

СССР, 1962. – Вып. XVII. – С.103-111. **10.** McEwen E. The Effect of Variation of Viscosity with Pressure on the Load Carrying Capacity of Oil Films Between Gear Teeth // Journal of Inst. Pet. Vol. 38. – 1952. **11.** Эдкинс Р. В., Радзимовский Е.И. Исследование смазки цилиндрических прямозубых колес; несущая способность, толщина масляной пленки и коэффициент полезного действия // Теоретические основы инженерных расчетов. – №3. – М.: Мир, 1965. – С.133-146. **12.** Трение, изнашивание и смазка. Справочник. В 2-х кн. – Кн.2. / Под ред. И.В. Крагельского и В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1979. – 358с. **13.** Сусин А.А. Химико-термическое упрочнение высоконапряженных деталей. – Мн.: Беларуская навука, 1999. – 175с. **14.** Басинюк, В.Л. Динамика, шум и смазка зубчатых передач / В.Л. Басинюк. – Гомель: ИММС, 2006. – 224с. **15.** Методика ускоренных сравнительных испытаний цилиндрических зубчатых колес // В.П. Гордовский, О.В. Берестнев, В.Л. Басинюк, В.К. Дубовский. – М.: ГОСНИТИ, 1988 – 65с. **16.** Басинюк Я.В., Мардосевич Е.И., Басинюк В.Л. Оценка качества изготовления и сборки редукторов передач зацеплением по внутренней динамической нагруженности отдельных пар зубьев, определенной по вибрациям подшипниковых опор // Фундаментальные и прикладные проблемы теории точности процессов машин, приборов и систем: Тр. пятой сессии междунар. научн. школы / Под ред. д.т.н., проф. В.П. Булатова и д.т.н., проф. Л.В. Ефремова. – СПб: ИПМаш РАН, 2002. – С.213.

Поступила в редколлегию 24.05.11

УДК 621.833

**М. БОШАНСКИ**, к.т.н., проф., институт транспортных технологий и инженерного проектирования факультета инженерной механики Словацкого технологического университета, Братислава, Словакия

**П. ТОКОЛИ**, к.т.н., инж., институт транспортных технологий и инженерного проектирования факультета инженерной механики Словацкого технологического университета

**А. ВАНЯ**, аспирант, инж., институт транспортных технологий и инженерного проектирования факультета инженерной механики Словацкого технологического университета

**И. КОЖУХ**, к.т.н., институт транспортных технологий и инженерного проектирования факультета инженерной механики Словацкого технологического университета

## ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЭВОЛЬВЕНТНОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ В КОРОБКАХ ПЕРЕДАЧ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН

В статье представлена математическая характеристика неэвольвентной выпукло-вогнутой зубчатой передачи, ее геометрические параметры и соответствие основным условиям синтеза для данного вида зацепления. Также представлено: влияние основных геометрических характеристик на повышение нагрузочной способности в точке контакта; сравнение результатов интенсивности давления в точке контакта для выпукло-вогнутой зубчатой передачи и эвольвентной.

У статті представлено математичну характеристику неэвольвентної опукло-увігнутої зубчастої передачі, її геометричні параметри та відповідність основним умовам синтезу для даного виду

зацеплення. Також представлено: вплив основних геометричних характеристик на підвищення навантажувальної здатності у точці контакту; співставлення результатів інтенсивності тиску в точці контакту для опукло-увігнутої зубчастої передачі та евольвентної.

The mathematical characterization of the non-involute convex-concave gearing, its geometrical parameters and correctness basic conditions of generating with this gearing types are presented in this article. Influences of the basic geometrical characteristics on the enhancement carrying capacity at the point of contact and comparison results of convex-concave gearing and involute one from the point of contact pressure intensity view are presented as well.

