

УДК 621.01.(833)

**Х.С. САМИДОВ**, докт. техн. наук, проф., зав. кафедрой АзАСУ,  
**Ф.Ф. АГАЕВ**, асп., АзАСУ

### **ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИВОДОВ МАШИН ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ДИНАМИЧНОСТИ**

Робота присвячена методиці оптимізації параметрів електромеханічних систем, приводів машин, що дозволяють створювати машини з найменшими динамічними властивостями та якнайкращими зменшеннями амплітуд коливань.

This work is devoted to questions of optimization of parameters of electromechanical system of driving gear of machines, allowing to create the machines on less coefficient of dynamics and more damping of vibration.

**Постановка проблемы.** Механизмы и машины с электроприводами относятся к электромеханическим системам. Электромеханическими называют системы, в которых электромагнитные и механические процессы существенным образом связаны между собой. Машины (металлорежущие станки, ткацкие машины, грузоподъемные машины и т.д.), приводимые в движение от электродвигателя являются электромеханическими системами.

Каждая машина может быть приведена к динамической модели, характеризующейся определенным сочетанием параметров. В электромеханических системах к параметрам следует отнести дискретные массы, жесткости, моменты инерции, коэффициенты трения, сопротивления, индуктивности и емкости цепей ротора, статора и другие величины. В проектировании машин конструктор может изменить лишь некоторые параметры  $b_j$  в ограниченном, сравнительно небольшом интервале

$$b_j^* \leq b_j < b_j^{**} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Ограничения (1) в пространстве параметров представляют собой  $n$ -мерный параллелепипед, а каждый набор параметров, характеризующий рассматриваемую эквивалентную схему (динамическую модель) машины, расположен внутри указанного параллелепипеда.

Задача оптимизации динамической системы в пространстве параметров состоит в следующем: отыскиваются в области допустимых значений (1) такие значения, чтобы динамический процесс был в определенном смысле оптимальным.

Поэтому исследования, направленные на повышение виброустойчивости машин и позволяющие на стадии проектирования определить значения параметров, при реализации которых получается машина с наименьшим коэффициентом динамичности, является актуальной проблемой.

**Анализ литературы.** В настоящее время наука располагает огромным количеством работ, посвященных исследованию и оптимизации разных сторон динамики машин и механизмов. Иными словами, происходит новый этап синтеза науки о динамике машин с теорией оптимальных процессов.

За последние годы в мире развиваются в основном два научных направления в математической теории оптимальных процессов: метод динамического программирования американского ученого Р. Бельмана и теория оптимального управления академика Л.С.Понтрягина [2, 4].

Существует довольно много научных трудов, посвященных методам оптимизации [1-7, 9, 10]. В работе [4] существующие методы оптимизации разбиваются на три большие группы: направленные, случайные и комбинированные. При решении практических задач оптимизации удобно использовать комбинированные методы. Например, в работе [10] предлагается использовать в начале поиска градиентный метод, а вблизи локального экстремума – метод Ньютона.

В оптимизации большую роль играют распространение пакетов программ. Такой пакет состоит из программ нескольких методов оптимизации, каждый из которых приспособлен к некоторому классу задач.

Задачи оптимального проектирования машин многокритериальны. Совершенно очевидно, что чем больше вводится в рассмотрение критериев качества, тем в конечном счете получится более полное представление о проектируемой системе. Современные проблемы методологии решения многокритериальных задач рассмотрены в работах [6, 7, 9].

**Цель статьи.** В настоящей работе для оценки качества переходных процессов, пользуются коэффициентом динамичности. Он представляет собой отношение наибольшего значения момента сил упругости к значению того же момента при статическом приложении нагрузки

$$\lambda = \frac{\max M_{i,i+1}(t)}{M_{i,i+1}(cm)}. \quad (2)$$

Целью настоящей статьи, является разработка инженерной методики, позволяющей определить такие значения параметров электромеханических систем приводов машин при наличии ограничений вида (1), которые обеспечивали бы оптимальность переходного процесса по критерию качества (2).

**Раздел основного материала.** Рассмотрим задачу оптимизации переходных процессов привода машин, в частности, металлорежущих станков, грузоподъемных машин и других. Привод машины состоит из четырехступенчатого редуктора, приводимого от электродвигателя (рис. 1).

При исследовании машин возникает необходимость составления «идеализированный» расчетной схемы – динамической модели реальной машины.

Общим вопросом составления динамической модели машин посвящен ряд работ [1, 6]. Однако рекомендации этих работ не всегда возможно применить непосредственно при расчетах динамических моделей конкретных машин, так как конструкции машин намного отличаются друг от друга, да отличаются и цели исследования. Так, например, при расчете крутильных колебаний в трансмиссиях машин с электроприводом податливость зубчатых передач значительно превосходят податливость валов, имеющих большой диаметр и малую длину, в то время как в дизелях обычно пренебрегают упругой податливостью зубчатых передач, так как она мала по сравнению с податливостью участков коленчатого вала.

В результате расчета и приведения распределенных и сосредоточенных масс движущих деталей к сосредоточенным, а также подсчета изгибно-крутильной податливости деталей и их соединений получена динамическая модель рассматриваемой электромеханической системы привода машины (рис. 2).

Методика приведения масс, моментов инерций, усилий и жесткостей основана на том, что кинетическая  $T$ , потенциальная  $\Pi$  энергия и диссипативная функция  $\Phi$  системы должны остаться без изменения, а работа сил, моментов сил после приведения также должна остаться без изменения.

