

**И. В. ОБРУЧ**, ст. преподаватель, НТУ «ХПИ»;  
**А. В. ХОРЕВА**, мл. научн. сотр., НТУ «ХПИ».

### НОВАЯ МОДЕЛЬ ДВУХМАССОВОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ ПАРАМЕТРАХ

Динамические свойства электромеханической системы (ЭМС) зависят от ее физических параметров. Математическая модель в классической форме даже простейшей одномассовой системы управления двигателем не зависимо возбуждения [1] включает в себя 7 параметров:  $R_a$  и  $L_a$  – сопротивление и индуктивность цепи якоря двигателя, соответственно,  $R_b$  и  $L_b$  – аналогичные величины цепи возбуждения,  $K$  – конструктивный коэффициент,  $\Phi$  – магнитный поток,  $J$  – момент инерции ЭМС. В случае зависимости характеристики нагрузки от скорости электродвигателя (ЭД) добавляется 8-ой параметр  $\beta_c = dM_c / d\omega$  – жесткость механической характеристики нагрузки  $M_c = f(\omega)$ .

Переход к обобщенным параметрам при неизменности потока возбуждения:  $T_a = L_a / R_a$  – электромагнитная постоянная времени силовой цепи ЭД,  $\beta = (K\Phi_n)^2 / R_a$  – модуль жесткости механической характеристики электропривода,  $T_m = J \cdot R_a / (K\Phi_n)^2$  – электромеханическая постоянная времени сокращает при  $M_c = f(\omega)$  число параметров до 4-х.

Для двухмассовой ЭМС с упругой кинематической связью, даже если не учитывать ее внутреннее вязкое трение, добавляются параметры  $c_{1,2}$  – жесткость упругой связи,  $J_2$  – момент инерции 2-ой массы, т.е. число параметров оказывается равным 6-ти.

Известно [2, 3], что в ЭМС с нелинейным трением, характеристика которых содержит падающий участок, возможно возникновение фрикционных автоколебаний (АКФ), ухудшающих показатели технологического процесса машин и механизмов. Возможность возникновения АКФ устанавливается по факту расходящегося динамического процесса при перемещении рабочей точки по падающему участку, на котором электропривод может рассматриваться как электромеханическая система с отрицательным вязким трением (ЭМС с ОБТ). В свою очередь, характер динамического процесса определяется корнями характеристического полинома передаточной функции ЭМС, коэффициенты которого зависят от физических параметров системы.

С практической точки зрения, для графического отображения областей устойчивости ЭМС с ОБТ в зависимости от параметров системы желательно свести к минимуму число параметров, однозначно определяющих характер динамического процесса. В [4] показано, что это может быть достигнуто удачным выбором системы обобщенных параметров и относительных единиц, через которые выражаются коэффициенты и переменные исходной структурно-алгоритмической схемы электромеханической системы. Переход в нормированной схеме к безразмерному времени  $t_* = t \cdot \Omega_{1,2}$  и соответственно к безразмерному оператору Лапласа  $p_* = p / \Omega_{1,2}$ , где  $\Omega_{1,2}$  – собственная частота упругих недемпфированных колебаний упругой механической системы, равная

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{c_{1,2} \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2}}, \quad (1)$$

позволил сократить для двухмассовой системы с неизменным моментом нагрузки число обобщенных параметров до 3-х:  $\gamma = (J_1 + J_2) / J_1$  – коэффициент соотношения масс,  $T_3^* = T_3 \cdot \Omega_{1,2}$ ,  $T_{m,1}^* = T_{m,1} \cdot \Omega_{1,2} = J_1 / \beta \cdot \Omega_{1,2}$ .

Возможность сокращения числа обобщенных параметров по сравнению с числом физических параметров указывает на наличие между ними физической взаимосвязи по влиянию на характер динамического процесса. Минимальное число обобщенных параметров, однозначно определяющих характер динамического процесса (апериодический, колебательный, сходящийся, расходящийся), равно порядку характеристического полинома передаточной функции ЭМС.

В [5] приведены варианты безразмерных обобщенных параметров для ЭМС с нелинейным трением. Общим для них является введение параметра  $b = \beta_c / \beta$ , представляющего отношение жесткости механической характеристики нагрузки к модулю жесткости механической характеристики электропривода. Показано, что для одномассовой ЭМС такими параметрами могут быть  $b$  и  $m = \frac{T_{m1}}{T_3}$ , от значений которых зависит принадлежность к той или иной области динамического процесса. Для двухмассовой ЭМС использовались параметры  $\gamma$ ,  $T_{m1}^*$ ,  $b$ , а также параметр  $\nu = \frac{\Omega_{1,2}^2}{\Omega_{эм}^2}$ , где  $\Omega_{эм} = \frac{1}{\sqrt{T_3 \cdot T_{m1}}}$ .