**Введение.** Образование повреждений на рабочей поверхности зуба колеса подразумевает под собой неравномерную работу зубчатого зацепления и, в связи с этим, дополнительные колебания во всех составных частях технического оборудования. По этой причине вопрос, о повреждении поверхности зуба, постоянно находится в центре внимания профессионального интереса. Как только поверхность деформируется, происходят последующие частичные повреждения в течение работы зубчатого зацепления: изнашивание, заедание, усталостные повреждения рабочих поверхностей зубьев в результате биения и пластической деформации. Анализ указанных выше повреждений поверхностей зубьев показывает, что уменьшение контактного напряжения, плавность работы, использование масла играет важную роль в увеличении нагрузочной способности зубчатой передачи. При оценке этих параметров для разных типов зубчатых колес известно, что выпукло-вогнутой передача имеет гораздо лучшие результаты, чем эвольвентная [1-3]. Анализ аварийных повреждений поверхностей зубьев, заедание и образование пластических деформаций показывают важность изменения радиуса кривизны. Что касается влияния конкретных геометрических параметров, максимальные значения радиуса кривизны в полюсе *C* выпукло-вогнутого зацепления и, одновременно, в текущей точке зацепления не могут быть достигнуты. По этой причине необходимо определить некоторые рациональные значения основных геометрических параметров. Для выпукло-вогнутой зубчатой передачи данные рекомендации приведены в [4, 5].

**Основная часть.** Выпукло-вогнутой зубчатые передачи относятся к группе прямозубых цилиндрических. Главной особенностью данных передач является то, что форма боковой кривой зуба состоит из двух основных

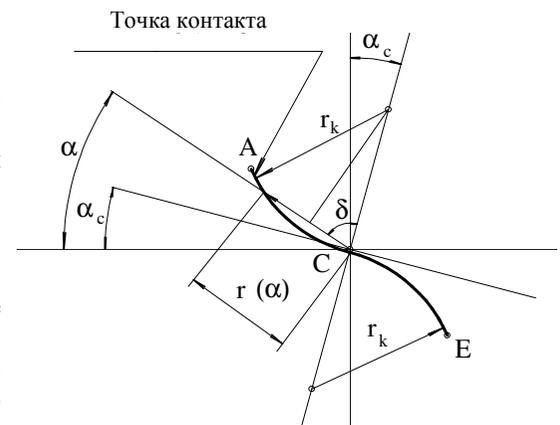


Рисунок 1 – Линия зацепления выпукло-вогнутой зубчатой передачи

кривых – выпуклой и вогнутой. Из теории известно, что криволинейный профиль зубьев зависит от формы линии зацепления [6-8]. Линия зацепления выпукло-вогнутой зубчатой передачи состоит из двух круговых дуг, см. рисунок 1. Из рисунка видно, что приведенный профиль имеет точку перегиба  $C$ , движение которой по линии зацепления описывается параметрическим уравнением.

Зубчатая передача такого вида образуется в результате того, что линия зацепления имеет форму "S" с симметрией дуг. Т.е., зубчатая передача является симметричной выпукло-вогнутой – см. рисунок 2, а в случае несимметричных дуг зубчатая передача является несимметричной выпукло-вогнутой [5]. Координаты точек могут быть отображены математически двумя путями, а именно при помощи построения Альтмана [6], или при помощи векторного представления движения точки зацепления [9]. Второй способ более простой в расчете, в нем координаты точки профиля (1) и линия зацепления (2) являются точными функциональными зависимостями.

$$x = \mp 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \pm \frac{2r_{kh,d}}{r_1} \left[ (\alpha - \alpha_C) \cos \alpha_C + \sin \alpha_C \lg \frac{\cos \alpha_C}{\cos \alpha} \right];$$

$$y = \pm 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \sin \alpha. \quad (1)$$

$$x = \mp 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \cos(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_1 \sin \varphi_r(\alpha);$$

$$y = \pm 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \sin(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_1 \cos \varphi_r(\alpha);$$

$$\varphi_r = \pm \frac{2r_{kh,d}}{r_1} \left[ (\alpha - \alpha_C) \cos \alpha_C + \sin \alpha_C \lg \frac{\cos \alpha_C}{\cos \alpha} \right]. \quad (2)$$

Первая запись соответствует верхней части линии зацепления, а вторая – нижней. Подобным образом для расчета значения  $r_{kh}$  будет замена верхней части линии контакта и для значения  $r_{kd}$  будет замена нижней части. Удобство расчета формы профиля зубчатой рейки и впоследствии также формы профиля зуба по приведенным уравнениям очевидно. Точность координат точек профиля зависит от шага, который отображает изменение

