где u – передаточное число передачи.

Определяют радиусы кривизн центроид [5] для ведущего колеса:

$$\rho_1 = \frac{a_w}{\left[1+i(\varphi_1)\right]^2 A_1}\left\{i'^2(\varphi_1)+i^2(\varphi_1)\cdot\left[1+i(\varphi_1)\right]^2\right\}^{3/2}, \qquad (8)$$

где $i'^2(\varphi_1)$ – квадрат первой производной от функции $i(\varphi_1)$ по параметру φ_1,

$$A_1 = i^2(\varphi_1)\cdot\left[1+i(\varphi_1)\right]+2\cdot i'^2(\varphi_1)-i(\varphi_1)\cdot i''(\varphi_1), \qquad (9)$$

$i''(\varphi_1)$ – вторая производная от функции передаточного отношения.

Радиусы кривизн центроид для ведомого колеса:

$$\rho_2 = \frac{a_w}{\left[1+i(\varphi_1)\right]^2 A_2}\left\{i'^2(\varphi_1)+\left[1+i(\varphi_1)\right]^2\cdot i^2(\varphi_1)\right\}^{3/2}; \qquad (10)$$

$$A_2 = -i^3(\varphi_1)\cdot\left[1+i(\varphi_1)\right]+2\cdot i'^2(\varphi_1)-i''(\varphi_1)\cdot i(\varphi_1), \qquad (11)$$

Радиусы кривизн центроид минимальные и максимальные ориентировочно можно определить из построенных в масштабе центроид, что может быть допустимо при определении $z_{\min}$ и $z_{\max}$.

Устанавливают минимальные и максимальные радиусы кривизн центроид и определяют значения минимальных и максимальных чисел зубьев на этих участках центроид:

$$z_{1\min} = \frac{2\rho_{1\min}}{m_t}; \qquad (12)$$

$$z_{1\max} = \frac{2\rho_{1\max}}{m_t}; \qquad (13)$$

$$z_{2\min} = \frac{2\rho_{2\min}}{m_t}; \qquad (14)$$

$$z_{2\max} = \frac{2\rho_{2\max}}{m_t}, \qquad (15)$$

где $\rho_{1\min}$ и $\rho_{1\max}$, $\rho_{2\min}$ и $\rho_{2\max}$ – минимальные и максимальные значения радиусов кривизн ведущего и ведомого некруглых колес.

Сравнивают полученные числа зубьев $z_{1\min}$ и $z_{2\min}$ с рекомендуемыми минимальными значениями.

Определяют углы поворота ведомой центроиды, дифференцируя функцию передаточного отношения:

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} i(\varphi_1)d\varphi_1 .$$

Согласно рекомендациям, представленным в [3], необходимым является проверка по условию непрерывности зацепления передачи некруглыми зубчатыми колесами, а именно передаточная функция должна быть непрерывной, плавно изменяющейся и дифференцируемой на всех ее участках.

Предложенная методика определения основных параметров передач некруглыми колесами распространяется на передачи с любой функцией передаточного отношения с эвольвентным зацеплением и зацеплением Новикова.

Список литературы: 1. *Гузенков П.Г.* Детали машин. – М.: Высшая школа, 1986. – 359с. **2.** *Иванов М.Н.* Детали машин. – М.: Высш.шк., 1991. – 383с. **3.** *Литвин Ф.Л.* Некруглые зубчатые колеса. – М.-Л.: Машгиз, 1956. – 312с. **4.** *Утутов Н.Л.* Определение длины центроиды некруглых зубчатых колес // Теория механизмов и машин. Вып. 26. Респ. межвед. научно-техн. сб. – Харьков: Вища школа, 1979. – С.73-76. **5.** *Утутов Н.Л.* К определению радиусов и координат центров кривизн центроид некруглых зубчатых колес // Теория механизмов и машин. Вып. 26. Респ. межвед. научно-техн. сб. – Харьков: Вища школа, 1979. – С.71-73.