Выражения для  $T$ ,  $\Pi$  и  $\Phi$  имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} \phi_i \phi_j; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} \phi_i \phi_j; \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij} \phi_i \phi_j, \quad (3)$$

где  $a_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  – симметричные положительно определенные матрицы, составленные из инерционных, квазиупругих и диссипативных коэффициентов.

Величины масс, моментов инерции, сил, моментов сил и жесткостей, приведенные к ротору электродвигателя, определяются следующими формулами:

$$m_n = \sum_{i=1}^k \left[ m_i \left( \frac{V_i}{V_n} \right)^2 + J_i \left( \frac{\omega_i}{V_n} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$J_n = \sum_{i=1}^k \left[ m_i \left( \frac{V_i}{\omega_n} \right)^2 + J_i \left( \frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 \right]; \quad (5)$$

$$P_n = \sum_{i=1}^k \left( P_i \frac{V_i \cos \alpha_i}{V_n} + M_i \frac{\omega_i}{V_n} \right); \quad (6)$$

$$M_n = \sum_{i=1}^k \left( P_i \frac{V_i \cos \alpha_i}{\omega_n} + M_i \frac{\omega_i}{\omega_n} \right); \quad (7)$$

$$c_{inl} = c_{in} \left( \frac{V_i}{V_n} \right)^2; \quad (8)$$

$$\frac{1}{2\omega_3 M_k} \dot{M}_1 + \frac{S_k M_1}{2M_2} = S; \quad (9)$$

$$c_{inl} = c_{i\varphi} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2; \quad (10)$$

$$c_{in\varphi} = c_{i\varphi} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2, \quad (11)$$

где  $m_n, J_n$  – приведенная масса и приведенный момент инерции;  $m_i, J_i$  – масса и момент инерции  $i$ -го звена;  $V_i, \omega_i$  – линейная и угловая скорости  $i$ -го звена;  $\alpha_i$  – угол, образованной силой  $P_i$  и вектором скорости  $V_i$ ;  $P_i, M_i$  – сила и крутящий момент, действующие на  $i$ -е звенья;  $c_{in}, c_{i\varphi}$  – линейная и угловая жесткости  $i$ -го упругого звена;  $c_{inl}, c_{in\varphi}$  – приведенная линейная и приведенная угловая жесткости.

Уравнения Лагранжа II рода крутильных систем имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial n}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} = M_i(t) \quad (i=1,2,\dots,k), \quad (12)$$

где  $M_i(t)$  – обобщенный момент.

Подставляя в уравнения Лагранжа (12) выражения (3) получаем в общем виде дифференциальные уравнения движения крутильно-колеблющейся динамической модели машин около состояния устойчивого равновесия

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{\varphi}_1 + a_{12}\dot{\varphi}_2 + \dots + a_{1k}\dot{\varphi}_k + C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \dots + C_{1k}\varphi_k + \beta_{11}\varphi_1 + \\ + \beta_{12}\varphi_2 + \dots + \beta_{1k}\varphi_k = M_1(t); \\ a_{21}\dot{\varphi}_1 + a_{22}\dot{\varphi}_2 + \dots + a_{2k}\dot{\varphi}_k + C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2k}\varphi_k + \beta_{22}\varphi_2 + \\ + \beta_{21}\varphi_1 + \dots + \beta_{2k}\varphi_k = M_2(t); \\ \dots \\ a_{k1}\dot{\varphi}_1 + a_{k2}\dot{\varphi}_2 + \dots + a_{kk}\dot{\varphi}_k + C_{k1}\varphi_1 + C_{k2}\varphi_2 + \dots + C_{kk}\varphi_k + \beta_{k1}\varphi_1 + \\ + \beta_{k2}\varphi_1 + \dots + \beta_{kk}\varphi_k = M_k(t). \end{aligned} \quad (13)$$

В матричной форме эти уравнения имеют следующий более компактный вид

$$a\dot{\varphi} + \beta\varphi + \tau\varphi = M(t), \quad (14)$$

где  $a$  – матрица коэффициентов инерции;  $\beta$  – матрица коэффициентов диссипации;  $\tau$  – матрица коэффициентов жесткости;  $M(t)$  – матрица обобщенных возбуждающих моментов;  $\varphi$  – матрица обобщенных координат.

Удовлетворяя выражения (4-11), разветвленная электромеханическая система, показанная на рис. 1, приведена к одному прямому безинерционному валу с сосредоточенными массами (рис. 2).

Дифференциальные уравнения движения динамической модели, представленной на рис. 2 запишутся так [9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\omega_3 M_k} \dot{M}_1 + \frac{S_k M_1}{2M_k} = S; \\ J_1\dot{\varphi}_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1; \\ J_2\dot{\varphi}_2 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \beta_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) = M_2; \\ J_{10}\dot{\varphi}_{10} - c_{910}(\varphi_9 - \varphi_{10}) - \beta_{910}(\varphi_9 - \varphi_{10}) = M_{10}. \end{aligned} \quad (15)$$

Первые два уравнения системы (15) являются уравнениями ротора электродвигателя, а первое уравнение этой же системы является уравнением «динамической характеристики» асинхронного двигателя, где  $M_k, S_k$  – критические момент и скольжение двигателя по статической механической характеристике:

$$\begin{aligned} M_k = \lambda_m M_H; \\ S_k = S_H \left\{ \left[ \lambda_m + 5(\lambda_m - 1)S_H \right] \sqrt{[\lambda_m + 5(\lambda_m - 1)S]^2 - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $S_H$  – скольжение при номинальном моменте  $M_H$ ;  $\lambda_m$  – кратность максимального момента;  $S = (\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$ ;  $\omega_0 = \omega_3/p$  – скорость идеального холостого хода ротора;  $p$  – число пар полюсов;  $\omega_3 = 2\pi f_s$ ,  $f_s$  – частота энергосети;  $J_i, \varphi_i$  – момент инерции и угловое перемещение ротора;  $C_{12}, \beta_{12}$  – приведенные жесткость и коэффициент демпфирования.