В настоящей работе предлагается иная совокупность обобщенных безразмерных параметров, позволяющая несколько упростить вид структурно-алгоритмической схемы двухмассовой электромеханической системы с нелинейным трением.

Математическая модель двухмассовой электромеханической системы

© И. В. Обруч, А. В. Хорева, 2015 в структурной форме, учитывающая линеаризованную зависимость  $M_c = f$

( $\omega$ ) в диапазоне перемещения рабочей точки во время динамического процесса, показана на рис. 1. В данной структурной схеме обозначено:  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  – скорости холостого хода, электродвигателя и рабочего органа соответственно;  $\beta$  – модуль жесткости рабочего участка механической характеристики электропривода;  $T_3$  – электромагнитная постоянная времени электропривода;  $J_1$  – момент инерции ротора (якоря) электродвигателя и жестко связанных с ним движущихся масс,  $c_{1,2}$  – жесткость упругой кинематической связи;  $J_2$  – момент инерции 2-й массы (рабочий орган и жестко связанные с ним массы);  $M_1, M_{1,2}$  – момент электродвигателя и упругий момент;  $\beta_c$  – жесткость рабочего участка механической характеристики нагрузки. Следует заметить, что данная структурная схема может быть применена для анализа процесса возбуждения фрикционных автоколебаний в электроприводах постоянного и переменного тока (если во время динамического процесса рабочая точка не выходит за рабочий участок характеристики АД), при условии нелинейной характеристики трения на отдельных участках.

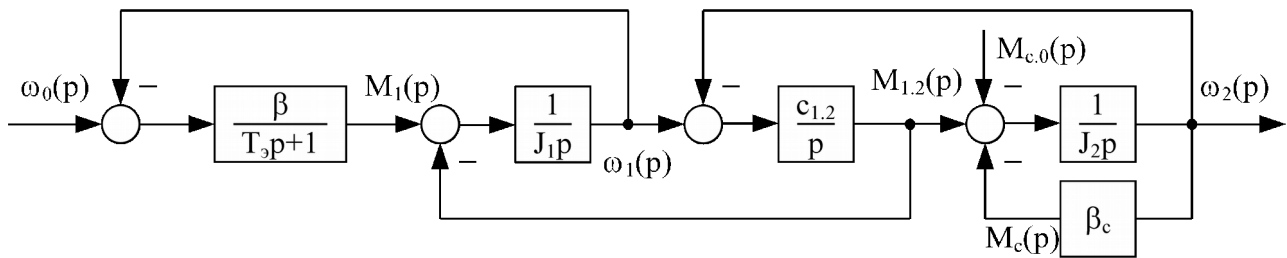


Рисунок 1 – Структурная схема двухмассовой электромеханической системы в физических параметрах

Используя обобщенные безразмерные параметры:  $\gamma = (J_1 + J_2) / J_1$  – коэффициент инерции;  $T_{м.1*} = T_{м.1} \cdot \Omega_{1,2} = J_1 / \beta \cdot \Omega_{1,2}$  – относительная электромеханическая постоянная времени;  $\nu = \Omega_{1,2}^2 / \Omega_{эм}^2$  – отношение квадратов частот недемпфированных механического и электромеханического резонансов; коэффициентов  $\mu = \beta_{12} / c_{1,2} \cdot \Omega_{1,2}$  и параметра  $b = \beta_c / \beta$ , а также выбрав в качестве базовых величин:  $M_{к.з.} = \beta \cdot \omega_0$  – момент короткого замыкания и  $\omega_0$  – скорость холостого хода электропривода может быть получена структурная схема, которая представлена на рис. 2. Данная структурная схема стала традиционной при написании многих диссертационных и научно-исследовательских работ.

