Мокін О.Б.,
Мокін Б.І.

Україна
Вінниця

Вінницький національний технічний університет

ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМУ РУХУ ПОРОЖНЬОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ НА ПРЯМОЛІНІЙНОМУ ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ВІДРІЗКУ КОЛІЇ

Вступ. В роботі [1] запропоновано підхід, оснований на декомпозиції задачі оптимізації руху вздовж усієї траєкторії на сукупність підзадач оптимізації руху на відрізках, обмежених точками зміни рельєфу місцевості, в яких накладені умови гладкості як для траєкторії руху транспортного засобу так і для кривої, яка є графіком швидкості руху цією траєкторією.

В роботі [2] поставлена задача оптимізації руху транспортного засобу з електричною тягою на прямолінійному горизонтальному відрізку залізничної колії (відрізок NB на рис. 1 в роботі [1]) за критерієм мінімуму витрат електроенергії у відносних величинах, з використанням яких задача набуває такого формулювання: знайти оптимальні за критерієм мінімуму витрат відносної енергії

$$e = \int_{\tau_N}^{\tau_B} i d\tau \tag{1}$$

закони зміни у відносному часі τ для відносної лінійної швидкості руху v порожнього електричного транспортного засобу та відносного струму i якірних кіл його тягового електроприводу на відносному прямолінійному горизонтальному відрізку колії s_{NB}, по якому цей транспортний засіб з моделлю динаміки

$$\frac{dv}{d\tau} = i\phi(i) - f_0 - f_1 v - f_2 v^2 \tag{2}$$

за відносних граничних умов

$$v(N) = v_N, \tag{3}$$

$$v(B) = v_B \tag{4}$$

рухається за програмою

$$s_{NB} = \int_{\tau_N}^{\tau_B} v d\tau. \tag{5}$$

В роботі [3] показано, що крива намагнічування $\Phi(I)$ тягового електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням найбільш точно і просто у відносних одиницях представляється моделлю

$$\phi(i) = \begin{cases} -a_2 i^2 + b_2 i, & i \in [0, i_{cn}), \\ a_1 + b_1 i, & i \in [i_{cn}, \infty), \end{cases} \tag{6}$$

яка є сукупністю параболи і прямої, які стикуються при значенні аргументу i_{cn}. Оскільки справедливою є нерівність $i_{cn} < i_н$, або $i_{cn} < 1$ (що одне і те ж), то можна стверджувати, що в разі повної завантаженості електричного транспортного засобу електродвигуни його електроприводу працюють на прямолінійній частині характеристики намагнічування, а в разі руху порожняком — на параболічній. Тож для випадку руху електричного транспортного засобу порожняком, який ми розглядаємо у цій роботі, в моделі (2) в-подальшому будемо використовувати $\phi(i)$ у вигляді

$$\phi(i) = -a_2 i^2 + b_2 i, \quad i \in [0, i_{cn}). \qquad 7)$$

Розв'язання поставленої задачі. Виходячи із основ варіаційного числення [4] та співвідношень (1), (2), (5), функція Лагранжа для нашої задачі матиме вигляд

$$L = i + \lambda_0 (s' - v) + \lambda_1 \left(v' - i\phi(i) + f_0 + f_1 v + f_2 v^2 \right), \tag{8}$$

а рівняння Ейлера —

$$L_i - \frac{d}{d\tau} L_{i'} = 0, \tag{9}$$

$$L_s - \frac{d}{d\tau} L_{s'} = 0, \tag{10}$$

$$L_v - \frac{d}{d\tau} L_{v'} = 0. \tag{11}$$

Підставляючи функцію Лагранжа (8) в рівняння (9) – (11) і знаходячи відповідні частинні похідні та виконуючи диференціювання по відносному часу, матимемо

$$1-\lambda_1\left(\phi(i)+i\frac{d\phi}{di}\right)=0\,, \tag{12}$$

$$-\frac{d\lambda_0}{d\tau}=0\,, \tag{13}$$

$$-\lambda_0+\lambda_1\left(f_1+2f_2v\right)-\frac{d\lambda_1}{d\tau}=0\,. \tag{14}$$

