобно воспользоваться тождеством

$$(10+a)(10+b) = (10+a+b)10+ab. \qquad (1)$$

Пользоваться этим выражением очень просто: к любому из двух чисел прибавляются единицы другого, мысленно дописывается к этой сумме справа ноль (т.е. умножение на 10) и прибавляется произведение единиц.

Примеры: $13·18 = (13 + 8)·10 + 3·8 = 210 + 24 = 234$, или $(13 + 8)·10 + 3·8 = 210 + 24 = 234$

I.2 Перемножение чисел третьего десятка (от 20 до 25).

Выражая каждое из чисел в виде $20+a$ и $20+b$, пользуемся тождеством

$$(20+a)(20+b)=(20+a+b)·20+ab. \qquad (2)$$

В соответствии с этим тождеством к одному из чисел добавляем единицы второго числа, результат удваиваем, мысленно дописываем ноль и прибавляем произведение единиц.

Примеры: $23 · 24 = (23 + 4) · 20 + 3 · 4 = 27 · 20 + 12 = 540 + 12 = 552$

$21 · 23 = (21 + 3) · 20 + 3 · 1 = 24 · 20 + 3 = 480 + 3 = 483$

I.3 Умножение числа второго десятка на число третьего десятка.

Здесь пригодится тождество

$$(10+a)(20+b)=(20+2a+b)10+ab, \qquad (3)$$

в соответствии с которым к большему числу прибавляем удвоенные единицы меньшего, дописываем ноль и прибавляем произведение единиц.

Примеры: $24 · 13 = (24 + 2 · 3) · 10 + 4 · 3 = (24 + 6) · 10 + 12 = 300 + 12 = 312$

$23 · 19 = (23 + 2 · 9) · 10 = 3 · 9 = (23 +18) · 10 + 27 = 410 + 27 = 437.$

Примечание. Формулы (2) и (3) пригодны также и для вычислений с числами третьего десятка от 20 до 30.

II Перемножение чисел, входящих во II-ю числовую группу

Прежде всего, отметим, что средним числом в этой группе является число 50. Назовем его *базовым* числом этой группы и введем следующие определения. Если число меньше базового, назовем разницу между ним и базовым числом *дополнением* этого числа, вводя следующие обозначения:

$$A'_{50} = 50 - A, \;\; B'_{50} = 50 - B. \qquad (4)$$

Если число больше базового, назовем разницу между ним и базовым числом *превышением* этого числа

$$A''_{50} = A - 50. \;\; B''_{50} = B - 50. \qquad (5)$$

Рассмотрим следующие случаи.

II.1. Оба сомножителя A и B не превышают базового числа.

Расчетная формула имеет вид:

$$AB = \frac{A - B'_{50}}{2} 100 + A'_{50} B'_{50} \ . \tag{6}$$

Пользоваться ею элементарно просто: из одного сомножителя (неважно, какого) вычитаем дополнение второго сомножителя и результат делим пополам. Это будут сотни произведения, а произведение дополнений – единицы произведения.

Примеры: Найдем произведение 48 · 46.

Дополнение первого – 2, а второго – 4. Далее получаем: (48 - 4): 2 · 100 + 2 · 4 = 2200 + 8 = 2208.

37 · 49 = (37 – 1): 2 · 100 + 13 · 1 = 1800 + 13 = 1813.

Не намного сложнее выполнять умножение, если числа разной четности и первая разность в выражении (6) нацело пополам не делится.

Пример: 44 · 49 = (44 – 1): 2 · 100 + 6 = 2150 + 6 = 2156.

II.2. Оба сомножителя превышают базовое число.

Нетрудно получить для этого случая выражение

$$AB = \frac{A + B''_{50}}{2} 100 + A''_{50} B''_{50} . \tag{7}$$

Примеры: У перемножаемых чисел 53 и 64 превышения соответственно равны 3 и 14, поэтому

53 · 64 = (64 + 3) · 100: 2 + 3 · 14 = 33,5 · 100 + 42 = 3392.