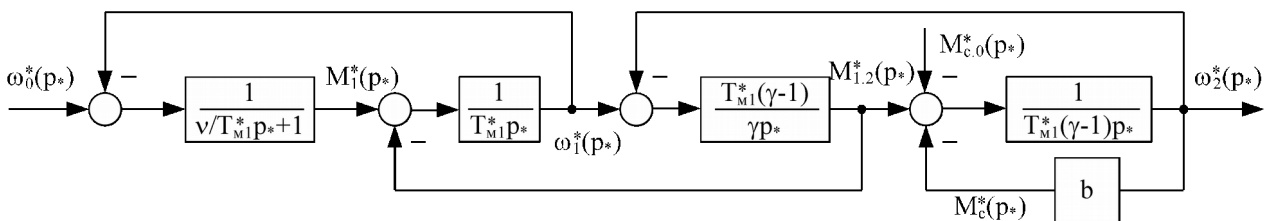


Рисунок 2 – Традиционная структурная схема двухмассовой электромеханической системы в обобщенных параметрах

Данный набор относительных безразмерных параметров характеризует динамические свойства не одной какой-либо системы, а целого класса систем с одинаковыми обобщенными параметрами. Преимуществом такого представления систем, по сравнению с описанием системы в физических параметрах, является возможность получить, например, законы управления для широкого класса объектов электропривода.

Кроме вышеперечисленных положительных свойств описания двухмассовых электроприводов при помощи обобщенных параметров, традиционная структурная схема на рис. 2 имеет и ряд недостатков. К ним следует отнести:

1) традиционную двухмассовую структурную схему невозможно преобразовать в одномассовую путем отбрасывания звеньев, моделирующих упругие кинематические связи и инерционность второй массы, так как в описание звена электромагнитного преобразования энергии входит безразмерный параметр ( $\nu$ ), не имеющий смысла для одномассовой электромеханической системы. Т.е. возникает необходимость получения самостоятельной модели в виде структурной схемы для одномассовой электромеханической системы в обобщенных параметрах;

2) характер динамического процесса электромеханической системы зависит от соотношения механической и электромагнитной постоянных времени электропривода  $m = T_m / T_3$ , а этот безразмерный коэффициент не попал в математическое описание традиционной двухмассовой электромеханической системы в обобщенных параметрах. Вместо него используется относительная электромеханическая постоянная времени  $T_{м.1}^*$ .

Для того чтобы осуществить переход от двухмассовой электромеханической системы в физических параметрах (рис. 1) к новой структурной схеме двухмассовой электромеханической системы в обобщенных пара-

метрах (рис. 3), примем следующие обозначения:  $t_* = \frac{t}{T_3}$  – относительное время, при этом  $p_* = T_3 \cdot \frac{d}{dt} = T_3 p$  – относительный безразмерный оператор дифференцирования, а в качестве базовых величин:  $M_{к.з} = \beta \cdot \omega_0$  – момент короткого замыкания и  $\omega_0$  – скорость холостого хода электропривода.

Уравнение электромеханического преобразования энергии в операторной форме имеет вид

$$M_1 \cdot (T_3 p + 1) = (\omega_0 - \omega_1) \cdot \beta \quad (2)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (2) на  $\beta \cdot \omega_0$ , после преобразования величин получим уравнение электромеханического преобразования энергии в относительных величинах

$$M_1^* \cdot (p_* + 1) = \omega_0^* - \omega_1^* \quad (3)$$

Уравнение движения 1-ой массы в операторной форме с учетом того, что  $T_{m1} = \frac{J_1}{\beta}$  имеет вид

$$T_{m1} \beta \cdot p \omega_1 = M_1 - M_{1.2} \quad (4)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (4) на  $\beta \cdot \omega_0 \cdot T_3$ , после преобразования величин получим

$$m \cdot p_* \omega_1^* = M_1^* - M_{1.2}^* \quad (5)$$

Процессы, происходящие в упругой кинематической связи, описываются уравнением, имеющим вид

$$p M_{1.2} = c_{1.2} \cdot (\omega_1 - \omega_2) \quad (6)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (6) на  $\beta \cdot \omega_0 \cdot T_3$ , получим

$$\frac{p M_{1.2}}{\beta \cdot \omega_0 \cdot T_3} = \frac{c_{1.2} \cdot (\omega_1 - \omega_2)}{\beta \cdot \omega_0 \cdot T_3} \quad (7)$$

$$p_* M_{1.2}^* = T_3 \frac{c_{1.2}}{\beta} (\omega_1^* - \omega_2^*) \quad (8)$$

