

то

$$H_0 = \frac{R}{2} \quad (14)$$

и

$$\sigma_m = \frac{a^2 E}{R^2}, \quad (15)$$

а

$$\sigma_{cp} = \frac{2}{3} \sigma_m. \quad (16)$$

На основании приведенных выше формул

$$P^2 = \frac{16 b^2 R^2 \sigma_m^3}{9 E}, \quad (17)$$

откуда

$$\sigma_m = 0,8363 \sqrt{\frac{P^2 E}{b^2 R^2}}. \quad (18)$$

Отличие формул (12) и (18) состоит в различии коэффициентов 0,841 и 0,836, что составляет менее 0,1%. Путем сравнения напряжений для заданных параметров передачи можно установить целесообразность применения того или иного вида зацепления.

Выводы:

1. Определение контактных напряжений по приведенным формулам соотношением радиусов кривизны контактирующих поверхностей не ограничено.

2. Полученные формулы требуют экспериментальной проверки.

Список литературы: 1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 2. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с. 3. Павлов А.И., Вербицкий В.И. Геометрическое моделирование зоны контакта при взаимодействии двух упругих цилиндров // Зб. "Геометричне та комп'ютерне моделювання". – Харків: Харк. держ. акад. техн. та орган. харч, 2006. – Вип.15. – С.95-99.

Поступила в редколлегию 03.05.12

УДК 629.12:534.836

А.П. ПОПОВ, д.т.н., проф., зав. каф. МКМ НУК им. адм. Макарова, Николаев;
Ю.Н. КИПРЕЕВ, к.т.н., профессор каф. МКМ НУК

ВИБРАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

Выполнен сравнительный анализ уровней вибрационной активности движущегося контакта пар зубьев нормального прямозубого зацепления с модификациями "глубокого" профиля и зацепления колес с двумя и более смещенными венцами. Показано, что более эффективными возможностями для снижения уровней вибрации обладают передачи с зацеплениями колес со смещенными относительно друг друга венцами.

Виконано порівняльний аналіз рівнів вібраційної активності контакту пар зубів, що рухаються, нормального прямого зубого зачеплення з модифікаціями "глибокого" профілю і зачеплення коліс із двома та більше зміщеними вінцями. Показано, що більше ефективними можливостями для зниження рівнів вібрації володіють передачі із зачепленнями коліс зі зміщеними відносно один одного вінцями.

Comparative analysis of level vibration activity of the moving contact of teeth pairs of the normal spur tooth system with modification of "deep" profile with two and more displaced too thing has been carried out. It has been shown that effective possibilities for covering vibration levels have gearings with tooth system of gears with displaced relatively each other too thing.

Актуальность задачи. Зубчатые передачи в составе любого машинного агрегата являются одним из основных источников вибрации и шума [1,2]. Одной из причин, приводящих к повышенной вибрации, является периодически сменяющийся контакт пар зубьев под действием переменной нагрузки. Понижение этой составляющей вибрации всегда находится в зоне пристального внимания разработчиков зубчатых механизмов.

Анализ последних исследований и публикаций. Наиболее подробными являются исследования по определению структурных частот, влиянию зазоров, кинематических неточностей, статических деформаций зубьев на уровень вибрации шума [2], технологических ошибок шума [1] и др. Как правило, результатами этих исследований являются качественные оценки влияния различных факторов и разработанные на их основе соответствующие рекомендации. За исключением работ [1-4], в настоящее время отсутствуют исследования по количественной оценке влияния конструктивных особенностей на параметры структурной вибрации и шума. Существующие методики исследований [1] оказались довольно громоздкими и непригодными для оценки их вибрации. С этой целью выполнено сравнение [3] вибрационных характеристик обычного зацепления нормальных прямозубых колес с характеристиками упомянутых модификаций.

Цель работы – исследование вибрационных характеристик модифицированных зубчатых зацеплений.

Изложение основного материала. Стремление к усовершенствованию зубчатых передач привело к появлению конструкций зацепления колес с увеличенной головкой зуба (так называемый "глубокий" профиль, [5]), зацеплений сборных колес со смещенными друг относительно друга зубчатыми венцами, например, [6, 7] и др. Эти перспективные конструкции позволяют улучшить работоспособность и несущую способность зацепления. Применение их может снизить уровень вибрации и шума, но для оценки этого эффекта они нуждаются в более пристальном изучении.

При контакте одной пары зубьев вся нагрузка P передается через этот контакт, при двух парном контакте – нагрузка распределяется между двумя парами. Упругая деформация состоит из суммы деформаций контакта и изгиба зубьев. С учетом ряда допущений, принятых авторами [3] общая упругая деформация будет величиной, линейно зависящей от нагрузки,

$$\delta(t) = P(t)/C_{\delta}, \quad (1)$$

где C_δ – приведенный коэффициент жесткости в зацеплении; $P(t)$ – приведенная переменная нагрузка на контакт.