Поступила в редколлегию 22.04.09

УДК 621.833

В.П. ШИШОВ, д.т.н., проф. каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля
П.Н. ТКАЧ, к.т.н., доц. каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля
О.А. РЕВЯКИНА, к.т.н., ЛНУ им. Т.Г. Шевченко
Ю.А. СКЛЯР, аспирант каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля
И.Г. ТКАЧ, аспирант каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

О НАПРЯЖЕНИЯХ ИЗГИБА У ОСНОВАНИЯ ЗУБЬЕВ С ОБОБЩЕННЫМ ИСХОДНЫМ КОНТУРОМ.

Із застосуванням гіпотези ламаних перетинів визначені напруги вигину в основі прямих зубців коліс, нарізаних інструментом з узагальненим вихідним контуром.

With application of a hypothesis of broken cross-sections efforts of bending at a foundation of spur teeth of the g cut by the instrument with the generalized initial head loop are defined.

Постановка проблемы. В современных экономических условиях одной из основных задач, стоящих перед машиностроительной отраслью, является повышение качества и конкурентоспособности выпускаемой продукции. Среди продукции машиностроительной отрасли зубчатые передачи занимают одно из ведущих мест, так как входят в состав приводов практически всех машин. Поэтому повышение качественных показателей зубчатого зацепления является, безусловно, актуальной задачей, являющейся неотъемлемой частью проблемы многокритериальной оптимизации машиностроительных конструкций [1].

Анализ литературы. Одним из важных критериев работоспособности зубчатых колес является изгибная прочность зубьев [2]. Вопросам определения напряжений изгиба у основания зубьев эвольвентных передач посвящено значительное количество работ, например [3, 4]. В этих работах при определении местных напряжений у основания эвольвентных зубьев эффективно используется гипотеза ломаных сечений. Однако, для зубьев передач, нарезанных инструментом с исходным контуром, очерченным произвольной кривой (обобщенным исходным контуром), эта задача не решалась.

Цель статьи. На основе гипотезы ломаных сечений получить обобщенные зависимости, позволяющие оценивать напряженно-деформированное состояние оснований зубьев, нарезанных инструментом с обобщенным исходным контуром.

1. Геометрия обобщенного исходного контура. На рисунке 1 изображен обобщенный исходный контур, рабочий профиль которого очерчен произвольной кривой, уравнение которой в системе координат $X_p O_p У_p$ имеет вид (ось $O_p У_p$ направлена по начальной прямой "н.п.")

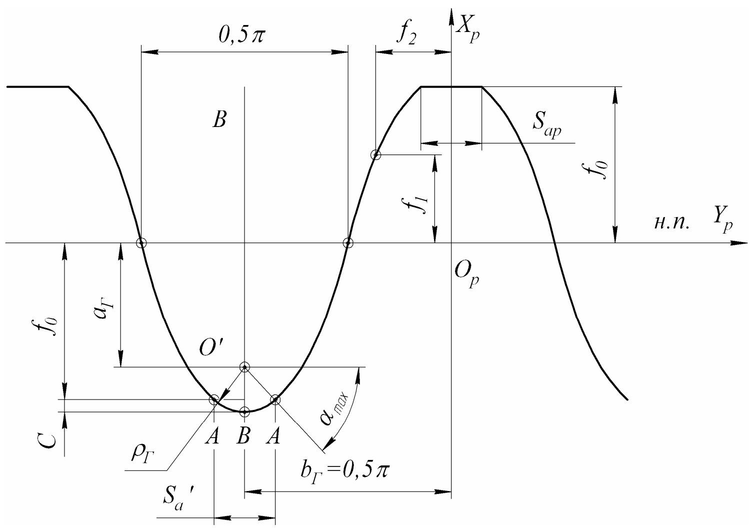

Рисунок 1 – Обобщенный исходный контур

$$X_p = f_1(\lambda);$$
$$Y_p = f_2(\lambda), \tag{1}$$

где $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ – произвольные функции; λ – параметр (в дальнейшем значок λ в обозначениях функций и их производных будем опускать)

Будем предполагать, что галтель $A-A$ исходного контура очерчена дугой окружности с радиусом $\rho_Г$, а центр окружности расположен на прямой BB, являющейся осью симметрии зуба рейки. Тогда координаты точки A будут равны (в системе $X_p O_p У_p$)

$$f_{1A} = f_1(\lambda_0) = f_0;$$
$$f_{2A} = f_2(\lambda_0), \tag{2}$$

где λ_0 – параметр, соответствующий точке A профиля исходного контура, f_0 – расстояние точки A от оси $O_p У_p$ (от прямой "н.п.").

