УДК 621.91.02: 621.83

И.А. КИРИЧЕНКО, д.т.н., проф., зав. каф. метрологии ВНУ им. В. Даля
Н.Н. КУЗЬМЕНКО, ассистент. каф. метрологии ВНУ им. В. Даля

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ГЛОБОИДНОЙ ПЕРЕДАЧИ ВТОРОГО РОДА

В аналітичному вигляді визначені якісні показники працездатності квазиглобоїдної передачі другого роду, що складається з циліндрового прямозубого і квазиглобоїдного колеса. Аналітичні залежності, застосовні для аналізу глобоїдних передач другого роду, колеса яких формообразуються за допомогою циліндрових коліс, що проводять, з довільним профілем. Приведено співвідношення за допомогою якого можна визначити точки контакту, в яких умови мастила будуть найбільш сприятливі для роботи глобоїдної передачі другого роду.

The high-quality indexes of capacity of kvazigloboidnoy transmission of the second family, consisting of cylindrical pryamozubogo and kvazigloboidnogo wheel are certain in an analytical kind. Analytical dependences, applicable for the analysis of globidnykh transmissions of the second family, wheels of which formoobrazuyutsya through cylindrical productive wheels with an arbitrary type. Correlation is resulted through which it is possible to define the points of contact, in which the terms of greasing will be most favorable for work of globoidal gear of the second family.

Условия внедрения контактирующих поверхностей зубьев и режущих лезвий квазиглобоидных или цилиндрических обкатных инструментов зависят от скорости перемещения точек контакта в направлении, перпендикулярном линии контакта. Данная скорость оказывает существенное влияние на процесс резания. Чем больше эта скорость и больше угол, тем труднее происходит внедрение режущих кромок в обрабатываемый материал. При этом глобоидная передача второго рода работает лучше.

При исследовании удельных скольжений нарезаемых зубьев и других показателей работоспособности инструментов и передач возникают задачи определения скорости движения точек контакта в направлении заданного вектора. Определим эту скорость. Пусть задан единичный вектор $\vec{a}$, перпендикулярный $\vec{q}$. Требуется определить $\vec{V}^{(12)} \neq 0$ в направлении заданного вектора. В рассматриваемом случае вектор $\vec{q}$ равен

$$\vec{q} = [\vec{a} \times \vec{l}_1] = [\vec{a} \times (\vec{r}_1^{\,\lambda} \times \vec{r}_1^{\,\mu})]1/\left|\vec{N}\right| . \qquad (1)$$

После преобразований получим:

$$\vec{V}^{(1)} = -[(\vec{a}\vec{r}_1^{\,\lambda})G_1\vec{r}_1^{\,\lambda} + (\vec{a}\vec{r}_1^{\,\mu})E_1\vec{r}_1^{\,\mu}]F^{\varphi 1} /[(\vec{a}\vec{r}_1^{\,\mu})E_1F^{\mu} + (\vec{a}\vec{r}_1^{\,\lambda})G_1F^{\lambda}], \qquad (2)$$

$$\vec{V}^{(2)} = -[(\vec{a}\vec{r}_1^{\,\lambda})G_1\vec{r}_1^{\,\lambda} + (\vec{a}\vec{r}_1^{\,\mu})E_1\vec{r}_1^{\,\mu}]\cdot F^{\varphi 1} /[(\vec{a}\vec{r}_1^{\,\mu})E_1F^{\mu} + (\vec{a}\vec{r}_1^{\,\lambda})G_1F^{\lambda}] + \vec{V}^{(12)} .$$

Определим суммарную скорость движения точек контакта в направлении, перпендикулярном вектору $\vec{q}$.

$$\vec{u} = \vec{V}^{(1)} + \vec{V}^{(2)} = 2F^{\varphi 1}[\vec{q} \times \vec{l}_1]\left|N\right| /[(\vec{r}_1^{\,\lambda}\vec{q})F^{\mu} - (\vec{r}_1^{\,\mu}\vec{q})F^{\lambda} + \vec{V}^{(12)} . \qquad (3)$$

Для нахождения истинного значения скорости спроектируем вектор $\bar{u}$ на единичный вектор, перпендикулярный вектору $\vec{q}$.