Скачкообразный переход от контакта одной пары зубьев к двухпарному контакту носит ударный характер. Нагрузка в зацеплении распределяется в зависимости от количества находящихся в контакте пар зубьев. В контакте одной пары зубьев в зоне контакта действует вся нагрузка, а при контакте двух пар ее приближенно будем считать распределенной поровну между обеими парами зубьев, $P_2 = 0,5P$ (рисунок 1,а), где P – максимальная суммарная нагрузка при контакте одной пары зубьев.

Среднее значение нагрузки зависит от коэффициента перекрытия, представляющего собой сумму двух составляющих $\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_\beta$, в которой ε_a – коэффициент торцевого перекрытия; ε_β – коэффициент перекрытия, определяемый углом наклона зубьев β в косозубых передачах.

Для прямозубого зацепления коэффициент перекрытия $\varepsilon = \varepsilon_a$ определяется известной зависимостью $\varepsilon_a = \frac{\cup cc'}{p}$, в которой $\cup cc'$ – длина дуги зацепления; $p = \pi m$ – шаг зацепления по делительной окружности, m – модуль зацепления. Выразим коэффициент перекрытия через отношение периодов $\varepsilon_a = \frac{\cup cc'/V}{p/V} = \frac{T_1}{T}$. Здесь время T_1 представляет собой промежуток между входом и выходом из контакта одной пары зубьев, а период $T = p/V$ – среднее время контакта одной пары зубьев в течение одного оборота вала. Из приведенных зависимостей следует, что $T_1 = \varepsilon_a T$, где $T = 2\pi/z\omega$; z – число зубьев, ω – угловая частота вращения вала.

Торцевой коэффициент перекрытия ε_a рассчитывается по зависимости для прямозубого зацепления

$$\varepsilon_a = \frac{z_1 \sqrt{\sin^2 \alpha + 4 \frac{h_a^*}{z_1} + 4 \left(\frac{h_a^*}{z_1} \right)^2} + \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha + 4u \left(\frac{h_a^*}{z_1} \right) + 4 \left(\frac{h_a^*}{z_1} \right)^2} - (u+1) \sin \alpha}{2\pi \cos \alpha},$$

где $h_a^* = h_a/m$ – относительная высота головки зуба; $u = z_2/z_1$ – передаточное число.

Согласно рисунку 1,а определим время одновременного контакта двух пар зубьев

$$t_2 = T_1 - T = (\varepsilon_a - 1)T. \quad (2)$$

Период следования зубьев определяется как сумма двух составляющих

$$T = t_1 + t_2. \quad (3)$$

Таким образом, из зависимости (3) ясно, что продолжительность контакта одной пары составляет

$$t_1 = T - t_2 = T - (\varepsilon_a - 1)T = (2 - \varepsilon_a)T. \quad (4)$$

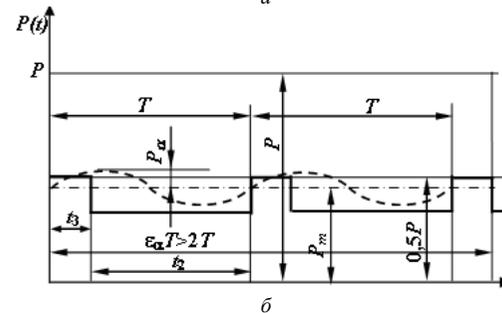
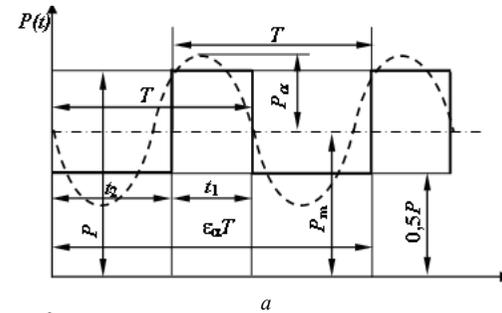


Рисунок 1 – Характер изменения нагрузки при коэффициентах перекрытия $\varepsilon_\alpha < 2$ (а) и $\varepsilon_\alpha \geq 2$ (б)