Дифференцируя функцию  $S = (\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  по времени и подставляя полученные выражения во второе уравнение системы (15), получим:

$$\frac{1}{J_1\omega_0} [c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - M_1] = S. \quad (16)$$

Исключая  $S$  из уравнения «динамической характеристики» асинхронного двигателя и уравнения (16), систему (15) можно привести к виду:

$$BTN\dot{M}_1 + BN\dot{M}_1 + M_1 - M_{12} - \frac{\beta_{12}\dot{M}_{12}}{c_{12}} = 0. \quad (17)$$

где  $M_{12} = c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$  – момент сил упругости, развиваемый в механической части модели;  $T = 1/\omega_3 S_k = 1/S_k p \omega_3$  – электромагнитная постоянная времени;  $B = J_H/\beta_3$  – электромеханическая постоянная системы. В случае, если динамическая модель электромеханической системы имеет  $n$  степеней свободы  $B = (J_1 + J_2 + \dots + J_n)/\beta_3$ ;  $N = J_1/(J_1 + J_2 + \dots + J_n)$ ;  $\beta_3 = 1/\lambda \omega_0 = T c_3$  – коэффициент крутизны статической характеристики двигателя;  $c_3$  – жесткость связи электродвигателя.

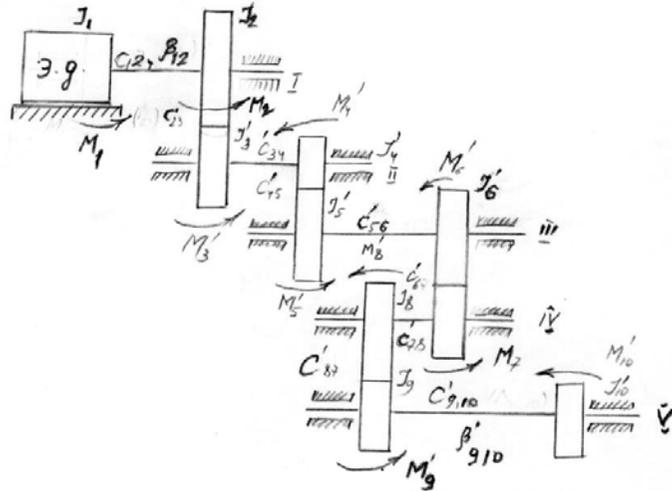


Рис. 1

В дальнейшем, при исследовании динамических процессов машины и их оптимизации многомассовая динамическая модель (рис. 2) по методике, представленной в работе [6], упрощена и приведена к трехмассовой динамической модели (рис. 3). Затем, преобразуя выражения (15), для трехмассовой динамической модели записываются дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах моментов сил упругости.

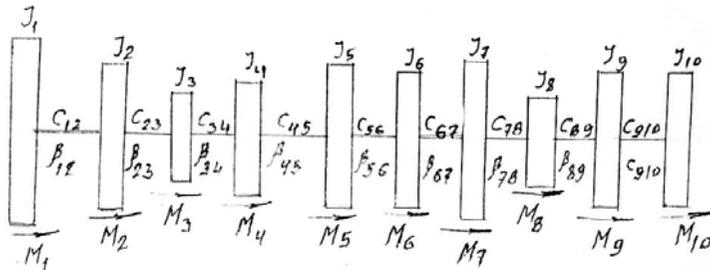


Рис. 2

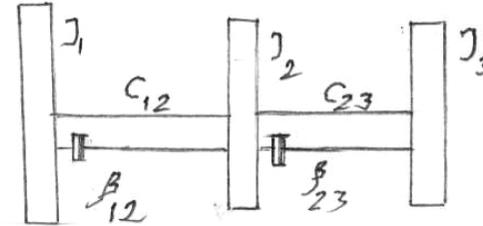


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 & BTN \ddot{M}_1 + BN \dot{M}_1 + M_1 - M_{12} - \frac{\beta_{12} M_{12}}{c_{12}} = 0 \\
 & \ddot{M}_{12} + \omega_{12}^2 M_{12} - \frac{c_{12}}{J_1} M_1 - \frac{c_{12}}{J_2} M_{23} + \frac{\beta_{12}(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} M_{12} - \\
 & - \frac{c_{12} \beta_{23}}{c_{23} J_2} \dot{M}_{23} = \frac{c_{12}}{J_2} M_2(t); \\
 & \ddot{M}_{23} + \omega_{23}^2 M_{23} - \frac{c_{23}}{J_2} M_{12} + \frac{\beta_{23}(J_2 + J_3)}{J_2 J_3} M_{23} - \\
 & - \frac{c_{23} \beta_{12}}{c_{12} J_2} M_{12} = \frac{c_{23}}{J_3} M_3(t) - \frac{c_{23}}{J_2} M_2(t),
 \end{aligned} \tag{18}$$

где  $\omega_{i,i+1}^2 = c_{i,i+1}(J_1 + J_{i+1})/J_i J_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$  – цикловые частоты собственных колебаний парциальных систем.