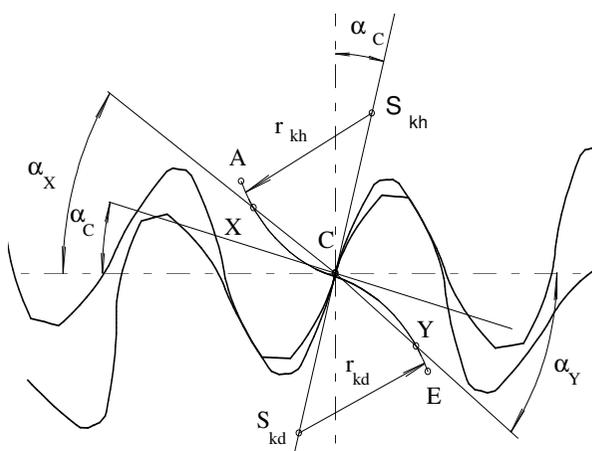


Рисунок 2 – Симметричная выпукло-вогнутая передача

угла  $\alpha_C$ . Отсюда вытекает, что чем больше частота шага в расчете, тем более точные данные для промышленного производства зубчатого колеса. Форма профиля зуба выпукло-вогнутой передачи, его основная кинематика и геометрические характеристики могут влиять на изменения следующих параметров:

- угол зацепления в полюсе –  $\alpha_C$ ;
- радиус кривизны верхней части линии зацепления –  $r_{kh}$ ;
- радиус кривизны нижней части линии зацепления –  $r_{kd}$ ;
- нормальный модуль, коэффициент высоты головки зуба и число зубьев шестерни или колеса.

Изменение формы профиля зуба выпукло-вогнутой зубчатой передачи, а также изменение характеристик зацепления могут быть достигнуты изменением любого из вышеприведенных параметров или их комбинаций. Изменение характеристик не может быть произвольным, а только в пределах, которые будут обеспечивать создание таких зубьев, чтобы в передаче выпуклая часть зуба входила в зацепление с вогнутой частью противоположного зуба и наоборот – т.е. выпукло-вогнутый контакт был достигнут [1].

В зубчатой передаче, у которой профиль зубчатого колеса представляет собой две кривые, вытекают очевидные условия выпукло-вогнутого контакта, приведенные на рисунке 3. Итак, зубья будут в выпукло-вогнутом контакте в том случае, если радиус кривизны в точках, которые образуют профиль нож-