Амплитуда гармонической составляющей в зависимости (6) находится из условия равенства кинетических энергий. Это условие соответствует равенству площадей прямоугольного и синусоидального импульсов. Площадь прямоугольного импульса определим с помощью рисунка 1,а в виде зависимости $S = (P - P_m)t_1 + (P_m - 0,5P)t_2$. Учитывая все вышеприведенные соотношения между нагрузками и величинами времени (2), (3) и (6), получим следующее значение площади

$$S = PT(3\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 2). \quad (7)$$

Площадь под кривой синусоидального импульса определяется интегрированием гармонической составляющей в формуле (6)

$$S = 2 \int_0^{0,5T} P_a \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2P_a T}{\pi}. \quad (8)$$

Приравнивая правые части обоих выражений (7) и (8), находим значение амплитуды гармонической составляющей

$$P_a = 0,5\pi(3\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 2)P = P \cdot p_\varepsilon, \quad (9)$$

где $p_\varepsilon = 0,5\pi p_a$; $p_a = (3\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 2)$.

Зависимости (5) и (9) определяют характеристики колебательного процесса при коэффициентах перекрытия не больше двух, $\varepsilon_\alpha < 2$. Контакт зубьев

Средняя нагрузка P_m определяется из условия равенства мгновенных мощностей, составленного с учетом распределения нагрузки (рисунок 1,а), $P_m T = 0,5P t_2 + P t_1 = 0,5PT(3 - \varepsilon_a)$.

Из равенства следует, что

$$P_m = 0,5P(3 - \varepsilon_a). \quad (5)$$

В работе [3] показано, что с учетом динамических составляющих нагрузочная характеристика имеет не ступенчатый вид (рисунок 1,а), а плавную периодическую зависимость. В приближенном расчете ступенчатую зависимость (рисунок 1,а) заменим гармонической функцией [4]

$$P(t) = P_m + P_a \sin \omega t = P_m + P_a \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (6)$$

"глубокого" профиля [5] приводит к величинам коэффициента перекрытия больше двух, $\varepsilon_a \geq 2$. Необходимо определить соответствующие зависимости и для этого варианта (рисунок 1,б). Для этого варианта зацепления в зоне контакта могут находиться две или три пары зубьев. Составляющие периода следования для этого варианта имеют значения, соответственно, t_3 и t_2 . Контакт трех зубьев проходит за время (рисунок 1,б) $t_3 = \varepsilon_a T - 2T = T(\varepsilon_a - 2)$, двух пар – за время $t_2 = T - t_3 = T(3 - \varepsilon_a)$. Значение средней нагрузки в этом варианте зацепления находится из равенства (рисунок 1,б)

$$P_m T = \frac{P}{3} t_3 + \frac{P}{2} t_2 = PT \frac{(5 - \varepsilon_a)}{6}.$$

Из равенства следует, что

$$P_m = P \frac{(5 - \varepsilon_a)}{6}. \quad (10)$$

Для прямоугольного импульса находим

$$S = \left(P_m - \frac{P}{3} \right) t_3 + \left(\frac{P}{2} - P_m \right) t_2 = \frac{PT}{3} (5\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 6). \quad (11)$$

Приравнивая правые части зависимостей (8) и (11), находим

$$P_a = P \frac{\pi}{6} (5\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 6) = P \cdot p_d, \quad (12)$$

где $p_d = (5\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 6)$ – относительная амплитуда гармонической нагрузки для "глубокого" профиля.

Нетрудно убедиться в том, что при величине коэффициента перекрытия, равном двум, зависимости (9) и (12) приводят к одинаковому результату: $P_a = 0$.

При линейной зависимости между нагрузкой и деформацией (1) зависимость изменения упругого перемещения также представляется в виде гармонической функции

$$\delta = \delta_m + \delta_a \sin z\omega t, \quad (13)$$

в которой δ_m – среднее значение упругой деформации; δ_a – амплитудное значение.

Среднее значение упругой деформации δ_m согласно принятым упрощениям модели контакта пропорционально средней нагрузке P_m в контакте, амплитуда гармонической составляющей δ_a – пропорциональна амплитуде силы P_a .

Колебательная скорость получается дифференцированием функции упругого деформирования (13)

$$\dot{\delta} = \delta_a z \omega \cos z\omega t = \left(\frac{P_a}{C_\delta} \right) z \omega \cos z\omega t = V_{\max} \cos z\omega t. \quad (14)$$

Уровень вибрации определяется зависимостью

$$L = 201g \frac{\dot{\delta}_{\max}}{V_0}, \quad (15)$$

где $\dot{\delta}_{\max} = \delta_a z_1 \omega_1$ – максимальное значение скорости колебаний в контакте зубьев; V_0 – нулевой порог колебательной скорости, $V_0 = p_0 / \rho c$; p_0 – звуковой порог слышимости, $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па; ρ – плотность среды; c – скорость распространения звука в среде.