Приведем систему уравнений (18) к одному дифференциальному уравнению высокого порядка относительно переменных  $M_1$ ,  $M_{12}$  и  $M_{23}$ . Для этого введем оператор дифференцирования  $d/dt = p$  и составим определитель левой части системы (18):

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Раскрыв определитель (19) и подставив вместо оператора  $p^k$  соответствующие производные  $M^k$  переменных  $M_1$ ,  $M_{12}$  и  $M_{23}$ , получим:

$$\Delta(p) = M^{VI} + a_0 M^V + a_1 M^{IV} + a_2 M^{III} + a_3 M^{II} + a_4 M^I + a_5 M, \tag{20}$$

где коэффициенты  $a_i$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) выражаются через параметры рассматриваемой системы формулами (21-26):

$$a_0 = \frac{(J_2 + J_3)\beta_{23}}{J_2 J_3} + \frac{(J_1 + J_2)\beta_{12}}{J_1 J_2} + \frac{1}{T}; \quad (21)$$

$$a_1 = \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \frac{(J_1 + J_2)(J_2 + J_3)\beta_{12}\beta_{23}}{J_1 J_2^2 J_3} - \frac{\beta_{12}\beta_{23}}{J_2^2} + \frac{(J_2 + J_3)\beta_{23}}{T J_2 J_3} + \frac{(J_1 + J_2)\beta_{12}}{T J_1 J_2} + \frac{1}{BTN}; \quad (22)$$

$$a_2 = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \beta_{12} \epsilon_{23}^2 + \frac{(J_2 + J_3)}{J_2 J_3} \beta_{23} \epsilon_{12}^2 - \frac{c_{12}\beta_{23}}{J_2^2} - \frac{c_{23}\beta_{12}}{J_2^2} + \frac{\epsilon_{12}^2}{T} + \frac{\epsilon_{23}^2}{T} + \frac{(J_1 + J_2)(J_2 + J_3)\beta_{12}\beta_{23}}{T J_1 J_2^2 J_3} - \frac{\beta_{12}\beta_{23}}{T J_2^2} + \frac{(J_2 + J_3)\beta_{23}}{BTN J_2 J_3} + \frac{(J_1 + J_2)\beta_{12}}{BTN J_1 J_2} - \frac{\beta_{12}}{BTN J_1}; \quad (23)$$

$$a_3 = \epsilon_{12}^2 \epsilon_{23}^2 - \frac{c_{12}c_{23}}{J_2^2} + \frac{(J_1 + J_2)}{T J_1 J_2} \beta_{12} \epsilon_{23}^2 + \frac{(J_2 + J_3)}{T J_2 J_3} \beta_{23} \epsilon_{12}^2 - \frac{c_{12}\beta_{23}}{T J_2^2} - \frac{c_{23}\beta_{12}}{T J_2^2} + \frac{\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2}{BTT} + \frac{(J_1 + J_2)(J_2 + J_3)\beta_{12}\beta_{23}}{BTN J_1 J_2^2 J_3} - \frac{\beta_{12}\beta_{23}}{BTN J_2^2} - \frac{c_{12}}{BTN J_1} - \frac{\beta_{12}\beta_{23}(J_2 + J_3)}{BTN J_1 J_2 J_3}; \quad (24)$$

$$a_4 = \frac{\epsilon_{12}^2 \epsilon_{23}^2}{T} - \frac{c_{12}c_{23}}{T J_2^2} + \frac{(J_1 + J_2)}{BTN J_1 J_2} \beta_{12} \epsilon_{23}^2 + \frac{(J_2 + J_3)}{BTN J_2 J_3} \beta_{23} \epsilon_{12}^2 - \frac{c_{12}\beta_{23}}{BTN J_2^2} - \frac{c_{23}\beta_{12}}{BTN J_2^2} + \frac{\beta_{12}^2 \epsilon_{23}^2}{BTTN_1} - \frac{(J_2 + J_3)}{BTN J_1 J_2 J_3} c_{12} \beta_{23}; \quad (25)$$

$$a_5 = \frac{\epsilon_{12}^2 \epsilon_{23}^2}{BTN} - \frac{c_{12}c_{23}}{BTN J_2^2} - \frac{c_{12}\epsilon_{23}^2}{BTN J_1}. \quad (26)$$