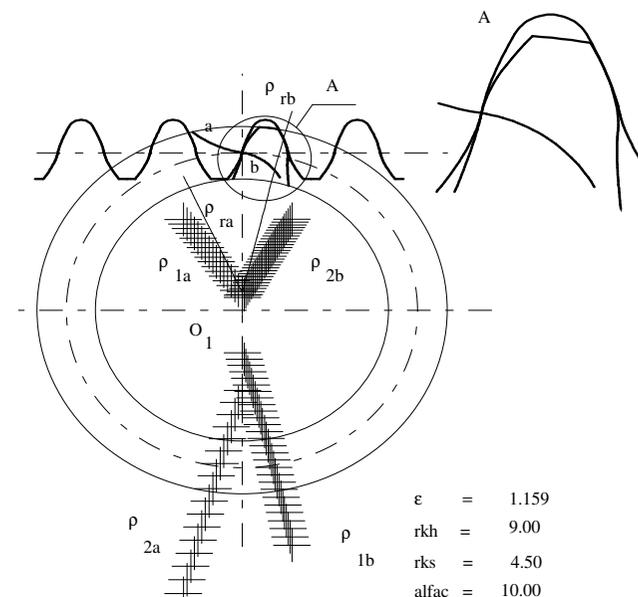


Рисунок 3 – Правильное зацепление с выпукло-вогнутым контактом

ки зуба, будут на участке **b**, линия зацепления отрицательная –  $\rho_{1b}$ , а радиус кривизны в точках, которые образуют профиль головки, зуба, будут на участке **a**, линия контакта положительна –  $\rho_{1a}$ . В сопряженном колес радиус кривизны в точках, которые образуют профиль ножки зуба, будут на участке **b**, линия контакта положительная –  $\rho_{2b}$ , а радиус кривизны в точках, которые образуют профиль головки зуба, будут на участке **a**, линия контакта отрицательна –  $\rho_{2a}$ . Основные геометрические параметры выпукло-вогнутых зубчатых передач могут быть выбраны индивидуально или как взаимная комбинация. Но в определенной их комбинации ситуация может быть такой, что зубчатая передача не будет выпукло-вогнутой в пределах смысла выше сказанного определения [1, 2]. Следовательно, общие комбинации геометрических параметров выпукло-вогнутой передачи  $r_k, \alpha_c, m_n, z$ , могут быть выбраны только тогда, когда зубья будут выпукло-вогнутые. Описание необходимых условий выпукло-вогнутого профиля зуба шестерни или колеса основывается на корреляции, приведенной в [1] и на рисунке 4. С точки зрения условий выпукло-вогнутой шестерни условие  $\rho_{1b} < 0$  не вызывает сомнения и аналогично для колеса  $\rho_{2a} < 0$ . Следовательно, нижеследующее неравенство должно подходить для радиусов кривизны ножки шестерни:

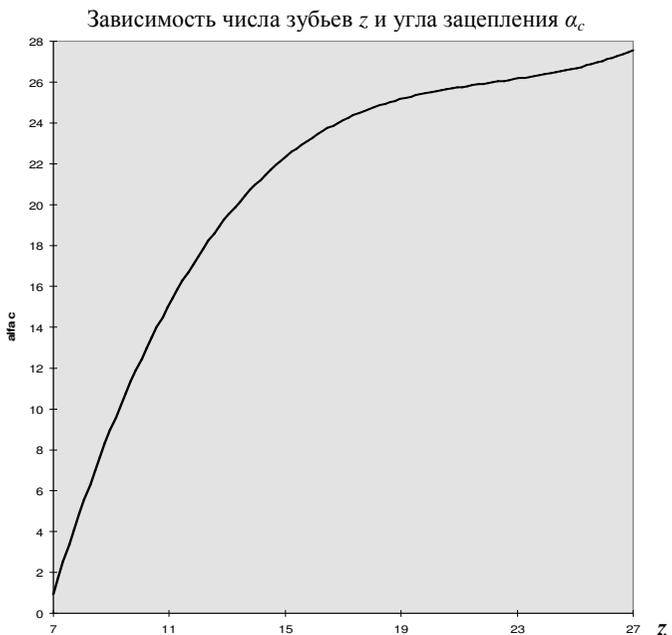


Рисунок 4 – Диаграмма для выбора радиуса кривизны линии зацепления

$$-r + \frac{2r_1 r_k \sin \alpha \cos(\alpha - \alpha_c)}{2r_k \cos(\alpha - \alpha_c) - r_1 \cos \alpha} < 0, \quad (3)$$

а последующее неравенство должно подходить для радиусов кривизны ножки колеса:

$$-r + \frac{2r_2 r_k \sin \alpha \cos(\alpha - \alpha_c)}{2r_k \cos(\alpha - \alpha_c) - r_2 \cos \alpha} < 0. \quad (4)$$

Мы подошли к выражению для взаимного влияния основных геометрических параметров выпукло-вогнутой зубчатой передачи, полученного решением неравенств (3) и (4). Оно может быть выражено следующим неравенством для ведущей шестерни при выполнении условия правильности зацепления:

$$r_k < \frac{z_1 m_n}{4} \cos \alpha_c. \quad (5)$$

Следующее неравенство также подходит для выпукло-вогнутого зуба колеса

$$r_k < \frac{z_2 m_n}{4} \cos \alpha_c. \quad (6)$$

Неравенства (5) и (6) отображают условие выпукло-вогнутого зацепления, но в границах вышеприведенных неравенств, значения упомянутых геометрических параметров могут быть взаимно изменены таким образом, что изменение условий зацепления выпукло-вогнутой передачи может быть достигнуто. Анализ влияния основных геометрических параметров выпукло-вогнутой передачи на правильность зацепления, которое приведено в [5], явно показывает, что упомянутые изменения значений результатов часто противоположно влиянию на изменения качественных характеристик выпукло-вогнутой передачи. В их выборе необходимо основываться на конкретных требованиях, которые предъявляются к определенной зубчатой передаче.