Учитывая, что  $\Omega_{1.2}^2 = c_{1.2} \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2} = c_{1.2} \frac{\gamma}{J_2} = c_{1.2} \frac{\gamma}{(\gamma - 1) J_1}$ ,  $\nu = \Omega_{1.2}^2 / \Omega_{эм}^2 = \Omega_{1.2}^2 \cdot T_3 \cdot T_{m1}$ , а  $T_{m1} = J_1 / \beta$  выражение (7) можно преобразовать к виду

$$p_* M_{1.2}^* = \frac{\nu (\gamma - 1)}{\gamma} (\omega_1^* - \omega_2^*) \quad (9)$$

Уравнение движения 2-ой массы в операторной форме имеет вид

$$J_2 \cdot p \omega_2 = M_{1.2} - M_c \quad (10)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (10) на  $\beta \cdot \omega_0 \cdot T_3$ , с учетом  $T_{m1} = J_1 / \beta$  и  $m = T_{m1} / T_3$  преобразуем выражение 10 к виду

$$m (\gamma - 1) \cdot p_* \omega_2^* = M_{1.2}^* - M_c^* \quad (11)$$

Таким образом, на основании уравнений (3), (5), (9), (11) новая структурная схема двухмассовой электромеханической системы в обобщенных параметрах примет вид, показанный на рис. 3.

Рисунок 3 – Новая структурная схема двухмассовой

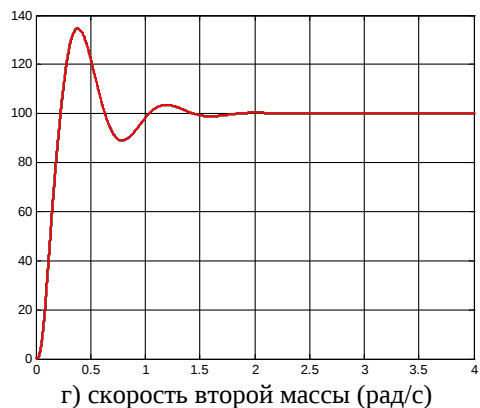
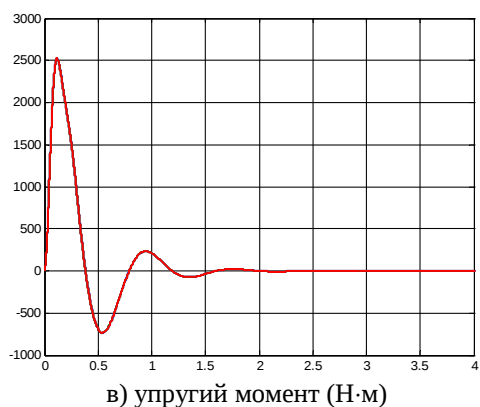
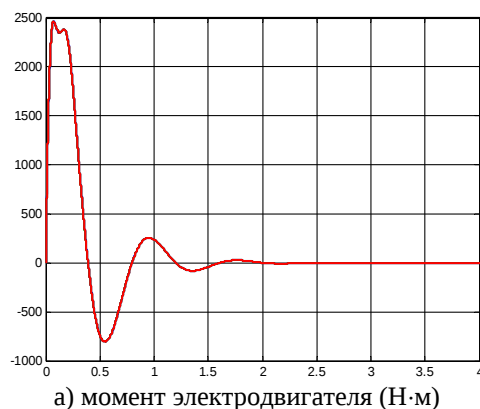


Рисунок 4 – Переходные процессы в двухмассовой электромеханической системе от времени (с)

Полученная структурная схема не учитывает наличия внутреннего вязкого трения в упругой кинематической связи двухмассовой электромеханической системе представляемого звеном с передаточной функцией вида

$$W(p) = M_{em} \frac{(p)}{\omega_1(p) - \omega_2(p)} = \beta_{1.2}, \text{ где момент вязкого трения равен}$$

$$M_{em} = (\omega_1 - \omega_2) \cdot \beta_{1.2}. \quad (12)$$

Разделив правую и левую часть уравнения (12) на  $\beta \cdot \omega_0$  и преобразовав результат, получим

$$M_{em}^* = (\omega_1^* - \omega_2^*) \cdot \frac{\beta_{1.2}}{\beta} = (\omega_1^* - \omega_2^*) \cdot \beta_{1.2}^*. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$\beta_{1.2} = \frac{\mu \cdot c_{1.2}}{\Omega_{1.2}} = \frac{\mu \cdot c_{1.2} \cdot \Omega_{1.2}}{\Omega_{1.2}^2}, \quad (14)$$