С учетом примечаний зависимость (15) принимает вид

$$L = 20 \left[\lg(\delta_a z_1 \omega_1) - \lg V_0 \right]. \quad (16)$$

Как следует из анализа зависимости (16), уровень вибрации для рассматриваемого источника колебаний, зависит от числа зубьев z , скорости вращения ω , амплитуды упругих колебаний δ_a , или пропорциональной ей величине амплитуды силовой гармонической составляющей P_a . Два первых фактора определяются заданными рабочими условиями и не изменяются. Повлиять на амплитуду колебаний δ_a или силовую амплитуду P_a можно конструктивными способами. Укажем на два из них.

Первым из таких способов является применение "глубокого" профиля. Такой профиль при нарезании зубьев [2] образуется с помощью отрицательного смещения производящей рейки. Фирма "Мааг" стандартизовала этот зубчатый профиль и применила его для всех приводных зубчатых колес [5]. Для этого профиля принят угол зацепления $\alpha = 17,5^\circ$ и высота зуба $h = 2,8125m$, где m – модуль зацепления. Сравнивая между собой уровни вибрации нормального и зацепления фирмы "Мааг" определим, согласно зависимостям (13) и (16) величину снижения уровня вибрации

$$\Delta L = 201g \frac{\delta_a}{\delta_d} = 201g \frac{P_a}{P_d}, \quad (17)$$

где δ_d – амплитуда периодического колебания в зацеплении "глубоких" профилей.

Отношение амплитуд колебаний, согласно зависимости (1), можно выразить при помощи отношений силовых амплитуд и коэффициентов жесткости $\delta_a / \delta_d = (P_a / P_d)(C_a / C_d)$, где P_d и C_d – значения, соответственно, силовой амплитуды и коэффициента жесткости в зацеплении "глубоких" профилей. Отношение коэффициентов жесткости приближенно представим обратно пропорциональным кубу отношений высот зубьев $C_d / C_a \approx (h_a / h_d)^3$. Для "глубокого" профиля фирмы "Мааг" высота зуба h_d в 1,25 раза превышает высоту зуба нормального зацепления, поэтому $(h_a / h_d)^3 = (2,25 / 2,8125)^3 \approx 0,512$. Используя зависимости (9) и (12), находим значение отношения амплитудных составляющих

$$\frac{\delta_a}{\delta_d} = \frac{P_a}{P_d} = \left(\frac{h_a}{h_d} \right)^3 \frac{3(3\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 2)}{5\varepsilon_d - \varepsilon_d^2 - 6}. \quad (18)$$

Индексом "d" в формуле (18) и таблице 1 помечены параметры "глубокого" профиля.

Выполним сравнение уровней вибрации нормального прямозубого зацепления колес "глубокого" профиля (таблица 1) в широко распространенном диапазоне передаточных чисел $u = 1,6 \dots 4,0$.

Как следует из полученных результатов, с помощью "глубокого" профиля достигается снижение уровня вибрации. Однако следует заметить, что эти передачи имеют габариты, значительно превышающие габариты прямозубого зацепления. Минимальное число зубьев z_{\min} , как известно, зависит от угла зацепления и коэффициента высоты головки зуба $\bar{h}_a^* = h_a/m$: $z_{\min} > 2\bar{h}_a^*/\sin^2 \alpha$. Для прямозубого зацепления нормальных колес $\bar{h}_a^* = 1$, $\alpha = 20^\circ$, следовательно $z_{\min} > 17,1$. Для зацепления колес "глубокого" профиля с параметрами $\bar{h}_a^* = 1,25$ и $\alpha = 17,5^\circ$ получим $z_{\min} > 27,6$. Следовательно, при одинаковом передаточном отношении и модуле зацепления габариты такой передачи примерно на 55% будут больше нормального зацепления прямозубых колес.

Таблица 1 – Сравнение уровней вибрации нормального прямозубого зацепления и зацепления колес с зубьями "глубокого" профиля

Передаточное отношение при $z_1=28$														
z_2	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100	105	110	115
u	1,61	1,77	1,96	2,14	2,32	2,5	2,68	2,86	3,04	3,21	3,39	3,57	3,75	3,93
Нормальное прямозубое зацепление														
ϵ_a	1,69	1,70	1,70	1,71	1,72	1,72	1,73	1,73	1,74	1,74	1,74	1,745	1,749	1,750
p_ϵ	0,11	0,11	0,104	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,09	0,09
"Глубокое" зацепление														
ϵ_d	2,2	2,2	2,22	2,24	2,25	2,26	2,27	2,28	2,28	2,29	2,30	2,30	2,31	2,31
$p_{\epsilon d}$	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
ΔL	6,5	5,84	5,3	4,8	4,4	4,1	3,8	3,5	3,3	3,1	3,0	2,8	2,6	2,5

Вторым из указанных способов является предложенная А.П. Поповым замена обычных зубчатых колес колесами с двумя [6] и более венцами [7], у которых каждый из венцов смещен относительно предыдущего.