**Результаты и обсуждение.** Герц был первый, кто заинтересовался проблемой силового контакта двух упругих тел и, таким образом, образовалось определение напряжения по Герцу, которое заключается в следующем: величина напряжения есть результат влияния формы сопряженных зубьев колес, которые имеют зависимость между изменением радиуса кривизны  $\rho_r$  и указанными напряжениями Герца. Таким образом, уменьшение величины контактных напряжений может быть достигнуто посредством изменения формы зуба, когда этим достигается изменение радиуса кривизны ножки зуба в зацеплении. Однако, если мы хотим изменить форму кривой профиля зуба так, чтобы радиус кривизны увеличился, необходимо знать влияние геометрических параметров выпукло-вогнутой передачи на изменение формы зуба.

Если мы применяем условия противодействия зубчатой передачи выкрашиванию, заеданию и пластической деформации, то необходимо рассмотреть определенную взаимосвязь основных геометрических параметров в соответствии с соотношениями (5) и (6) при их выборе для выпукло-вогнутой передачи. Тогда для конкретного значения угла зацепления в полюсе  $\alpha_c = 18^\circ$  применяются взаимозависимые значения модуля  $m_n$  и числа зубьев шестерни  $Z$ , указанные в таблице 1. Кроме того, они представлены в виде пространственной диаграммы на рисунке 5.

Таблица 1 – Зависимость  $r_{kh,d}$ ,  $m$  и  $z$  при  $\alpha_c = 18^\circ$

$z$	$m$							
	1,5	2,5	3,5	5	7	10	15	20
12	4,279755	7,132924	9,986094	14,26585	19,97219	28,5317	42,79755	57,0634
13	4,636401	7,727335	10,81827	15,45467	21,63654	30,90934	46,36401	61,81868
14	4,993047	8,321745	11,65044	16,64349	23,30089	33,28698	49,93047	66,57396
15	5,349693	8,916156	12,48262	17,83231	24,96524	35,66462	53,49693	71,32924
16	5,70634	9,510566	13,31479	19,02113	26,62958	38,04226	57,0634	76,08453
17	6,062986	10,10498	14,14697	20,20995	28,29393	40,41991	60,62986	80,83981
18	6,419632	10,69939	14,97914	21,39877	29,95828	42,79755	64,19632	85,59509
19	6,776278	11,2938	15,81132	22,58759	31,62263	45,17519	67,76278	90,35038
20	7,132924	11,88821	16,64349	23,77641	33,28698	47,55283	71,32924	95,10566
21	7,489571	12,48262	17,47566	24,96524	34,95133	49,93047	74,89571	99,86094
22	7,846217	13,07703	18,30784	26,15406	36,61568	52,30811	78,46217	104,6162
23	8,202863	13,67144	19,14001	27,34288	38,28003	54,68575	82,02863	109,3715
24	8,559509	14,26585	19,97219	28,5317	39,94438	57,0634	85,59509	114,1268
25	8,916156	14,86026	20,80436	29,72052	41,60873	59,44104	89,16156	118,8821
26	9,272802	15,45467	21,63654	30,90934	43,27308	61,81868	92,72802	123,6374
27	9,629448	16,04908	22,46871	32,09816	44,93742	64,19632	96,29448	128,3926
28	9,986094	16,64349	23,30089	33,28698	46,60177	66,57396	99,86094	133,1479

alfac 18

**Выводы.** При выборе геометрических параметров выпукло-вогнутой передачи, необходимо взять за основу конкретные требования, которые применяются к той или другой передаче. Анализ различных нарушений и повреждений поверхности зуба – выкрашивания, заедания и возникновения пластической деформации показало, что одним из основных факторов, который влияет на их возникновение, можно считать размер относительных радиусов кривизны зубьев [10, 11]. Что касается спорных взаимодействий различных геометрических параметров, невозможно достичь максимальных значений относительного радиуса кривизны выпукло-вогнутых зубьев в полюсе зацепления  $C$  и одновременно в крайних точках зацепления –  $B, D$ . Таким образом, это означает, что необходимо ввести некоторые рациональные значения путем варьирования радиуса кривизны  $r_{kh}$  и угла зацепления  $\alpha_c$  в полюсе, которые были бы оптимальными с точки зрения заданной цели.