$$\bar{q} = [\vec{q} \times \vec{l}_1] . \qquad (4)$$

Умножая скалярно обе части равенства на, после преобразований имеем:

$$\vec{u}_{\bar{q}} = 2F^{\varphi 1} + \vec{V}^{(12)}[\vec{q} \times \vec{l}_1](\vec{r}_1^{\,\lambda}\vec{q})F^{\mu} - (\vec{r}_1^{\,\mu}\vec{q})F^{\lambda} /[(\vec{r}_1^{\,\lambda}\vec{q})F^{\mu} - (\vec{r}_1^{\,\mu}\vec{q})F^{\lambda}] . \qquad (5)$$

Попутно определим суммарную скорость точек контакта в направлении вектора $\bar{a}$ под углом ψ к вектору $\bar{\tau}_1$ – касательному к контактной линии основных поверхностей кинематической пары. Представим вектор $\bar{a}$ в следующем виде

$$\vec{a} = (\vec{r}_1^{\,\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + \vec{r}_1^{\,\mu}) / \sqrt{E_1(\frac{d\lambda}{d\mu})^2 + G_1} . \qquad (6)$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и τ_1 можно определить из соотношения

$$tg\psi = \frac{\left|[\tau \times \vec{a}]\right|}{(\tau_1, \vec{a})} . \qquad (7)$$

Преобразуя правую часть этого выражения, получим

$$tg\psi = \left|\bar{N}\right|(F_1^{\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + F^{\mu}) / (E_1F^{\mu}\frac{d\lambda}{d\mu} - G_1F^{\lambda}) .$$

Решая последнее уравнение относительно $d\lambda / d\mu$, получаем

$$d\lambda / d\mu = -(G_1F^{\lambda}tg\psi + \left|\bar{N}\right|F^{\mu}) / (\left|\bar{N}\right|F^{\lambda} - E_1F^{\mu}tg\psi) . \qquad (8)$$

Эти соотношения можно использовать при произвольном значении угла ψ. Так, например при ψ =0 получаем $d\lambda / d\mu = -F^{\mu} / F^{\lambda}$, что соответствует направлению вектора τ_1. В этом случае вектор $\vec{a}$ направлен по вектору τ_1

$$\vec{a} = a\vec{r}_1^{\,\lambda} + b\vec{r}_1^{\,\mu} . \qquad (9)$$

где коэффициенты a и b определяются равенствами

$$a = -(G_1 F^{\lambda} tg\psi + |\vec{N}| F^{\mu}) a_w;$$
$$b = (|\vec{N}| F^{\lambda} - E_1 F^{\mu} tg\psi) a_w. \qquad (10)$$

$$a_w = [(E_1 G_1 F^{\lambda} tg\psi^{©} + |\vec{N}| F^{\mu})^2 + (G_1 F^{\lambda} |\vec{N}| - E_1 G_1 F^{\mu} tg\psi^{©})^2]^{1/2}. \qquad (11)$$

При замене вектора $\vec{q}$ вектором $\vec{a}$ получаем

$$u_{\vec{a}} = \frac{2F^{\varphi 1} + [bG_1(\vec{r}_1^{\lambda}\vec{V}^{(12)} - aE_1(\vec{r}_1^{\mu}\vec{V}^{(12)})] \cdot [(\vec{r}_1^{\lambda} q)F^{\mu} - (\vec{r}_1^{\lambda} q)F^{\lambda}] / E_1 G_1}{[(\vec{r}_1^{\lambda}\vec{q})F^{\mu} - (\vec{r}_1^{\mu}\vec{q})F^{\lambda}] / |\vec{N}|}. \qquad (12)$$

Полагая в соотношениях (7) и (8) $\psi = 0$, получим следующую формулу для определения суммарной скорости движения точек контакта в направлении, перпендикулярном вектору $\vec{\tau}_1$.

$$u_{\vec{\tau}} = \frac{2F^{\varphi 1} + [G_1 F^{\lambda}(\vec{r}_1^{\lambda}\vec{V}^{(12)}) + E_1 F^{\mu}(\vec{r}_1^{\mu}\vec{V}^{(12)})] \cdot \dfrac{[\vec{r}_1^{\lambda}\vec{q})F^{\mu} - (\vec{r}_1^{\mu}\vec{q})F^{\lambda}}{A_1 E_1 G_1}}{[(\vec{r}_1^{\lambda}\vec{q})F^{\mu} - (\vec{r}_1^{\mu}\vec{q})F^{\lambda}] / |N|}, \qquad (13)$$