Правая часть полинома (20) относительно упругих моментов  $M_1$ ,  $M_{12}$  и  $M_{23}$  находится из определителя (19), заменив первый, второй и третий столбец соответственно на столбец правых частей системы уравнений (18):

$$Q_1 (M_i) = \begin{vmatrix} 0 & -\left(\frac{\beta_{12}p}{c_{12}} + 1\right) & 0 \\ \frac{M_2(t)c_{12}}{J_2} & \left[p^2 + \frac{(J_1 + J_2)\beta_{12}p}{J_1 J_2} + \epsilon_{12}^2\right] & -\left(\frac{c_{12}\beta_{23}p}{c_{23}J_2} + \frac{c_{12}}{J_2}\right) \\ \left(\frac{M_3(t)c_{23}}{J_3} - \frac{M_2(t)c_{23}}{J_2}\right) & -\left(\frac{c_{23}\beta_{12}p}{c_{12}J_2} + \frac{c_{23}}{J_2}\right) & \left[p^2 + \frac{(J_2 + J_3)\beta_{23}p}{J_2 J_3} + \epsilon_{23}^2\right] \end{vmatrix}; \quad (27)$$

$$Q_2 (M_i) = \begin{vmatrix} (BNTp^2 + BNp + 1) & 0 & 0 \\ -\frac{c_{12}}{J_1} & \frac{M_2(t)c_{12}}{J_2} & -\left(\frac{c_{12}\beta_{12}p}{c_{23}J_2} - \frac{c_{12}}{J_2}\right) \\ 0 & \left(\frac{M_3(t)c_{23}}{J_3} - \frac{M_2(t)c_{23}}{J_2}\right) & \left[p^2 + \frac{(J_2 + J_3)\beta_{12}p}{J_2 J_3} + \epsilon_{23}^2\right] \end{vmatrix}; \quad (28)$$

$$Q_3 (M_i) = \begin{vmatrix} (BNTp^2 + BNp + 1) & -\left(\frac{\beta_{12}p}{c_{12}} + 1\right) & 0 \\ -\frac{c_{12}}{J_1} & \left[p^2 + \frac{(J_1 + J_2)\beta_{12}p}{J_2 J_3} + \epsilon_{23}^2\right] & \frac{M_2(t)c_{12}}{J_2} \\ 0 & -\left(\frac{c_{23}\beta_{12}p}{c_{12}J_2} + \frac{c_{23}}{J_2}\right) & \left(\frac{M_3(t)c_{23}}{J_3} - \frac{M_2(t)c_{23}}{J_2}\right) \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Разделив определители (27-29) на  $BTN = TJ_1/\beta_3$  и раскрывая их, дифференциальные уравнения (18) запишем относительно переменных  $M_1$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ . Из-за ограничения объема статьи, запишем выражения только для  $M_{23}$ :

$$\begin{aligned} & M_{23}^{VI} + a_0 M_{23}^V + a_1 M_{23}^{IV} + a_2 M_{23}^{III} + a_3 M_{23}^{II} + a_4 M_{23}^I + a_5 M_{23} = \\ & -\frac{c_{23}M_2^{IV}(t)}{J_2} + \left[ -\frac{(J_1 + J_2)c_{23}\beta_{12}}{J_1 J_2^2} + \frac{c_{23}\beta_{12}}{J_2^2} - \frac{c_{23}}{T J_2} \right] M_2^{III}(t) + \\ & + \left[ -\frac{c_{23}\epsilon_{12}^2}{J_2} + \frac{c_{12}c_{23}}{J_2^2} - \frac{(J_1 + J_2)c_{23}\beta_{12}}{T J_1 J_2^2} + \frac{c_{23}\beta_{12}}{T J_2^2} - \frac{c_{23}\beta_3}{T J_1 J_2} \right] M_2^{II}(t) + \\ & + \left[ -\frac{c_{23}\epsilon_{12}^2}{T J_2} + \frac{c_{12}c_{23}}{T J_2^2} - \frac{(J_1 + J_2)c_{23}\beta_{12}\beta_3}{T J_1^2 J_2^2} + \frac{c_{23}\beta_{12}\beta_3}{T J_1 J_2^2} - \frac{c_{23}\beta_{12}\beta_3}{T J_2^2 J_2} \right] \times \\ & \times M_2^I(t) + \frac{c_{23}}{J_3} M_3^{IV}(t) + \left[ \frac{c_{23}}{T J_3} + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2 J_3} \beta_{12} c_{23} \right] M_3^{III}(t) + \\ & + \left[ \frac{\epsilon_{12}^2 c_{23}}{J_3} + \frac{(J_1 + J_2)}{T J_1 J_2 J_3} \beta_{12} c_{23} + \frac{1}{T J_1 J_3} c_{23} \beta_3 \right] M_3^{II}(t) + \\ & + \left[ \frac{c_{23}\beta_{12}\beta_3(J_1 + J_2)}{T J_1^2 J_2 J_3} - \frac{\beta_{12}\beta_3 c_{23}}{T J_1^2 J_3} \right] M_3^I(t) + \left( \frac{\epsilon_{12}^2 c_{23} \beta_3}{T J_1 J_3} - \frac{c_{12} c_{23} \beta_3}{T J_1^2 J_3} \right) M_3(t). \quad (30) \end{aligned}$$

Обычно при определении наибольших значений упругих сил машин, затуханием колебаний пренебрегают. Поэтому, в дальнейшем из дифференциальных уравнений, подобным (30), будем отбрасывать затухающую часть. Тогда эти уравнения не будут содержать нечетные производные и при замене аргумента  $t = \tau / \sqrt{a_1}$  приводятся к виду:

$$M_{i,i+1}^{VI} + M_{i,i+1}^{IV} + c_1 M_{i,i+1}^{IV} + c_2 M_{i,i+1} = \frac{1}{a_1^2} Q_1 \left( \frac{\tau}{\sqrt{a_1}} \right); \quad (i = 0, 1, 2), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a_3}{a_1^2}; \quad c_2 = \frac{a_5}{a_1^3}; \quad a_1 = \frac{1}{BTN} + \theta_{12}^2 + \theta_{23}^2; \\ a_3 &= \theta_{12}^2 \theta_{23}^2 - \frac{c_{12} c_{23}}{J_2^2} + \frac{\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2}{BTN} - \frac{c_{12}}{BTNJ_1}; \\ a_5 &= \frac{\theta_{12}^2 \theta_{23}^2}{BTN} - \frac{c_{12} c_{23}}{BTNJ_2^2} - \frac{c_{12} \theta_{23}^2}{BTNJ_1}; \quad BTN = \frac{J_1 T}{\beta_3}; \\ \theta_{12}^2 &= \frac{c_{12}(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}; \quad \theta_{23}^2 = \frac{c_{23}(J_2 + J_3)}{J_2 J_3}; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= \frac{c_{12}}{J_1} M_2^{IV}(t) + \frac{c_{12}}{J_2} \left( \theta_{23}^2 - \frac{c_{23}}{J_2} + \frac{\beta_3}{TJ_1} \right) M_2^{II}(t) + \\ &+ \frac{c_{12} \beta_3}{TJ_1 J_2} \left( \theta_{23}^2 - \frac{c_{23}}{J_2} \right) M_2(t) + \frac{\beta_3 c_{12} c_{23}}{TJ_1 J_2 J_3} M_3(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3(t) &= -\frac{c_{23}}{J_2} M_2^{IV}(t) - \frac{c_{23}}{J_2} \left( \theta_{12}^2 - \frac{c_{12}}{J_2} + \frac{\beta_3}{TJ_1} \right) M_2^{II}(t) + \frac{c_{23}}{J_3} M_3^{IV}(t) + \\ &+ \frac{c_{23}}{J_3} \left( \theta_{12}^2 + \frac{\beta_3}{TJ_1} \right) M_3^{II}(t) + \frac{\beta_3 c_{23}}{TJ_1 J_3} \left( \theta_{12}^2 - \frac{c_{12}}{J_2} \right) M_3(t). \end{aligned}$$

Для простоты математических выкладок рассмотрим случай, когда технологические нагрузки  $M_i = \text{const}$  и пренебрегаем затуханием в механической части системы. Тогда уравнения (30) примут вид:

$$M_{i,j+1}^{VI} + a_1 M_{i,j+1}^{IV} + a_3 M_{i,j+1}^{II} + a_5 M_{i,j+1} = \frac{c_{12} c_{23} \beta_3}{TJ_1 J_2 J_3} (M_2 + M_3). \quad (33)$$

Пользуясь алгоритмами, приведенными в работе [3] и нулевыми начальными условиями, решение уравнений (33) запишем в виде:

$$\begin{aligned} M_1(\tau) &= M_H [1 - c_2 B^{(-1)}(\tau)] - \frac{\beta_3 M_H}{TJ_1 a_1} [B^{(1)}(\tau)] + B^{(3)}(\tau) + \\ &+ \frac{\beta_3 M_H}{T^2 J_1 a_1 \sqrt{a_1}} [B(\tau)] + B^{(2)}(\tau) + \left( \frac{\beta_3}{TJ_1} - \frac{1}{T^2} + \frac{c_{12}}{J_1} \right) \frac{\beta_3 M_H}{TJ_1 a_1^2} B(\tau) + \\ &+ \left( \frac{1}{T^2} - \frac{2\beta_3}{TJ_1} - \frac{c_{12}}{J_1} \right) \frac{\beta_3 M_H}{T^2 J_1 a_1^2 \sqrt{a_1}} B(\tau); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} M_{12}(\tau) &= \frac{c_{12} M_H}{J_1 a_1} [B^{(-1)}(\tau) + B^{(3)}(\tau)] + \left( \frac{c_{23}}{J_2 J_3} - \frac{\theta_{12}^2}{J_1} - \frac{\beta_3}{TJ_1^2} \right) \times \\ &\times \frac{c_{12} M_H}{a_1^2} B^{(1)}(\tau) + \frac{c_{12} \beta_3 M_H}{T^2 J_1^2 a_1^2 \sqrt{a_1}} B(\tau); \end{aligned} \quad (35)$$

$$M_{23}(\tau) = \frac{c_{23} M_3}{J_3 a_1} [B^{(-1)}(\tau) + B^{(3)}(\tau)] + \left( \frac{c_{12} M_H}{J_1 J_2} - \frac{\theta_{23}^2 M_3}{J_3} \right) \frac{c_{23}}{a_1^2} B^{(1)}(\tau), \quad (36)$$

где обобщенные безразмерные параметры  $c_1$  и  $c_2$  рассматриваемой системы равны:

$$c_1 = \frac{a_3}{a_1^2} = \frac{TJ_1^2 J_2^2 \theta_{12}^2 \theta_{23}^2 - TJ_1^2 c_{12} c_{23} + J_1 J_2^2 \beta_3 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2) - J_2^2 c_{12} \beta_3}{TJ_1^2 J_2^2 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \beta_3 / TJ_1)^2}; \quad (37)$$

$$c_2 = \frac{J_1 J_2^2 \theta_{12}^2 \theta_{23}^2 \beta_3 - J_1 c_{12} c_{23} \beta_3 + J_2^2 \beta_3 c_{12} \theta_{23}^2}{TJ_1^2 J_2^2 (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \beta_3 / TJ_1)^3}. \quad (38)$$