Із рівняння (13) знайдемо, що

$$\lambda_0=-C_0\,. \tag{15}$$

Підставляючи значення множника Лагранжа λ_0 з (15) у рівняння (14), приведемо це рівняння до вигляду

$$\frac{d\lambda_1}{C_0+\lambda_1\left(f_1+2f_2v\right)}=d\tau\,. \tag{16}$$

Інтегруючи рівняння (16), матимемо

$$\frac{1}{f_1+2f_2v}ln\left(C_0+\lambda_1\left(f_1+2f_2v\right)\right)=\tau+C_1\,, \tag{17}$$

або

$$\lambda_1=\frac{1}{f_1+2f_2v}\left(e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)}-C_0\right). \tag{18}$$

Підставляючи значення λ_1 з виразу (18) в рівняння (12), отримаємо

$$\phi(i)+i\frac{d\phi}{di}=\frac{f_1+2f_2v}{e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)}-C_0}\,. \tag{19}$$

А підстановка значення $\phi(i)$ з виразу (7) у (19) приводить до співвідношення

$$-3a_2i^2+2b_2i=\frac{f_1+2f_2v}{e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)}-C_0}\,, \tag{20}$$

або

$$i^2-\frac{2b_2}{3a_2}i+\frac{f_1+2f_2v}{3a_2\left(e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)}-C_0\right)}=0\,, \tag{21}$$

з якого —

$$i_{(1)}=\frac{b_2}{3a_2}+\sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2}-\frac{f_1+2f_2v}{3a_2\left(e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)}-C_0\right)}}\,, \tag{22}$$

$$i_{(2)}=\frac{b_2}{3a_2}-\sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2}-\frac{f_1+2f_2v}{3a_2\left(e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2v)}-C_0\right)}}\,. \tag{23}$$

Пряма підстановка виразів (22) і (23) в критерій (1) показує, що мінімум цього критерію досягатиметься лише при значеннях i, які визначаються із виразу (23), тож в подальшому під оптимальним струмом i будемо розуміти $i_{(2)}$, опускаючи при написанні нижній індекс.

У виразі (23) a_2, b_2, f_1, f_2 є попередньо визначеними числовими коефіцієнтами, а C_0, C_1 – це невідомі параметри математичної моделі оптимального струму, які визначатимуться в процесі подальшого розв'язання задачі оптимізації. Із цього виразу витікає також, що оптимальний струм якірних кіл електропривода транспортного засобу трансцендентно залежить від лінійної швидкості його руху, тож тепер ми перейдемо до побудови математичної моделі для неї.

В роботі [4] для побудови оптимальних законів руху об'єктів з навантаженням, що залежить від їхньої лінійної швидкості, пропонується використовувати ортогональні системи функцій з орієнтацією на системи ортогональних поліномів типу Лагерра [5]

$$L_k(\tau)=\frac{1}{k!}e^{\tau}\frac{d^k}{d\tau^k}\left(\tau^k e^{-\tau}\right)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{k!}{(k-i)!\,i!\,i!}\tau^i,\quad k=0,1,\ldots,n\,, \tag{24}$$

тобто пропонується задавати лінійну швидкість ν електричного транспортного засобу на часовому відрізку у нашому випадку $[\tau_N,\tau_B]$$[\tau_N,\tau_B]$, за який транспортний засіб долає відрізок шляху у нашому випадку NB (рис. 1 в роботі [1]) у вигляді

$$v(\tau)=\sum_{k=0}^{n} g_k L_k(\tau), \tag{25}$$

де

$$g_k=\int_{\tau_N}^{\tau_B} v(\tau)L_k(\tau)d\tau, \quad k=0,1,\dots,n. \tag{26}$$

Оскільки нам невідома функція ν(τ), то коефіцієнти g_k, які називають коефіцієнтами Фур'є цієї функції, у виразі (25) в задачі оптимізації потрібно знаходити не з виразу (26), а з системи рівнянь, складеної відносно них як невідомих величин. Її складення розпочнемо з відповіді на питання, що це за рівняння, і скільки їх у системі повинно бути.