В результате смещения венцов относительно друг друга, контакты пар зубьев каждой пары венцов происходят также со смещением. Происходит изменение величины коэффициента перекрытия. Нагрузка на каждую, находящуюся в контакте, пару зубьев уменьшается. Общая ширина венцов в подобном колесе равна длине зуба. Таким образом, погонная нагрузка на зуб не изменяется. Выполним сравнительный анализ зацепления колес с двумя смещенными венцами и нормального зацепления прямозубых колес.

Представим развертку делительных цилиндров обеих половинок зубчатого колеса, с обозначением зон контакта смещенных зубьев (рисунок 2, а). Одну половину колеса будем обозначать как *верхнюю*, вторую – назовем *нижней* половиной. Отставание зубьев нижней половины от верхней по длине дуги зацепления составляет величину Δs . Представим это смещение, как долю шага $\Delta s = \bar{s}p$. Величина относительного смещения \bar{s} может изменять-

ся в диапазоне $0 < \bar{s} < 1,0$. Диапазон значений относительного смещения разделяется на три варианта распределения фаз контакта зубьев в пределах поля зацепления: I. $0 < \bar{s} \leq (2 - \epsilon_a)$; II. $(2 - \epsilon_a) < \bar{s} \leq (\epsilon_a - 1)$; III. $(\epsilon_a - 1) < \bar{s} \leq 1$.

Представленный на графике (рисунок 2, б) *первый* вариант распределения фаз контакта возможен в диапазоне $0 < \bar{s} \leq (2 - \epsilon_a)$.

Разделим часть дуги зацепления $\cup c c'$, равной шагу ($\cup c c_{IV} = p$), на участки, или фазы контакта, в зависимости от количества пар зубьев, находящихся в контакте.

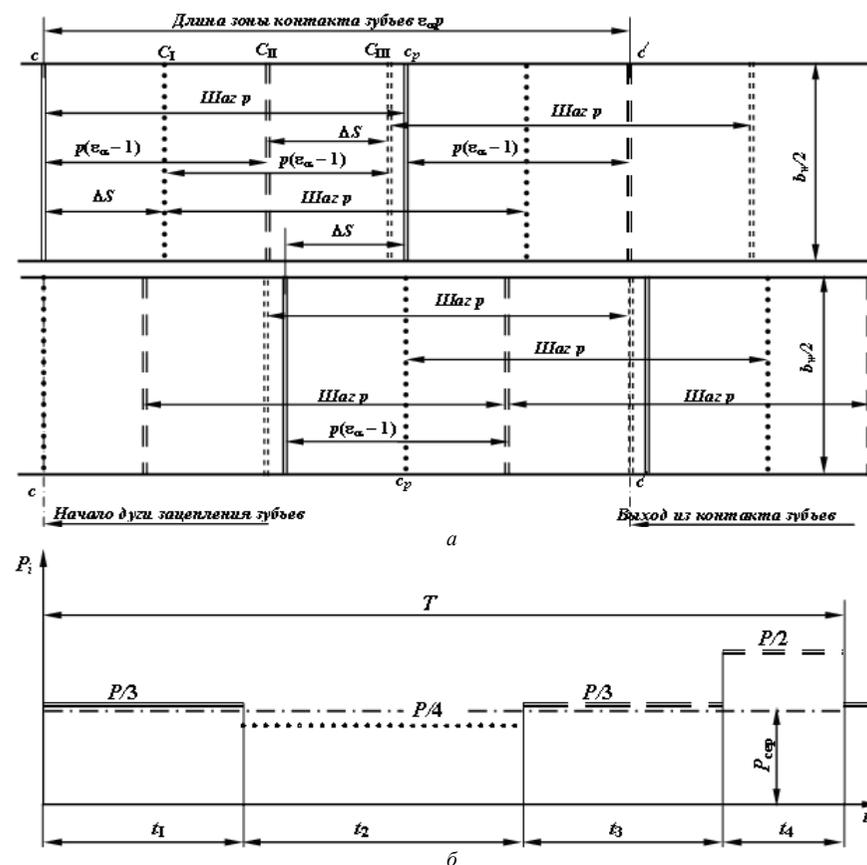


Рисунок 2 – Круговая развертка зон контакта (а) и график изменения нагрузок (б) зубьев при зацеплении колес с двумя смещенными венцами в первом варианте распределения фаз контакта