57 · 59 = (57 + 9) · 100: 2 + 7 · 9 = 33 · 100 + 63 = 3363.

II.3. Один из сомножителей (допустим, A) больше 50-ти, а другой – меньше 50-ти.

Здесь пригодно следующее выражение:

$$AB = \frac{A - B'_{50}}{2} 100 - A''_{50} B'_{50} . \tag{8}$$

Примеры: 53 · 49 = (53 – 1) · 100: 2 – 3 · 1 = 26 · 100 – 3 = 2600 – 2 = 2597.

44 · 56 = (56 – 6) · 100: 2 – 6 · 6 = 2500 – 36 = 2646.

Конечно, описанные действия тем легче выполняются в уме, чем меньше значения дополнений и превышений, особенно, если они однозначные числа. Но если они и двухзначные (кстати, не превышающие 25), их перемножение легко выполняется по правилам раздела I.

III. Перемножение чисел III-й числовой группы (от 75 до 125)

Базовым числом здесь является 100, при этом дополнения и превышения имеют вид:

$$A'_{100} = 100 - A\ ,\quad B'_{100} = 100 - B\ ,\quad A''_{100} = A - 100\ ,\quad B''_{100} = B - 100.$$

III.1. Оба сомножителя меньше базового числа.

Здесь формула даже проще, чем для предыдущей группы – не нужно число сотен делить пополам:

$$AB = (A - B'_{100}) \cdot 100 + A'_{100} B'_{100} . \tag{9}$$

Примеры: 93 · 97 = (97 – 7) · 100 + 3 · 7 = 9000 + 21 = 9021.

87 · 94 = (87 – 6) · 100 + 13 · 6 = 8100 + 78 = 8178.

83 · 77 = (77 – 17) · 100 + 23 · 17 = 6000 + 391 = 6391.

Произведение 23 · 17 здесь выполняем по п.1.3:

23 · 17 = (23 + 14) · 10 + 21 = 391.

III.2. Оба сомножителя больше базового числа.

Расчетная формула для этого случая

$$AB = (A + B''_{100}) \cdot 100 + A''_{100} B''_{100} . \tag{10}$$

Примеры: 109 · 107 = (109 + 7) · 100 + 9 · 7 = 11600 + 63 = 11663.

103 · 118 = (118 + 3) · 100 + 3 · 18 = 12100 + 54 = 12154.

123 · 109 = (123 + 9) · 100 = 23 · 9 13200 + 207 = 13407.

III.3. Сомножители расположены по разные стороны от базового числа

Пусть A больше 100, а B меньше 100. В этом случае

$$AB = (A - B'_{100}) \cdot 100 - A''_{100} B'_{100} . \tag{11}$$

Примеры: 103 · 98 = (103 – 2) · 100 - 3 · 2 = 10100 -6 = 10094.

109 · 83 = (109 – 17) · 100 - 17 · 9 = 9200 – 153 = 9047.

IV. Вычисление квадратов чисел

Инженерам и ученым полезно уметь находить в уме квадраты чисел хотя бы первой сотни. Такая необходимость возникает практически при любых расчетах.

Квадраты двухзначных чисел являются частным случаем произведения любых двухзначных чисел. Естественно, что все изложенное выше позволяет находить и квадраты. Но та особенность, что оба сомножителя одинаковые, позволяет ввести определенные упрощения и выявить некоторые дополнительные свойства, облегчающие задачу.

Прежде всего, исключим из рассмотрения числа, оканчивающиеся нулем. Здесь применима обычная таблица умножения. Просто находятся также квадраты чисел, оканчивающихся на 5, Для этого случая существует известное школьное правило: цифру десятков умножают на следующую за ней цифру натурального ряда и к полученному произведению приписывают справа число 25.

Примеры: $35^2 = (3 \cdot 4) \cdot 100 + 25 = 1225.$

$75^2 = (7 \cdot 8) \cdot 100 + 25 = 5625.$

Остальные числа разобьем на четыре числовые группы:

I-я группа числа второго десятка (от 11 до 19);

II-я группа числа третьего десятка (от 21 до 24);

III-я группа числа от 26 до 74;

IV-я группа числа от 76 до 125.

