Мороз В. І. ***Україна***
Сольський М. І. ***Львів***
Головач І. Р.

Національний університет "Львівська політехніка"

УМОВИ РЕАЛІЗАЦІЇ ЦИФРОВИХ РЕГУЛЯТОРІВ НА ЦИФРОВИХ СИСТЕМАХ З ОБМЕЖЕНОЮ РОЗРЯДНІСТЮ

Постановка проблеми. Цифрові системи керування є найефективнішими з точки зору забезпечення високої точності, універсальності та можливості реалізації складних алгоритмів керування. Їх використання є найбільш перспективним з точки зору експлуатаційних, енергетичних, динамічних характеристик, що необхідні для функціонування певного технологічного комплексу. Синтез цифрових систем, як правило, базується на дискретизації неперервного прототипу (наприклад, методом Тастіна, відповідності нулів-полюсів тощо [1, 2]). Однією з малодосліджених проблем у цифрових системах керування є вплив на їх поведінку обмеженої розрядності апаратної частини, яка має вплив на їх синтез і практичну реалізацію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ефект обмеженої розрядності апаратної частини враховується у розробці цифрових фільтрів (DSP), наприклад, [3, 4], але, як правило, лише на рівні обмеженої точності вхідних і вихідних даних і дискретного характеру розміщення нулів і полюсів дискретної передатної функції цифрової системи. У відомих роботах в області реалізації цифрових систем керування [1, 2, 5] ефект впливу обмеженої розрядності даних на поведінку системи аналізується лише з огляду двох факторів:

- вплив обмеженої розрядності на точність підтримання регульованих координат, яка, в основному, визначається розрядністю АЦП або цифрових давачів;
- розміщення нулів і полюсів дискретних передатних функцій лише в обмеженій кількості дискретних точок на комплексній площині.

Таким чином, у переважній більшості випадків аналіз стійкості цифрових систем керування проводиться класичними методами для лінійних систем – дослідження розміщення нулів/полюсів на комплексній площині, аналіз частотних характеристик тощо [5, 6]. У той же час, виявлено інші фактори, за яких цифрова система керування стає нестійкою за певного значення розрядності цифрового пристрою [7].

Потрібно відзначити, що проблема числової нестійкості у випадку обмеженої розрядності обчислень є відомою в прикладній математиці, наприклад, розглянута у роботах [8, 9]. Однак результати проведених авторами цих робіт досліджень, зокрема, впливу похибок коефіцієнтів поліномів на точність знаходження їх коренів, у теорії цифрових систем наразі не є поширеними.

Метою статті є встановлення взаємного зв'язку між точністю коефіцієнтів дискретної передатної функції цифрової системи та мінімальним кроком дискретизації з умови забезпечення працездатності такої системи.

Виклад основного матеріалу. Загальноприйнятою є думка, що у випадку зменшення кроку дискретизації система теоретично мала б наближатися за своєю поведінкою до неперервного прототипу. Проте, наявність у системі обмеженої розрядності при задаванні коефіцієнтів дискретної передатної функції призводить до інших, неочікуваних наслідків – зменшення періоду дискретизації викликає відхилення у поведінці отриманої цифрової системи порівняно з неперервним прототипом [7].

Пояснення цього явища можна отримати з робіт [8, 9], в яких показано, що поліноми з кратними чи близькими коренями є дуже чутливими до похибок у задаванні коефіцієнтів поліномів. Як наслідок, у цифрових системах зменшення кроку дискретизації призводить до переміщення всіх нулів і полюсів дискретної передатної функції до одиниці – тобто, всі корені поліномів чисельника і знаменника стають дуже близькими, внаслідок чого поліноми стають погано обумовленими і, як результат, чутливими до точності задавання коефіцієнтів.

Спрощенню задачі аналізу сприяє використання основної теореми алгебри (відомої також як теорема розкладення Хевісайда) – будь-яку правильну дробово-раціональну функцію (у нашому випадку – передатну функцію) можна розкласти на елементарні складові не вище другого порядку (відповідають нульовим і дійсним полюсам та парам комплексно-спряжених полюсів). Таким чином, подальші дослідження будуть стосуватися елементарних ланок першого та другого порядку.