Фаза 1 охватывает участок $\cup c c_{I}$ – в контакте находятся две пары верхней половины зубьев и одна – нижней (эти контакты на рисунке 2, а выделены двойной линией). Длина этого участка дуги зацепления равна Δs . Он завершается в момент входа в контакт еще одной пары зубьев нижней половины. Таким

образом, в этой фазе контакта на одну пару зубьев приходится треть общей нагрузки. Время этого режима контакта равно $t_1 = \Delta S/V = \bar{s}p/V$. Учитывая, что период следования зубьев $T = p/V$, представим эту зависимость в виде произведения $t_1 = t_1 T$, в котором $t_1 = \bar{s}$ – относительная продолжительность фазы.

Фаза 2 охватывает участок $\cup C_1 C_{II}$ – в контакте находятся две пары верхней половины зубьев и две – нижней (эти контакты выделены точечной линией). Таким образом, на одну пару зубьев приходится четверть общей нагрузки. Завершение этого режима соответствует выходу из контакта передней пары зубьев верхней половины. Путь, пройденный зубьями, равен $S = p(\varepsilon_a - 1) - \Delta S$. Время совершения контакта равно $t_2 = S/V$. После подстановки получим $t_2 = [p(\varepsilon_a - 1) - \Delta S]/V = (\varepsilon_a - 1 - \bar{s})p/V$. Выразим этот интервал с помощью относительной составляющей $t_2 = t_2 T$, где $t_2 = \varepsilon_a - 1 - \bar{s}$.

Фаза 3 охватывает участок $\cup C_{II} C_{III}$ – в контакте находятся одна пара верхней половины зубьев и две – нижней (эти контакты выделены сдвоенной пунктирной линией). Завершение этого режима соответствует выходу из контакта передней пары зубьев нижней половины. Длина этого участка дуги зацепления равна ΔS . Таким образом, на пару зубьев приходится треть общей нагрузки. Время фазы контакта равно $t_3 = \Delta S/V = \bar{s}p/V = t_3 T$, где $t_3 = t_1 = \bar{s}$.

Фаза 4 охватывает участок $\cup C_{III} c_p$, в контакте находятся одна пара верхней половины зубьев и одна – нижней (эти контакты выделены сдвоенной укороченной пунктирной линией). Начало этого режима соответствует входу в контакт передней пары зубьев нижней половины. Длина этого участка дуги зацепления равна $S = p - p(\varepsilon_a - 1) - \Delta S = p(2 - \varepsilon_a - \bar{s})$. Таким образом, на одну пару зубьев приходится половина общей нагрузки. Время выполнения этого режима контакта равно $t_4 = S/V = t_4 T$, где $t_4 = 2 - \varepsilon_a - \bar{s}$. График нагрузок в фазах контакта представлен на рисунке 2, б. Для проверки правильности вывода зависимостей варианта сложим все интервалы: $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = (\bar{s} + \varepsilon_a - 1 - \bar{s} + \bar{s} + 2 - \varepsilon_a - \bar{s})T = T$. Результат сложения подтверждает правильность определения интервалов в этом варианте распределения фаз.

Коэффициент перекрытия определяет среднее число пар зубьев, одновременно находящихся в зацеплении. Для его расчета следует учесть доленое распределение контактов пар по фазам соответствующих вариантов. Для первого варианта этот коэффициент находится из зависимости: $\varepsilon_{a2} = 3t_1 + 4t_2 + 3t_3 + 2t_4$. С учетом относительных интервалов получим следующую формулу $\varepsilon_{a2} = 3\bar{s} + 4(\varepsilon_a - 1 - \bar{s}) + 3\bar{s} + 2(2 - \varepsilon_a - \bar{s}) = 2\varepsilon_a$. Из нее следует, что величина коэффициента перекрытия для контактов разделенных пар половинок зубьев не зависит от величины их смещения.

Средняя нагрузка P_m , по аналогии с выводом зависимости (5), определяется из условия равенства мгновенных мощностей, составленного с учетом распределения нагрузки (рисунок 2, б),

$$P_m T = \frac{P}{3}t_1 + \frac{P}{4}t_2 + \frac{P}{3}t_3 + \frac{P}{2}t_4. \quad (19)$$

Подставим в равенство (19) значения интервалов для первого варианта и преобразуем его $P_m T = \frac{P}{12}(8t_1 + 3t_2 + 6t_4) = \frac{P}{12}(9 - 3\varepsilon_a - \bar{s})$. После преобразования определяется значение средней нагрузки в первом варианте

$$P_{mI} = \frac{P}{12}(9 - 3\varepsilon_a - \bar{s}). \quad (20)$$

На передней границе этого интервала $\bar{s} = 0$, по формуле (20) получим $P_{mI} = 0,25P(3 - \varepsilon_a) = 0,5P_m$. Это означает совпадение с результатами расчета по формуле (5) для нормального прямозубого зацепления цельных колес, чем косвенно подтверждается правильность вывода зависимости (20).