где – $A_1 = \sqrt{E_1 (F^{\mu})^2 + G_1 (F^{\lambda})^2}$ – модуль вектора; E_1, G_1 – коэффициенты квадратичных форм основной поверхности, равные $E_1 = f_1^{©2} + f_2^{©2}; F_1 = 0; G_1 = 0$; $F^{\varphi 1}, F^{\mu}, F^{\lambda}$ – частные производные, находим из уравнения станочного зацепления

$$\begin{aligned} F^{\varphi 1} &= -\mu u_{21} \sin\gamma(-f_2^{/} \sin\varphi_1 + f_1^{/} \cos\varphi_1) - \\ &- a_w u_{21} \cos\gamma(f_2^{/} \cos\varphi_1 + f_1^{/} \sin\varphi_1); \\ F^{\lambda} &= -(1 - u_{21}\cos\gamma)[f_2^{/2} + f_2 f_2^{//} + f_1^{//}(f_1 - r_1) + f_1^{/2}] - \\ &- \mu u_{21} \sin\gamma(f_2^{//} \cos\varphi_1 + f_1^{//} \sin\varphi_1 - a_w u_{21} \cos\gamma(f_2^{//} \sin\varphi_1 - f_1^{//} \cos\varphi_1); \\ F^{\mu} &= -u_{21} \sin\gamma(f_2^{/} \cos\varphi_1 + f_1^{/} \sin\varphi_1); \end{aligned} \qquad (14)$$

$\vec{\tau}^{\,0} = \vec{q} = \dfrac{\vec{r}_1^{\lambda} F^{\mu} - \vec{r}_1^{\mu} F^{\lambda}}{a_w}$ – единичный вектор касательной к контактной линии.

$$\begin{aligned} u_{\tau} &= \frac{2F^{\varphi 1} E_1 + F^{\mu}(\vec{r}_1^{\lambda}\vec{V}^{(12)}) - F^{\mu} E_1(\vec{r}_1^{\mu}\vec{V}^{(12)})}{\sqrt{E_1[E_1(F^{\mu})^2 + (F^{\lambda})^2]}} = \\ &= \frac{2F^{\varphi 1}(f_1^{/2} + f_2^{/2}) - F^{\lambda}(\vec{r}_1^{\lambda}\vec{V}^{(12)} - (f_1^{/2} + f_2^{/2}) F^{\mu}(\vec{r}_1^{\mu}\vec{V}^{(12)})}{\sqrt{(f_1^{/2} + f_2^{/2})[(f_1^{/2} + f_2^{/2})(F^{\mu})^2 + (F^{\lambda})^2]}}. \end{aligned} \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1^{\lambda}\vec{V}^{(12)}) &= [-f_1^{/} f_2 + f_2^{/}(f_1 - r_1)](1 - u_{21}\cos\gamma) - \mu u_{21} \sin\gamma(f_1^{/} \cos\varphi_1 - \\ &- f_2^{/} \sin\varphi_1) - a_w u_{21} \cos\gamma(f_1^{/} \sin\varphi_1 + f_2^{/} \cos\varphi_1); \\ (\vec{r}_1^{\mu}\vec{V}^{(12)}) &= [(f_1 - r_1)\cos\varphi_1 - f_2 \sin\varphi_1 + a_w] u_{21} \sin\gamma \end{aligned} \qquad (16)$$

при

$$2F^{\varphi 1}(f_1^{/2} + f_2^{/2}) - F^{\lambda}(\vec{r}_1^{\lambda}\vec{V}^{(12)}) - (f_1^{/2} + f_2^{/2}) F^{\mu}(\vec{r}_1^{\mu}\vec{V}^{(12)}) = 0. \qquad (17)$$

При этом суммарная скорость движения точек контакта u_{τ} =0. Полученные соотношения можно использовать для точек контакта, для которых u_{τ} =0, т.е. тех точек, в которых самые благоприятные условия резания и неблагоприятные условия для работы цилиндро-глобоидной передачи. Переменная величина λ при функциях f_1 и f_2 опущена для простоты записи.