Зависимость  $z, m, r_{kh,d}$  при  $\alpha_c = 18^\circ$

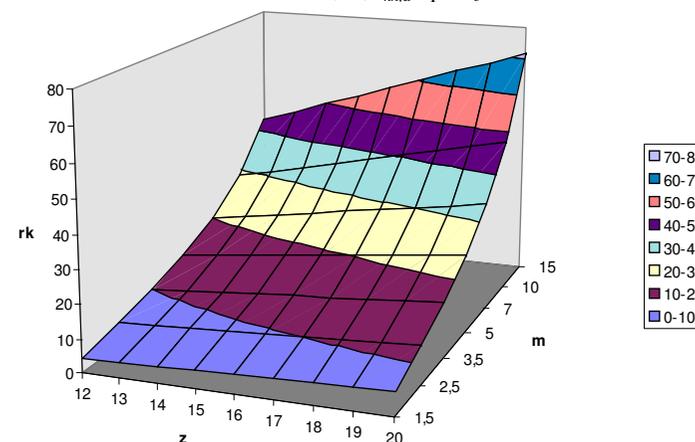


Рисунок 5 – Зависимость модуля, числа зубьев шестерни, кривизны линии зацепления для данного угла зацепления в полюсе

Если исходить из происхождения выкрашивания, заедания и пластической деформации, то необходимо рассмотреть определенную взаимосвязь основных геометрических параметров в соответствии с соотношениями (5) и (6) при их выборе для выпукло-вогнутой передачи. В таблице 1 [5] даны взаимосвязанные значения модуля  $m_n$ , числа зубьев шестерни  $Z$  для угла зацепления  $\alpha_c = 18^\circ$ . Кроме того, они показаны на пространственной диаграмме на рисунке 5. Таким же образом можно разработать аналогичные диаграммы для различных вариантов угла зацепления  $\alpha_c$  в полюсе. Основанный на подробном анализе влияния различных геометрических параметров выпукло-вогнутой зубчатой передачи по качественным показателям, этот метод больше всего подходит для выбора максимально возможного угла зацепления  $\alpha_c$  в полюсе и максимально возможного радиуса кривизны  $r_k$ .

Максимально возможные значения угла зацепления  $\alpha_c$  в полюсе позволяют достичь максимальных значений относительных радиусов кривизны в полюсе и в близких к нему областях, а максимально возможная величина радиуса кривизны линии зацепления  $r_{kh,d}$  позволяют сделать выпукло-вогнутую передачу работоспособной – то есть обеспечить коэффициент перекрытия  $\varepsilon_a \geq 1,1$ .

Графическая и расчетная модели, указанные в [1, 12, 13], были использованы для моделирования задачи контакта выпукло-вогнутой передачи. Задача моделирования контакта была решена при помощи системы ANSYS. Аналогичная модель была использована для решения задач контакта эвольвентного зацепления.

Результаты решения показывают, что в случае, когда форма зуба выпукло-вогнутой передачи была разработана из условия максимальных величин радиуса кривизны в полюсе зацепления, контактные напряжения в точках *B, D* существенно ниже – минимум на 25% (см. таблицу 2) по сравнению с эвольвентным зубом [3]. В случае моделирования зуба выпукло-вогнутой формы с целью достижения максимальных значений приведенных радиусов кривизны в точках *B, D*, значения контактных напряжений по сравнению с эвольвентным зацеплением еще ниже. Т.е. за счет выбора основных геометрических параметров выпукло-вогнутой передачи мы можем достичь в зацеплении существенно более низких значений контактных напряжений по сравнению с эвольвентной передачей без кардинального ухудшения других параметров зацепления.