Оскільки погана обумовленість дискретної передатної функції випливає з переміщення всіх її нулів та полюсів до одиниці ($\lim\limits_{h\to 0} e^{-h/T}=1$), необхідно здійснити аналіз граничної можливості забезпечення умови стійкості – нерівності $e^{-h/T}<1$ виходячи з розрядності системи.

Для ланки першого порядку неперервний p та, відповідно, дискретний полюс P^* мають вигляд:

$$\frac{1}{Ts+1} \quad \Rightarrow \quad p=-\frac{1}{T};\;\; P^*=e^{-\frac{h}{T}}. \tag{1}$$

Проведені дослідження показали, що у випадку одного дійсного полюса відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу, для прикладу в типовій 16-розрядній системі без знаку (N = 16, де N – двійкова розрядність системи) для граничних умов має наступний вигляд:

$$\frac{2^N - 1}{2^N} \geq e^{-\frac{h}{T}}, \text{ тобто } \frac{h}{T} \geq 1{,}526 \cdot 10^{-5}. \tag{2}$$

Для ланки другого порядку з передатною функцією $\frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ неперервні та, відповідно, дискретні полюси (з верхнім індексом *) будуть такими:

$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}, \; P^*_{1,2} = e^{-\xi \frac{h}{T}} \cdot e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{h}{T}}. \tag{3}$$

Як видно з формул (3), дискретні полюси ланки другого порядку містять дві складові:

1) перша складова $e^{-\xi \frac{h}{T}}$ відповідає довжині вектора комплексного числа, тобто його модулю;
2) друга складова $e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{h}{T}}$ відповідає куту повороту вектора комплексного числа.

Проведений аналіз показав, що у випадку ланки другого порядку з парою комплексно спряжених полюсів відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу, для прикладу в 16-ти розрядній цифровій системі (N = 16, де N – двійкова розрядність системи) має аналогічний вигляд:

$$\frac{2^N - 1}{2^N} \geq e^{-\xi \cdot \frac{h}{T}} \text{ – для складової, що відповідає довжині вектора комплексного числа;} \tag{4}$$

$$\frac{2^N - 1}{2^N} \geq e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{h}{T}} \text{ – для складової, що відповідає куту повороту вектора комплексного числа.} \tag{5}$$

Потрібно відзначити, що у коливній ланці другого порядку з'являється додатковий параметр ξ (коефіцієнт вгамування), який у реальних системах змінюється в межах від 0,1до 0,9 і вносить корективи у величину мінімально допустимого кроку дискретизації відповідно до умови стійкості дискретної системи $e^{-h/T} < 1$.

Висновки. У статті встановлено залежність між розрядністю апаратної частини цифрових систем та мінімально допустимим з умов реалізації кроком дискретизації. З використанням отриманих залежностей (2) і (4-5) показано, що у цифрових системах з обмеженою розрядністю існує мінімальний крок дискретизації, для якого виконується умова стійкості дискретної системи $e^{-h/T} < 1$.

Література

1. Rolf Isermann. Digital Control Systems. – Springer-Verlag, 1981. – 566 p.
2. Benjamin C. Kuo. Digital Control Systems. – Oxford University Press, 1992. – 751 p.
3. Güner Arslan. Digital Signal Processing [Dept. of Electrical and Computer Engineering. The University of Texas at Austin]. – 2007. – http://signal.ece.ute-xas.edu/~arslan/courses/dsp/
4. Selesnick I. Digital Signal Processing. – http://eeweb.poly.edu/iselesni/EL713/zoom/quant.pdf
5. Moudgalya Kannan M. Digital Control. – John Wiley & Sons, Ltd. – 2007. – 544 p.
6. Istepanian, Robert; Whidborne, James F. (Eds.) Digital Controller Implementation and Fragility : A Modern Perspective [Series: Advances in Industrial Control]. Springer, 2001. – 278 p.
7. Мороз В. І. Синтез цифрових систем реального часу з обмеженою розрядністю// В. Мороз / Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". Тематичний випуск "Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2008. – № 30. – С. 215-216.
8. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. Computer Methods for Mathematical Computations. – Englewood Cliffs, New Jersey 07632. – Prentice Hall, Inc., 1977. – 259 p.
9. Cleve Moler. Numerical Computing with MATLAB. [©2004, Cleve Moler]. MathWorks, Inc. [електронний ресурс]. – [Режим доступу до ресурсу] http://www.mathworks.com/moler/chapters.html.