По величине скоростей скольжения зубьев глобоидной передачи второго рода сложно судить о величине проскальзывания основных поверхностей. Из теории зацепления известно, что оценка износа зубьев только по скорости скольжения не является объективной. Поэтому для оценки их износа и, следовательно, их долговечности следует использовать коэффициенты удельного скольжения. Эти коэффициенты выразим следующим образом, соответственно, для обрабатываемых зубьев цилиндрических колес и режущих кромок на квазиглобоидном обкатном инструменте, а также на зубьях передачи

$$\eta_1 = V^{(12)} / V^{(1)}; \qquad \eta_2 = V^{(12)} / V^{(2)}, \qquad (18)$$

где $V^{(12)}$ – модуль скорости скольжения зубьев обрабатываемого цилиндрического колеса, а также контактирующих зубьев глобоидного колеса; $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ – скорости перемещения точки контакта зуба цилиндрического колеса и контактирующего зуба глобоидного колеса в направлении вектора относительной скорости скольжения $V^{(12)}$.

Коэффициенты удельных скольжений можно записать в следующем виде:

$$\eta_1 = [\overline{V}^{(12)}]^2 / (\overline{V}^{(1)} \overline{V}^{(12)}); \qquad \eta_2 = [\overline{V}^{(12)}]^2 / (\overline{V}^{(2)} \overline{V}^{(12)}). \qquad (19)$$

После преобразований получим

$$\eta_1 = -[(\overline{V}^{(12)} \overline{r_1}^{\mu})(f_1^{'2} + f_2^{'2}) F^{\mu} + (\overline{V}^{(12)} \overline{r_1}^{\lambda}) F^{\lambda}] / F^{\varphi 1}(f_1^{'2} + f_2^{'2}); \qquad (20)$$

$$\eta_2 = 1 - F^{\varphi 1}(f_1^{'2} + f_2^{'2}) / [F^{\varphi 1}(f_1^{'2} + f_2^{'2}) - (V^{(12)} r_1^{\mu})(f_1^{'2} + f_2^{'2}) F^{\mu} - (V^{(12)} r_1^{\lambda}) F^{\lambda}]. \qquad (21)$$

Переменная величина λ при функциях f_1 и f_2 опущена для краткости записи.

Если числитель в выражении (20) не равен нулю, то точки контакта с бесконечным значением удельного скольжения η_1 определяют из условия:

$F^{\varphi 1} = 0$. При $F^{\varphi 1} \neq 0$ коэффициент удельного скольжения η_2 имеет значения, равные бесконечности при условии

$$F^{\varphi 1}(f_1^{'2} + f_2^{'2}) - (V^{(12)} r_1^{\mu})(f_1^{'2} + f_2^{'2}) F^{\mu} - (V^{(12)} r_1^{\lambda}) F^{\lambda} = 0 . \qquad (22)$$

Эти условия можно использовать для определения точек контакта с бесконечными удельными скольжениями и таким образом судить об износе зубьев колес глобоидной передачи.

Нагрузочную способность глобоидной передачи в большей степени определяет приведенная кривизна основных поверхностей зубьев в направлении, перпендикулярном линии контакта.

Нарезание поверхностей зубьев цилиндрических колес, а также колес для пространственных передач в значительной степени зависит от приведенной кривизны контактирующей нарезаемой поверхности и режущей кромки в направлении перпендикулярном линии контакта.

Под приведенной нормальной кривизной χ_{np} понимают разность кривизны касающихся поверхностей в общем нормальном сечении.

$$\chi_{np} = \chi^{(1)} - \chi^{(2)} , \qquad (23)$$

где $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$ – нормальные кривизны огибающей и огибаемой поверхностей в общем нормальном сечении.

Для определения приведенной кривизны поверхностей сопряженных зубьев применяем выражение из теории передач.

Длина контактной линии характеризует до некоторой степени длину зуба (витка), а также контактную и изломную прочность зубьев.