Угол $\alpha_{\max}$, соответствующий точке A, определяется из соотношения (при $\lambda = \lambda_0$)

$$\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{f'_{2A}}{f'_{1A}}, \tag{3}$$

где f'_{1A}, f'_{2A} – производные функций (1) по λ при $\lambda = \lambda_A$, в точке A.

Тогда уравнение в системе координат $X_p O_p У_p$ дуги окружности с радиусом $\rho_Г$ будет иметь вид (рисунок 1):

$$f_{1Г} = -(\rho_Г \sin\alpha_1 + a_Г) + \xi;$$
$$f_{2Г} = \rho_Г \cos\alpha_1 - b_Г; \tag{4}$$
$$\alpha_{max} \le \alpha_1 \le 0{,}5\pi,$$

где α_1 – угол, соответствующий координате точки галтели исходного контура; $a_Г$, $b_Г$ – координаты центра окружности с радиусом $\rho_Г$ (в системе $X_p O_p У_p$); ξ – смещение.

Из рисунка 1 следует

$$\rho_Г = \frac{S'_a}{2\cos\alpha_{\max}},$$
$$a_Г = (f_0 + c - \rho_Г);\ b_Г = 0{,}5\pi; \tag{5}$$
$$c = \rho_Г(1 - \sin\alpha_{\max}),$$

где c – радиальный зазор в зацеплении.

2. Радиус кривизны галтели зуба колеса. Используя результаты [5] для определения кривизны поверхностей зубьев, нарезанных реечным инструментом с профилем, очерченным кривой (4), получаем значение кривизны галтели

$$\chi_{ГК} = \chi_Г + \frac{f'_{2Г}\left(\Omega'_{2Г}\right)^2}{\tau_Г n_Г^3}, \tag{6}$$

где: $n = \sqrt{\left(f'_{1Г}\right)^2 + \left(f'_{2Г}\right)^2}$; $\tau_Г = R + \frac{f_{1Г}}{f'_{2Г}}\Omega'_{2Г}$; $\Omega_{2Г} = \frac{f_Г f'_{1Г}}{f'_{2Г}} + f_{2Г}$; $f'_{1Г}$, $f'_{2Г}$ – первые производные функций (4) по α_1; $\Omega'_{2Г}$ – производная функции $\Omega_{2Г}$ по α_1; R – радиус начальной окружности колеса; $\chi_Г = 1/\rho_Г$ – кривизна галтели рейки.

С использованием соотношений (4), имеем

$$f'_{1Г} = -\rho_Г \sin\alpha_1,\ f'_{2Г} = -\rho_Г \sin\alpha_1;$$
$$\Omega_{2Г} = -\operatorname{ctg}\alpha_1,\ \Omega'_{2Г} = \frac{a_Г}{\sin^2\alpha_1}; \tag{7}$$
$$n_Г = \rho_Г.$$

3. Толщина основания и рабочего участка зуба колеса. Согласно [5] уравнение галтели зуба колеса в системе координат $X_1O_1Y_1$ (O_1 – центр начальной окружности колеса) можно представить в виде (рисунок 2):