Таблица 2 – Величины контактных напряжений в выпукло-вогнутом и эвольвентном зацеплениях

Зацепление	$\sigma_{1D}$ [МПа]	$\sigma_{2D}$ [МПа]	$\sigma_E$ [МПа]
КК1	-404,17	28,55	779,78
Е1	20,26	64,219	1138
КК2	-312,8	15,33	529,8
Е2	9,112	29,277	778,8
КК3	-162,97	13,29	670,6
Е3	9,12	26,872	902,1
КК4	-583,43	27,84	736,9
Е4	26,19	37,181	1023
КК5	-126,05	9,05	883,4
Е5	5,36	13,373	1289

Работа была выполнена в рамках решения проектов гранта VEGA 1/0189/09.

КК – выпукло-вогнутое зацепление, Е – эвольвентное зацепление,  $\sigma$  – величины контактных напряжений в точках *D, E* на линии зацепления выпукло-вогнутой и эвольвентной передач

**Список литературы:** 1. *Bošanský, M.* (1997): Vol'ba geometrických parametrov konvexno-konkávneho ozubenia z hľadiska povrchového poškodenia boku zuba. Habilitačná práca, 104s, SjF STU, Bratislava. 2. *Bošanský, M., Vereš, M.* (1998): Určenie hraničných hodnôt geometrických parametrov konvexno-konkávneho ozubenia. In.: Zborník referátov Strojné Inžinierstvo 98, Bratislava, s.241-248. 3. *Bošanský, M., Orokocký, R., Vereš, M., Kožuch, I., Nemčeková, M.* (2005): Porovnanie únosnosti K-K a evolventného ozubenia na zadieranie v interakcii s ekologickým olejom, In.: Sborník mezinárodní konference kateder časti a mechanizmu stroju, Sedmihorky, ČR, ISBN 80-7083-951-1 s.23-26. 4. *Vereš M., Bošanský M.* (1999): Teória čelného rovinného ozubenia, Vydavateľstvo STU Bratislava, ISBN 80-227-1226-4, 112s. 5. *Vereš, M., Bošanský, M., Gaduš, J.* (2006): Theory of Convex-concave and plane cylindrical gearing, Slovak university of technology in Bratislava, 180p, ISBN 80-227-2451-3. 6. *Hlebanja, J.* (1991): Influence of the path of contact shape on sliding condition between tooth flanks, Proceedings of MPT 1991, Hiroshima. 7. *Litvin, F., Fuentes, A.* (2004): Gear Geometry and Applied Theory, Second Edition, ISBN 0 521 81517 7 hardback Cambridge University press. 8. *Павлов А.И.* Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с. 9. *Vereš M.* (1987): Odolnosť ozubenia voči zadieraniu z hľadiska jeho tvaru. Kandidátska dizertačná práca, 147s, SjF SVŠT Bratislava. 10. *Kadnár, M. et al.* (2011) The design and verification of experimental machine for real journal bearings testing. In Technical Gazette. Slavonki Brod: Faculty of Mechanical Engineering in Slavonki Brod. 2011, 18(1), s.95-98. ISSN 1330-3651. 11. *Rusnák, J., Kadnár, M.* (2007): Optimalizácia kĺbového spojenia nosného rámu stavebného stroja Dumper Trag 30. In Výrobné inžinierstvo. – Košice, 2007. ISSN 1335-7972, 2008, roč.VII., č.1, s.49-50,60. 12. *Tokoly, P., Bošanský, M., Gajdoš, M.*: Príspevok k pevnostnej analýze neevolventného typu ozubenia, Acta Mechanica Slovaca, Košice 3-C/2008, ročník 12, s.405-412, ISSN 1335-2393. 13. *Tokoly, P., Bošanský, M., Medzihradský, J.* (2007): Posúdenie vhodnosti použitia softvéru v pevnostnej analýze ozubených kolies metódou MKP, Acta Mechanica Slovaca, Košice, ISSN 1335-2393.

Поступила в редколлегию 10.05.11