Статические моменты, имеющие место при действии внешних моментов  $M_2$  и  $M_3$  к массам  $J_2$  и  $J_3$ , находятся из системы уравнений (12):

$$M_{1CT} = M_{12CT} = \frac{(\theta_{23}^2 J_2 J_3 M_2 + c_{23} J_2 M_3 - c_{23} J_2 M_2) J_1 J_2^2 c_{12}}{J_2^2 J_3 (\theta_{12}^2 \theta_{23}^2 J_1 J_2^2 - \theta_{23}^2 c_{12} J_2^2 - c_{12} c_{23} J_1)}; \quad (39)$$

$$\begin{aligned} M_{23CT} &= \frac{(J_1 J_2 \theta_{12}^2 - c_{12} J_2)}{J_3 J_2^2 J_1 c_{12}} \times \\ &\times \frac{(\theta_{23}^2 c_{12} J_2 J_3 M_2 + c_{12} c_{23} J_2 M_3 - c_{12} c_{23} J_3 M_2) J_1 J_2^2}{(\theta_{12}^2 \theta_{23}^2 J_1 J_2^2 - \theta_{23}^2 c_{12} J_2^2 - c_{12} c_{23} J_1)} - M_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Коэффициенты динамичности  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) равны:

$$\lambda_1 = \frac{M_{1\max}}{M_{1CT}} = \frac{J_2^2 J_3 (\theta_{12}^2 \theta_{23}^2 J_1 J_2^2 - \theta_{23}^2 c_{12} J_2^2 - c_{12} c_{23} J_1)}{c_{12} J_1 J_2^2 (\theta_{23}^2 J_2 J_3 M_2 + c_{23} J_2 M_3 - c_{23} J_2 M_2)} \times$$

$$\times \left\{ M_H \left[ 1 - c_2 B^{(-1)}(\tau) \right] - \frac{\beta_3 M_H}{T J_1 a_1} \left[ B^{(1)}(\tau) + B^{(3)}(\tau) \right] + \frac{\beta_3 M_H}{T^2 J_1 a_1 \sqrt{a_1}} \left[ B(\tau) + B^{(2)}(\tau) \right] + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\beta_3}{T J_1} - \frac{1}{T^2} + \frac{c_{12}}{J_1} \right) \frac{\beta_3 M_H}{T J_1 a_1^2} B^{(1)}(\tau) + \left( \frac{1}{T^2} - \frac{2\beta_3}{T J_1} - \frac{c_{12}}{J_1} \right) \frac{\beta_3 M_H}{T^2 J_1 a_1^2 \sqrt{a_1}} B(\tau) \right\}. \quad (41)$$

$$\lambda_{12} = \frac{M_{12\max}}{M_{12CT}} = \frac{J_2^2 J_3 (\theta_{12}^2 \theta_{23}^2 J_1 J_2^2 - \theta_{23}^2 c_{12} J_2^2 - c_{12} c_{23} J_1) M_H}{M_{12CT} J_1 J_2^2 (\theta_{23}^2 J_2 J_3 M_2 + c_{23} J_2 M_3 - c_{23} J_2 M_2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{J_1 a_1} \left[ B^{(1)}(\tau) + B^{(3)}(\tau) \right] + \left( \frac{c_{23}}{J_2 J_3} - \frac{\theta_{12}^2}{J_1} - \frac{\beta_3}{T J_1^2} \right) \frac{1}{a_1^2} B^{(1)}(\tau) + \frac{\beta_3}{T^2 J_1^2 a_1^2 \sqrt{a_1}} B(\tau) \right\}; \quad (42)$$

$$\lambda_{23} = \frac{M_{23\max}}{M_{23CT}} = \frac{c_{23} J_3 (\theta_{12}^2 \theta_{23}^2 J_1 J_2^2 - \theta_{23}^2 c_{12} J_2^2 - c_{12} c_{23} J_1)}{M_{23CT} (J_1 J_2^2 \theta_{12}^2 - c_{12} J_2)} \times$$

$$\times \frac{1}{(\theta_{23}^2 J_2 J_3 M_2 + c_{23} J_2 M_3 - c_{23} J_3 M_2) - M_2 J_3} \times$$

$$\times \frac{1}{(\theta_{12}^2 \theta_{23}^2 J_1 J_2^2 J_3 M_2 - \theta_{23}^2 c_{12} J_2^2 - c_{12} c_{23} J_1)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{M_3}{J_1 a_1} \left[ B^{(1)}(\tau) + B^{(3)}(\tau) \right] + \left( \frac{c_{12} M_H}{J_1 J_2} - \frac{\theta_{23}^2 M_3}{J_3} \right) \frac{1}{a_1^2} B^{(1)}(\tau) \right\}. \quad (43)$$

Из выражений (38), (39) и (40) следует, что величины коэффициентов динамичности  $\lambda_1, \lambda_{12}, \lambda_{23}$  зависят от специальных функций переходного процесса  $B^{(\pm j)}(\tau)$  ( $j=1,2,3$ ).