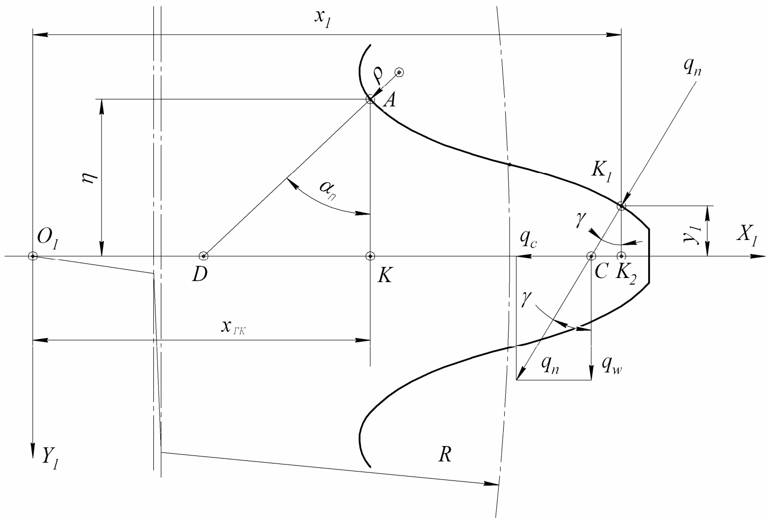

Рисунок 2 – Схема зуба колеса

$$x_{ГК} = \left(f_{1Г} + R\right)\cos\varphi_Г + \Omega_{1Г}\sin\varphi_Г,$$
$$y_{ГК} = \left(f_{1Г} + R\right)\sin\varphi_Г - \Omega_{1Г}\cos\varphi_Г, \tag{8}$$
$$\Omega_{1Г} = \frac{f_{1Г} f'_{1Г}}{f'_{2Г}},\ \varphi_Г = \frac{\Omega_{2Г}}{R}.$$

Тогда половина толщины зуба у основания равна (рисунок 2)

$$\eta = \left|y_{ГК}\right|. \tag{9}$$

Координаты рабочего профиля зуба колеса в системе координат $X_1O_1Y_1$ равны [5]:

$$x_1 = \left(f_1 + R\right)\cos\varphi_1 + \Omega_1\sin\varphi_1;$$
$$y_1 = \left(f_1 + R\right)\sin\varphi_1 - \Omega_1\cos\varphi_1; \tag{10}$$
$$\varphi_1 = \frac{\Omega_2}{R};\ \Omega_1 = \frac{f_1 f'_1}{f'_2};\ \Omega_2 = \Omega_1 + f_2,$$

где f_1, f_2 – имеют значения (1), f'_1, f'_2 – первые производные функций f_1, f_2.

Половина толщины зуба в сечении, соответствующем точке K (рисунок 2) имеет значение

$$\eta_k = \left|y_1\right|. \tag{11}$$

4.Напряжения изгиба у основания зуба. Напряжение изгиба в точке A (рисунок 2) равны [3]

$$\sigma_{из} = \frac{q_n СД\cos\gamma}{\eta^2}\cdot H, \tag{12}$$

где

$$H = \frac{\cos\alpha_n}{2\left[\dfrac{3\dfrac{\eta}{\rho_{ГК}} + 2\cos\alpha_n}{2\left(\dfrac{\eta}{\rho_{ГК}}\right)^2} + \dfrac{\left(\cos\alpha_n + \dfrac{\eta}{\rho_{ГК}}\right)^2}{\left(\dfrac{\eta}{\rho_{ГК}}\right)^3}\ln\dfrac{\cos\alpha_n}{\cos\alpha_n + \dfrac{\eta}{\rho_{ГК}}}\right]}. \tag{13}$$

В формулах (12) и (13) α_n – угол между касательной профиля зуба в точке A и осью O_1X_1; γ – угол между напряжением q_n и перпендикуляром к оси O_1X_1; $СД$ – расстояние точки $Д$ до точки пересечения q_n с осью O_1X_1; η и $\rho_{ГК}$ определяются по формуле (9) и зависимости

$$\rho_{ГК} = \frac{1}{\chi_{ГК}} . \tag{14}$$

Переходим к определению углов α_n, γ и величины $СД$. Углы α_n и γ можно определить из соотношений

$$tg\alpha_n = \frac{y'_Г}{x'_Г};\ tg\gamma = \frac{x'_1}{y'_1}, \tag{15}$$

где $x'_Г$, $y'_Г$, x'_1, y'_1 – первые производные функций (8) и (10) соответственно.