Спочатку встановимо, скільки рівнянь повинно бути в системі визначення коефіцієнтів Фур'є для виразу (25). Очевидно, що рівнянь у системі повинно бути стільки, скільки коефіцієнтів для виразу (25) ми хочемо знайти. Але потрібно не забувати, що у нас є ще два невідомі коефіцієнти C_0, C_1, поява яких обумовлена розв'язанням задачі оптимізації з використанням рівнянь Ейлера, тож крім рівнянь, в яких в якості невідомих величин виступають коефіцієнти Фур'є g_k функції ν(τ), нам необхідно мати ще два рівняння додатково, в яких в якості невідомих виступають ще й коефіцієнти C_0, C_1.

Оскільки електричні транспортні засоби мають значну масу, то можна стверджувати, що їх лінійна швидкість ν(τ) не може змінюватись у часі стрибкоподібно, а є гладкою функцією, тобто є функцією неперервною з неперервною першою похідною. Це дає нам право використовувати в математичній моделі лінійної швидкості (25) лише кілька ортогональних поліномів Лагерра, перші шість із яких згідно з виразом (24) мають вигляд:

$$\begin{gathered} L_0(\tau)=1,\quad L_1(\tau)=1-\tau,\quad L_2(\tau)=1-2\tau+\frac{\tau^2}{2},\quad L_3(\tau)=1-3\tau+\frac{3}{2}\tau^2-\frac{1}{6}\tau^3,\\ L_4(\tau)=1-4\tau+3\tau^2-\frac{2}{3}\tau^3+\frac{1}{24}\tau^4,\quad L_5(\tau)=1-5\tau+5\tau^2-\frac{5}{3}\tau^3+\frac{5}{24}\tau^4-\frac{1}{120}\tau^5, \end{gathered} \tag{27}$$

яким відповідають шість коефіцієнтів Фур'є g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5. Для їх визначення потрібно мати систему із 6 рівнянь, в яких вони виступатимуть невідомими. Але у рівнянні струму (23) ми маємо ще дві невідомі величини – C_0, C_1. Тож і для їх визначення кількість рівнянь у системі необхідно збільшити до 8.

Із цих, потрібних 8 рівнянь, перші три знаходяться дуже просто — підстановкою виразу (25) в рівняння граничних умов (3), (4) і програми руху (5), в результаті чого матимемо

$$v_N=\sum_{k=0}^{5} g_k L_k(\tau_N), \tag{28}$$

$$v_B=\sum_{k=0}^{5} g_k L_k(\tau_B), \tag{29}$$

$$s_{NB}=\int_{\tau_N}^{\tau_B}\left(\sum_{k=0}^{5} g_k L_k(\tau)\right)d\tau. \tag{30}$$

Вважаючи коефіцієнти Фур'є g_0, g_1, g_2 параметрами, методом Крамера розв'яжемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь (28), (29), (30) відносно g_3, g_4, g_5 В результаті цього отримаємо значення g_3, g_4, g_5 у вигляді функцій від g_0, g_1, g_2, тобто

$$\begin{cases} g_3=\phi_3(g_0,g_1,g_2),\\ g_4=\phi_4(g_0,g_1,g_2),\\ g_5=\phi_5(g_0,g_1,g_2). \end{cases} \tag{31}$$

А підставляючи (25) (при $n=5$) у вираз (23), матимемо

$$i=\frac{b_2}{3a_2}-\sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2}-\frac{f_1+2f_2\sum_{k=0}^{5} g_k L_k(\tau)}{3a_2\left(e^{(\tau+C_1)\left(f_1+2f_2\sum_{k=0}^{5} g_k L_k(\tau)\right)}-C_0\right)}}. \tag{32}$$