Кроме этого варианта возможны и другие, в зависимости от величины относительного смещения s .

Во втором варианте при выполнении условия $(2 - \varepsilon_a) < \bar{s} < (\varepsilon_a - 1)$ после преобразований находится значение средней нагрузки *второго* варианта

$$P_{mII} = \frac{P}{12}(7 - 5\varepsilon_a). \quad (21)$$

На границе, разделяющей первый и второй варианты, при величине относительного смещения $\bar{s} = (2 - \varepsilon_a)$ значения средней нагрузки, рассчитанной по формулам (20) и (21), совпадают, чем подтверждается правильность преобразований.

Исследуя третий вариант смещения фаз контакта, после подстановок и преобразований находим

$$P_{mIII} = \frac{P}{12}(8 - 3\varepsilon_a + \bar{s}). \quad (22)$$

При величине смещения $\bar{s} = \varepsilon_a - 1$ результаты расчетов средней нагрузки по расчетам зависимостей (21) и (22) совпадают. Величина смещения $s = 1$ соответствует совпадению зубьев верхней и нижней половин (смещение отсутствует). Фактически это будет зацепление обычных зубьев, разделенных пополам. Из формулы (22) следует, что $P_{mIII} = 0,25P(3 - \varepsilon_a) = 0,5P_m$. Таким образом, это значение совпадает с половиной средней нагрузки, приходящейся на один зуб в прямозубом нормальном зацеплении.

Амплитуда гармонической составляющей в зависимости (6) находится из условия равенства площадей прямоугольного и синусоидального импульсов. Площадь прямоугольного импульса определим по зависимости

$$S = \sum_1^4 |P_i - P_m| t_i = PT \sum_1^4 |\bar{p}_i - \bar{p}_m| \bar{t}_i, \quad (23)$$

где $\bar{p}_i = p_i/P$ и $\bar{t}_i = t_i/T$, соответственно, относительные нагрузки, и интер-

валы (рисунок 2,б); $\bar{p}_m = p_m/P$.

Площадь под кривой синусоидального импульса определяется по формуле (8). Из равенства правых частей зависимостей (8) и (23) находим

$$P_a = 0,5\pi P \sum_1^4 |\bar{p}_i - \bar{p}_m| \bar{f}_i. \quad (24)$$

Зависимость (24) является общей для всех рассматриваемых вариантов контакта. При ее использовании для конкретного варианта необходима подстановка соответствующих этому варианту составляющих. Анализ расчетных зависимостей показывает, что наиболее эффективным диапазоном значений смещения является *второй* вариант, в котором отсутствует фаза с контактом только двух пар зубьев. Средняя нагрузка в этом варианте не зависит от смещения половинок зуба.

Представим зависимость (24) по аналогии с формулой (9) в виде произведения $P_a = 0,5\pi P p_{a2}$, в котором относительный параметр p_{a2} определяется по зависимости $p_{a2} = \sum_1^4 |\bar{p}_i - \bar{p}_m| \bar{f}_i$. Для второго варианта этот параметр будет определяться по формуле

$$p_{a2} = (p_{mII} - 0,25)(\bar{f}_1 + \bar{f}_3) + \left(\frac{1}{3} - p_{mII}\right)(\bar{f}_2 + \bar{f}_4). \quad (25)$$

После подстановки всех составляющих в зависимость (25), получим

$$p_{a2} = (\varepsilon_a/3)(7 - 2\varepsilon_a) - 2. \quad (26)$$

Выполняя сравнение уровней вибрации второго варианта зацепления с нормальным, необходимо учесть, что приведенный коэффициент жесткости в формуле (1) для половины зуба будет в два раза меньше, чем в зацеплении обычных колес. Поэтому, с учетом отмеченной особенности, используем зависимости (9) и (26) для определения отношения амплитудных составляющих

$$\delta_a/\delta_{a2} = p_a/2p_{a2} = (4,5\varepsilon_a - 1,5\varepsilon_a^2 - 3)/(7\varepsilon_a - 2\varepsilon_a^2 - 6). \quad (27)$$

Выполним сравнение уровней вибрации нормального прямозубого зацепления колес с зацеплением колес с двумя венцами (таблица 2).

Разделение зубчатого венца более чем на два смещенных венца приводит к иной, чем формула (27), зависимости, однако не меняет общего вывода об эффективности таких зацеплений.