**Анализ результатов оптимизации.** На основе анализа решения задач оптимизации электромеханических систем приводов машин (металлорежущих машин, грузоподъемных машин и т.д.), динамические модели которых приведены к трехмассовой системе, установлены следующие оптимальные интервалы изменения обобщенных безразмерных параметров  $c_1$  и  $c_2$ :

$$0,1 \leq c_1 = \frac{T J_1^2 J_2^2 \left[ \frac{c_{12} c_{23} (J_2 + J_3) (J_1 + J_2)}{J_1 J_2^2 J_3} \right] - T J_1^2 c_{12} c_{23} +}{T J_1^2 J_2^2 \left[ \frac{J_3 c_{12} (J_1 + J_2) + J_1 c_{23} (J_2 + J_3)}{J_1 J_2 J_3} \right] +}$$

$$+ J_1 J_2^2 \beta_3 \left[ \frac{c_{12} c_{23} (J_1 + J_2) + J_1 c_{23} (J_2 + J_3)}{J_1 J_2 J_3} \right] - c_{12} J_2^2 \beta_3, \quad (44)$$

$$\times \frac{1}{+ \beta_3 / T J_1]^2} \leq 0,27;$$

$$0,01 \leq c_2 = \frac{+ J_1 J_2^2 \beta_3 \left[ \frac{c_{12} c_{23} (J_2 + J_3) (J_1 + J_2)}{J_1 J_2^2 J_3} \right] - c_{12} c_{23} J_1 \beta_3 -}{+ T J_1^2 J_2^2 \left[ \frac{J_3 c_{12} (J_1 + J_2) + J_1 c_{23} (J_2 + J_3)}{J_1 J_2 J_3} \right] +}$$

$$\times \frac{- c_{12} J_2^2 \beta_3 \left[ \frac{c_{23} (J_2 + J_3)}{J_2 J_3} \right]}{+ \beta_3 / T J_1]^3} \leq 0,035. \quad (45)$$

Максимальные значения безразмерных обобщенных параметров  $c_1, c_2$  для электромеханических систем с тремя степенями свободы, согласно выражениям (44), (45) равны  $c_{1\max}=0,27; c_{2\max}=0,035$ .

Конструктор при создании новых машин должен стремиться к тому, чтобы выбранные ими электромеханические параметры удовлетворяли условиям (44) и (45):

$$0,1 \leq c_1 \leq 0,27 \quad 0,01 \leq c_2 \leq 0,035.$$

Проанализируем конкретный пример.

Проверим оптимальность конструкции главного привода трубоотрезного станка 91AA38, приведенной к валу электродвигателя, которая характеризуется следующими параметрами [6]:

$$J_1 = 0,25 \text{ Hmc}^2; \quad J_2 = 0,30 \text{ Hmc}^2; \quad J_3 = 0,30 \text{ Hmc}^2; \quad c_{12} = 5263 \text{ Hm / рад};$$

$$c_{23} = 980 \text{ Hm / рад}; \quad T = 0,066; \quad \beta_3 = 16 \text{ Hmc / рад}; \quad T = 0,236.$$

Подставим значения этих параметров в формулы (41) и (42), получим значения безразмерных обобщенных параметров

$$0,05 \leq c_1 \leq 0,34; \quad 0,013 \leq c_2 \leq 0,040. \quad (46)$$

Из сравнения значений (46) обобщенных параметров  $c_1$  и  $c_2$  с оптимальной областью их изменения (41) и (42) видно, что конструктивные параметров электромеханической системы данного станка не являются оптимальными и их надо менять. При этом, увеличивая жесткости  $c_{12}$  в 1,2 и  $c_{23}$  в 1,4 раза, можно определить оптимальные значения

$$c_1=0,15; \quad c_2=0,030. \quad (44)$$

При обобщенных параметрах  $c_1$  и  $c_2$  (47) коэффициент динамичности и амплитуда динамического момента  $M_{23}$  уменьшается на 22%.

**Выводы.**

1. На базе существующих методов оптимизации разработана и реализована инженерная методика оптимизации динамических процессов электромеханических систем машин.

2. Разработанная методика позволяет на стадии проектирования установить связь между конструктивными и динамическими характеристиками электромеханических систем и построить машину с наименьшим коэффициентом динамичности.

3. Практическая направленность данной работы открывает определенные возможности для внедрения ее результатов конструкторскими, научно-исследовательскими организациями, занимающимися вопросами исследования динамики и оптимального проектирования машин, аппаратов.

**Список литературы:** 1. Адамия Р.Ш., Михайленко Ф.Ф. Ограничения динамических нагрузок в машинах. – Тбилиси: Издательство «Мецниереба», 1989. – 180с. 2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностр. лит, 1960. – 400с. 3. Голубенцев А.Н. Интегральные методы в динамике. Киев: Издательство «Техника», 1967. – 350с. 4. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. – М.: «Высшая школа», 1978. – 269с. 5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – Москва: Издательство «Наука», 1976. – 392с. 6. Самидов Х.С., Самидов Э.Х. Динамика и оптимальное конструирование машин. – Баку: Издательство «Нурлан», 2003. – 622с. 7. Соболев И.М., Статников Р.Б. Постановка некоторых задач оптимального проектирования при помощи ЭВМ. – Препринт Института прикладной математики АН СССР, – №24. – 1977. – 20с. 8. Самидов Х.С., Алиев Б.Г. Вынужденные колебания электромеханических систем приводов машин // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків, 2007. – №21. – С.132–144. 9. Самидов Х.С., Агаев Ф.Ф. Оптимизация параметров динамической системы зубчатых передач металлорежущих станков // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків, 2007. – №21. – С.230–248. 10. Химмельблауд Д. Прикладное нелинейное программирование. – Москва: Издательство «Мир», 1975. – 534с.

*Поступила в редколлегию 20.04.08*