Після цього вираз (32) підставимо в (1), внаслідок чого отримаємо

$$e=\int_{\tau_N}^{\tau_B}\left(\frac{b_2}{3a_2}-\sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2}-\frac{f_1+2f_2\sum_{k=0}^{5} g_k L_k(\tau)}{3a_2\left(e^{(\tau+C_1)\left(f_1+2f_2\sum_{k=0}^{5} g_k L_k(\tau)\right)}-C_0\right)}}\right)d\tau \tag{33}$$

А далі здійснимо наступні кроки. Спочатку у вираз (33) підставимо функції (31), що перетворить (33) на

$$e\left(g_0,g_1,g_2,C_0,C_1\right)=\int_{\tau_N}^{\tau_B}\left(\frac{b_2}{3a_2}-\sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2}-\frac{f_1+2f_2\left(\sum_{k=0}^{2}g_kL_k\left(\tau\right)+\sum_{k=3}^{5}\phi_k\left(g_0,g_1,g_2\right)L_k\left(\tau\right)\right)}{3a_2\left(e^{\left(\tau+C_1\right)\left(f_1+2f_2\left(\sum_{k=0}^{2}g_kL_k(\tau)+\sum_{k=3}^{5}\phi_k(g_0,g_1,g_2)L_k(\tau)\right)\right)}-C_0\right)}}\right)d\tau, \tag{34}$$

тобто на функцію 5 змінних g_0, g_1, g_2, C_0, C_1, на значеннях яких вона досягає екстремуму (у нашому випадку мінімуму). Для знаходження цих значень складемо і розв’яжемо систему 5 рівнянь відносно цих змінних, беручи частинні похідні від цієї функції по кожній із змінних і прирівнюючи їх нулю. У загальному вигляді ця система матиме вигляд

$$\begin{cases}\dfrac{\partial e}{\partial g_0}=0,\\ \dfrac{\partial e}{\partial g_1}=0,\\ \dfrac{\partial e}{\partial g_2}=0,\\ \dfrac{\partial e}{\partial C_0}=0,\\ \dfrac{\partial e}{\partial C_1}=0.\end{cases} \tag{35}$$

Звертаємо увагу на те, що кожне із рівнянь в системі (35) є інтегральним, і що пакет прикладних програм Mathcad містить в собі програму для розв’язання системи інтегральних рівнянь. Тож, розв’язуючи за його допомогою систему інтегральних рівнянь (35), отримаємо числові значення параметрів g_0^*, g_1^*, g_2^*, C_0^*, C_1^*, підставляючи які в вирази (25), (23), отримаємо математичні моделі для $v\left(\tau\right)$, $i\left(\tau\right)$, побудовою яких досягається поставлена мета, тобто розв’язується поставлена задача.

Висновки.

1. Показано, як побудувати математичну модель для оптимальної лінійної швидкості руху не завантаженого електричного транспортного засобу по прямолінійній дільниці колії, прокладеній на горизонтальній площині, у випадку, коли задаються лише програма руху на цій дільниці, значення лінійної швидкості у граничних точках траєкторії руху та критерій оптимізації.

2. Здійснено синтез математичної моделі для оптимального струму якірних кіл електроприводу не завантаженого електричного транспортного засобу, завдяки реалізації якої досягається мінімум витрат електроенергії на виконання програми руху цього транспортного засобу по прямолінійному горизонтальному відрізку колії між заданими граничними точками траєкторії руху.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мокін Олександр Борисович. Особливості моделювання руху електричних транспортних засобів з врахуванням залежності навантаження від рельєфу місцевості [Електронний ресурс] / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Наукові праці ВНТУ. – 2010. – №1. Режим доступу до журн.: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2010_1/2010-1.files/uk/10abmlor_ua.pdf.

2. Мокін Олександр Борисович. Відносні моделі руху електричного транспортного засобу по горизонтальному прямолінійному відрізку колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – №2. – С. 31-35.

3. Мокін Борис Іванович. Ідентифікація параметрів моделей та оптимізація режимів системи електропривода трамвая з тяговими електродвигунами постійного струму. Монографія / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 92 с.

4. Петров Юрий Петрович. Оптимальное управление движением транспортных средств / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1969. – 96 с.

5. Г. Арфкен. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат. – 1970. – 712 с.