Уравнение длины контактной линии можно получить в следующем виде

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{(f_1^{/})^2 + (f_2^{/})^2 + (\frac{d\mu}{dt})^2} \, d\lambda . \qquad (24)$$

λ_1, λ_2 соответствуют точкам пересечения контактных линий с поверхностями выступов основного цилиндрического колеса и основного квазиглобоидного колеса. Значение, соответствующее вершине зубьев цилиндрического колеса известно. Что касается λ, соответствующего вершине основного квазиглобоидного колеса, то в зависимости от типа передач уравнения для определения его значений будут иметь расчетный вид.

Эти уравнения легко получить, зная уравнения поверхности, соответствующей вершинам зубьев колеса.

Список литературы: 1. *Витренко А.Н.* Исследование геометрии и кинематики цилиндро-гиперболоидных передач: Дисс…канд. техн. наук: 01.02.02. – Ворошиловград, 1975. – 214с. **2.** *Выгодский М.Я.* Дифференциальная геометрия. – М.: Машгиз, 1949. – 659с. **3.** *Гавриленко В.А.* Геометрическая теория эвольвентных зубчатых передач. – М.: Машгиз, 1949. – 404с. **4.** *Гавриленко В.А.* Зубчатые передачи в машиностроении. – М.: Машгиз, 1968. – 280с. **5.** *Гавриленко В.А.* Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача. – М.: Машгиз, 1956. – 296с. **6.** *Дусеев И.И.* Кривизна нормальных сечений сопряженных поверхностей зубьев зубчатых зацеплений // Изв. вузов. Сер. машиностроение. – 1964. – №3. – С.33–40. **7.** *Ерихов М.Л.* Определение главных кривизн и главных направлений огибающей двухпараметрического семейства поверхностей // Изв. вузов. Сер. машиностроение. – 1966. – №9. – 11с. **8**. *Коростелев Л.В.* Кинематические показатели несущей способности пространственных зацеплений // Изв. вузов. Сер. "Машиностроение". – 1964. – №10. – С.141–147. **9**. *Литвин Ф.Л.* Теория зубчатых зацеплений. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1968. – 584с.

Поступила в редколлегию 05.05.09

УДК 621.833

Б.И. ЛАЛЕВ, к.т.н., машинно-технологический ф-т, каф. ТМММ, ТУ-Варна, Болгария
Г.П. АНТОНОВ, машинно-технологический ф-т, каф. ТМММ, ТУ-Варна, Болгария
К.С. КОЛЕВА, судостроительный ф-т, каф. технической механики, ТУ-Варна, Болгария

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ШПИНДЕЛЕЙ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКОВ

Основным этапом проектирования шпиндельных узлов для металлорежущих станков является оптимизация эго размеров. Изучение опыта ведущих фирм показывает, что конструктивное оформление шпинделей производится при соблюдении определенных соотношений расстояния между подшипниками, толщины стенки и регламентированных величин статической жесткости подшипниковых опор. При этом базовыми являются расчеты на статическую жесткость и динамическую устойчивость. Расчеты на прочность производятся только для тяжелонагруженных станков. В работе проведен статический анализ шпиндельных узлов для металлорежущих станков по методу конечных элементов при помощи пакета программ COSMOSWorks. Моделированы и определены экспериментальным путем деформации шпинделя между подшипниками и для его консольной части.

A major emphasis of the designing of spindle knots for metal-cutting machines is the optimization of the knot’s size. Based on research conducted by leading companies, the spindles are constructed observing specific proportions for inter-bearing space, width of the wall and values for static stability of bearing brackets. Calculations of static stability and dynamic steadiness are pivotal. Strength computation are done only for heavily charged machines. In this paper a static analysis of spindle knots for metal-cutting machines is done using the finite elements method with the help of the commercial product COSMOSWorks. The deformations of the spindle between the bearings and in its console are modeled and experimentally defined.

Введение. Основным моментом на стадии проектирования шпиндельных узлов для металлорежущих станков является оптимизация эго размеров. Изучение опыта ведущих фирм показывает, что при разработке новых станков шпиндельный узел конструктивно оформляется при соблюдении определенных соотношений для расстояний между опорами (подшипниками) и регламентированные величины статической жесткости. Эти два показателя определяют в значительной степени точность обрабатываемых деталей. Поэто-