с учетом зависимости  $\Omega_{1.2}$ , полученной выше, коэффициент вязкого трения может быть записан как

$$\beta_{1.2} = \frac{\mu \cdot c_{1.2} \cdot \Omega_{1.2}}{c_{1.2} \gamma / J_1 (\gamma - 1)} = \frac{\mu \cdot \Omega_{1.2} \cdot J_1 (\gamma - 1)}{\gamma} = \frac{\mu \cdot \Omega_{1.2} \cdot m \cdot T_3 \cdot \beta \cdot (\gamma - 1)}{\gamma}. \quad (15)$$

Таким образом, окончательно передаточную функцию, описывающую вязкое трение в безразмерных параметрах, с учетом (14, 15) можно записать как

$$W(p_*) = \frac{M_{em}^*(p)}{\omega_1^*(p) - \omega_2^*(p)} = \beta_{1.2}^* = \frac{\beta_{1.2}}{\beta} = \frac{\mu m (\gamma - 1)}{\gamma} \Omega_{1.2}^*, \quad (16)$$

где  $\mu = \frac{\beta_{1.2}}{c_{1.2}} \Omega_{1.2} \dot{\iota}$ , а  $\Omega_{1.2}^* = \Omega_{1.2} \cdot T_3$  – относительная частота механического резонанса двухмассовой электромеханической системы.

Для проверки адекватности полученного результата была промоделирована двухмассовая электромеханическая система со следующими физическими параметрами:  $\omega_0 = 100 \text{ рад/с}$ ,  $\beta = 75 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ,  $T_3 = 0,1 \text{ с}$ ,  $J_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $c_{1.2} = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $J_2 = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $\beta_{1.2} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ . По данным физическим параметрам были рассчитаны обобщенные –  $\nu = 0,8$ ,  $\mu = 0,9$ ,  $T_{m1}^* = 0,33$ ,  $\gamma = 5$ ,  $m = 0,13$ . После моделирования всех систем (рис.1, рис. 2, рис. 3) полученные переходные процессы (рис. 4) были пересчитаны из относительных координат в физические и отображены для всех систем в одних осях (для удобства сопоставления каждая координата электропривода отображена на отдельном рисунке).

Из анализа осциллограмм переходных процессов можно сделать вывод, что все структурно-алгоритмические схемы (рис. 1 ÷ 3) двухмассовой электромеханической системы показали абсолютно одинаковые результаты, тем самым подтвердив адекватность разработанной новой модели двухмассовой электромеханической системы в обобщенных параметрах.

**Выводы.** Разработана новая модель двухмассовой электромеханической системы в обобщенных параметрах, адекватность которой подтверждена компьютерным моделированием.

**Список литературы:** 1. Ключев В.И. Теория электропривода. –М.: «Энергоатомиздат», 2001, 704с. 2. Klepikov V. B., Osychev A. V. Self-excited oscillations in electromechanically systems with negative viscous friction. Proc. 4<sup>th</sup> Intern. Conf. “Uncontinental electromechanical and electrical system”, IEEE-99, St. Petersburg, 1999, pp. 12-28. 3. Клепиков В. Б. Особенности динамики электромеханических систем с отрицательным вязким трением. “Технічна електродинаміка”, Тем. Вып. “Проблеми сучасної електротехніки”. –Київ, 2000, сс. 40-45. 4. Ключев В.И. Теория электропривода. –М.: «Энергоатомиздат», 1985, 560с. 5. Клепиков В. Б. Динамика электромеханических систем с нелинейным трением: монография. –Х., Изд-во «Підручник НТУ «ХПИ»», 2014, 408 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Klyuchev V.I. Teoriya elektroprivoda. –М.: «Energoatomizdat», 2004, 704 s. 2. Klepikov V. B., Osychev A. V. Self-excited oscillations in electromechanically systems with negative viscous friction. Proc. 4<sup>th</sup> Intern. Conf. “Uncontinental electromechanical and electrical system”, IEEE-99, St. Petersburg, 1999, pp. 12-28. 3. Klepikov V. B. Osobennosti dinamiki elektromekhanicheskikh sistem s otritsatel'ny'm vyazkim treniem. “Tekhnichna elektrodina-mika”, Tem. Vyp. “Problemi suchasnoї elektrotekhniki”. –Київ, 2000, ss. 40-45. 4. Klyuchev V.I. Teoriya elektroprivoda. –М.: «Energoatomizdat», 1985, 560 s. 5. Klepikov V. B. Dinamika elektromekhanicheskikh sistem s nelineinym treniem: monografiya. –Kh., Izd-vo «Pidruchnik NTU «KhPI»», 2014, 408 s.

Поступила (received) 02.07.2015