Из рисунка 2 следует

$$\begin{aligned} СД &= x_1 - x_{ГК} + ДК - K_2C; \\ ДК &= \eta \operatorname{tg} \alpha_n; \\ K_2C &= \eta_K \operatorname{tg} \gamma . \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что $x_{ГК}$ изменяются в пределах, определяемых уравнениями (5), x_1 определяется из условия изменения текущего радиуса колеса в пределах

$$R_f \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \le R_a , \tag{17}$$

где R_f и R_a – радиус впадин и вершин зубьев.

Положение точки контакта на профиле зуба при исследовании местных напряжений следует задавать в пределах определяемых соотношением (17).

Местное напряжение на стороне растяжения будет равно [3]

$$\sigma_м = \frac{TK}{bR} Y_F , \tag{18}$$

где T – крутящий момент на валу колеса; K – коэффициент расчетной нагрузки; b – ширина колеса; Y_F – коэффициент формы зуба, равный

$$Y_F = \frac{2\eta^2 \cos\alpha}{2СД \cdot H \cdot \cos\gamma - \eta \sin\gamma \cdot \cos^2 \alpha_n} . \tag{19}$$

В соотношении (19) α – профильный угол исходного контура в точке, соответствующей точке приложения силы q_n (рисунок 2) на профиле зуба колеса. Отметим, что Y_F определен для модуля зацепления, равного единице, а при оценке прочности зубьев необходимо иметь максимальное значение Y_F .

Производные функций (8) и (10) по α_1 и λ :

$$\begin{aligned} x'_{1Г} &= \left(f'_{1Г} + \Omega_{1Г} \frac{d\varphi_Г}{d\alpha_1} \right) \cos\varphi_Г + \left[\Omega'_{2Г} - \left(f_{1Г} + R \right) \frac{d\varphi_Г}{d\alpha_1} \right] \sin\varphi_Г; \\ y'_{1Г} &= \left(f'_{1Г} + \Omega_{1Г} \frac{d\varphi_Г}{d\alpha_1} \right) \sin\varphi_Г + \left[-\Omega'_{1Г} + \left(f'_{1Г} + R \right) \frac{d\varphi_Г}{d\alpha_1} \right] \cos\varphi_Г; \\ x'_1 &= \left(f'_1 + \Omega_1 \frac{d\varphi_1}{d\lambda} \right) \cos\varphi_1 + \left[\Omega'_2 - \left(f_1 + R \right) \frac{d\varphi_1}{d\lambda} \right] \sin\varphi_1; \\ y'_1 &= \left(f'_1 + \Omega_1 \frac{d\varphi_1}{d\lambda} \right) \sin\varphi_1 + \left[-\Omega'_1 + \left(f_1 + R \right) \frac{d\varphi_1}{d\lambda} \right] \cos\varphi_1, \end{aligned} \tag{20}$$

в этих равенствах $\Omega'_{1Г}$, Ω'_1 – первые производные функций $\Omega_{1Г}$ и Ω_1 ; а

$$\frac{d\varphi_{1Г}}{d\alpha} = \frac{\Omega'_{2Г}}{R},\ \frac{d\varphi_1}{d\lambda} = \frac{\Omega'_2}{R}, \tag{21}$$

где $\Omega'_{2Г}$ определяется соотношением (7); Ω'_2 – производная функции Ω_2 (см. (10)) по λ .

Список литературы: **1.** *Кіндрацький Б., Сулим Г.* Сучасний стан і проблеми богатокритеріального синтезу машинобудівних конструкцій (огляд) // Машинознавство. – Львів, 2002. – №10(64). – С.26–40. **2.** *Кудрявцев В. Н.* Детали машин. – Л.: Машиностроение. Ленингр. Отд-ние, 1980. – 464с. **3.** *Кудрявцев В. Н.* Зубчатые передачи. М.: Машиностроение, 1957. – 263с. **4.** *Гавриленко В. А.* Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. М.: Машиностроение, 1969. – 431с. **5.** *Шишов В.П., Носко П.Л., Ревякина О.А.* Цилиндрические передачи с арочными зубьями. – Луганськ: вид-во СНУ ім. В. Даля, 2004. – 336с.

Поступила в редколлегию 25.04.09