IV.1. Определение квадратов чисел I-й группы.

По выражению (1) они находятся очень просто.

Примеры: $11^2 = (11 + 1) \cdot 10 + 1^2 = 121.$ $16^2 = (16 + 6) \cdot 10 + 6^2 = 220 + 36 = 256.$

$12^2 = (12 + 2) \cdot 10 + 2^2 = 144.$ $17^2 = (17 + 7) \cdot 10 + 7^2 = 240 + 49 = 289.$

$13^2 = (13 + 3) \cdot 10 + 3^2 = 169.$ $18^2 = (18 + 8) \cdot 10 + 8^2 = 260 + 64 = 324.$

$14^2 = (14 + 4) \cdot 10 + 4^2 = 196.$ $19^2 = (19 + 9) \cdot 10 + 9^2 = 280 + 81 = 361.$

Квадраты последних четырех чисел можно еще находить иначе: цифру единиц умножают на 40 и прибавляют квадрат дополнения этого числа до 20:

$16^2 = 6 \cdot 40 + (20 - 16)^2 = 240 + 4^2 = 256.$

$17^2 = 7 \cdot 40 + (20 - 17)^2 = 280 + 3^2 = 289.$

$18^2 = 8 \cdot 40 + (20 - 18)^2 = 320 + 2^2 = 324.$

$19^2 = 9 \cdot 40 + (20 - 19)^2 = 260 + 1^2 = 361.$

Эти вычисления выполняются проще, чем по выражению (1).

IV.2. Квадраты чисел II-й группы (от 21 до 24).

По тождеству (2)

$21^2 = (21 + 1) \cdot 20 + 1^2 = 440 + 1 = 441.$

$22^2 = (22 + 2) \cdot 20 + 2^2 = 480 + 4 = 484.$

$23^2 = (23 + 3) \cdot 20 + 3^2 = 520 + 9 = 529.$

$24^2 = (24 + 4) \cdot 20 + 4^2 = 560 + 16 = 576.$

IV.3. Квадраты чисел Ш-й группы (от 26 до 74).

Правило здесь довольно простое: из числа нужно вычесть 25 и приписать справа квадрат отклонения этого числа от 50:

$$A^2 = (A - 25) \cdot 100 + (50 - A)^2 . \qquad (12)$$

Примеры: $28^2 = (28 – 25) \cdot 100 + (50 – 28)^2 = 300 + 22^2 = 300 + 484 = 784.$

$49^2 = (49 – 25) \cdot 100 + (50 – 49)^2 = 2400 + 1^2 = 2401.$

$53^2 = (53 – 25) \cdot 100 + (50 – 53)^2 = 2800 + 3^2 = 2889.$

$67^2 = (67 – 25) \cdot 100 + (50 – 67)^2 = 4200 + 17^2 = 4200 + 289 = 4489.$

$72^2 = (72 – 25) \cdot 100 + (50 – 72)^2 = 4700 + 22^2 = 4700 + 484 = 5184.$

IV.4. Квадраты чисел IV-й группы (от 76 до 125).

IV.4.1. Расчетная формула для чисел первой сотни:

$$A^2 = (A - A'_{100}) \cdot 100 + (A'_{100})^2 . \qquad (13)$$

Примеры: $97^2 = (97 - 3) \cdot 100 + 3^2 = 9409.$

$83^2 = (83 - 17) \cdot 100 + 17^2 = 6600 + 289 = 6889.$

IV.4.2. Для чисел второй сотни (от101 до 125):

$$A^2 = (A + A''_{100}) \cdot 100 + (A''_{100})^2 . \qquad (14)$$

Примеры: $109^2 = (109 + 9) \cdot 100 + 9^2 = 11800 + 81 = 11881.$

$117^2 = (117 + 17) \cdot 100 + 17^2 = 13400 + 289 = 13689.$