Таблица 2 – Снижение уровней вибрации в зацеплении колес с двумя венцами

Передаточное отношение при $z_1=28$												
u	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,5	2,8	3,0	3,2	3,5	3,8	4,0
ε_a	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8
δ_a/δ_{a2}	2,8	2,6	2,57	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2
ΔL	8,8	8,5	8,2	8,0	7,8	7,7	7,5	7,4	7,3	7,2	7,1	7,0

В зацеплениях колес с несколькими венцами смещение венцов по дуге зацепления рекомендуется выбирать равной приходящейся на венец части шага, $s = p/i$, где i – количество венцов. В относительных величинах это соотношение равно $\bar{s} = 1/i$. При использовании для зацеплений колес с несколькими венцами зубьев "глубокого" профиля можно за счет профиля дополнительно снизить уровень вибрации. Величина этого снижения для зацеплений колес с двумя венцами рассчитывается по зависимости

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2. \quad (28)$$

В (28) величина ΔL_1 учитывает снижение вибрации за счет применения "глубокого" профиля и рассчитывается по аналогии с зависимостью (18)

$$\Delta L_1 = 20 \lg(\delta_a/\delta_d) = 20 \lg(p_a/p_d), \quad (29)$$

где $\delta_a/\delta_d = p_a/p_d = (h/h_d) \cdot (9\varepsilon_a - 3\varepsilon_a^2 - 6)/(5\varepsilon_d - \varepsilon_d^2 - 6)$.

Величина ΔL_2 определяет снижение вибрации за счет использования зацепления колес с двумя венцами "глубокого" профиля по сравнению с одновенечным зацеплением "глубокого" профиля

$$\Delta L_2 = 20 \lg(\delta_d/\delta_{d2}) = 20 \lg(p_d/p_{d2}). \quad (30)$$

Приведем окончательное выражение для расчета отношений амплитуд в формуле (30) без громоздких преобразований, использованных при его выводе

$$\delta_d/\delta_{d2} = p_d/2p_{d2} = (5/6)(3 - \varepsilon_d)/(5 - \varepsilon_d). \quad (31)$$

Результаты сравнительного расчета по зависимостям (28...31) представлены в таблице 2.

Для определения зависимости распределения нагрузки в зонах контакта зубьев колес с несколькими смещенными венцами рассмотрим распределение числа зон контакта зубьев в зависимости от фазы движения.

Опуская сложные и громоздкие преобразования расчетных зависимостей для зацепления колес с тремя венцами, представим результаты расчетов по следующим завершающим зависимостям:

$$\frac{\delta_a}{\delta_{a3}} = \frac{p_\varepsilon}{3p_{\varepsilon3}} = \frac{3\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 2}{5,4\varepsilon_a - 1,8\varepsilon_a^2 - 4}; \quad (32) \quad \Delta L_{1-3} = 20 \lg \frac{\delta_a}{\delta_{a3}} = 20 \lg \frac{3\varepsilon_a - \varepsilon_a^2 - 2}{5,4\varepsilon_a - 1,8\varepsilon_a^2 - 4}. \quad (33)$$

Таблица 3 – Снижение уровней вибрации в зацеплении колес с тремя венцами

ε_a	1,5	1,55	1,6	1,65	5/3	1,7	1,75	1,8	1,85	1,9	1,95	2,0
δ_a/δ_{a3}	5,0	5,44	7,50	23,9	∞	11,7	5,0	3,33	2,6	2,14	1,86	5/3
ΔL_{1-3}	14,0	14,7	17,5	27,6	∞	21,3	14,0	10,5	8,22	6,62	5,40	4,44

На первый взгляд, странный результат выделен (см. табл. 3) для коэффициента перекрытия $\varepsilon_a = 5/3$. Он объясняется тем, что среднее значение нагрузки на контактирующую пару, рассчитанное по формулам (33) и (41), равно одной

шестой. Это означает, что в поле зацепления постоянно находятся шесть пар. Теоретически при принятой расчетной схеме зацепление не "шумит". На самом деле, происходит одновременная замена выходящих из поля пар входящими в контакт парами зубьев. Такая смена сопровождается толчками в результате высвобождения колебательной энергии от покидающих поле зацепления пар и ударами в результате вступления в контакт новых пар. Учет таких толчков изменяет величину отношения амплитуд. Это явление не учитывается в данной расчетной схеме и требует отдельного рассмотрения и количественной оценки.

В таблице также выделен результат расчета для коэффициента перекрытия $\varepsilon_\alpha=2$. При расчете по формуле (33) возникает неопределенность вида $0/0$. Для ее раскрытия воспользуемся известным правилом Лопиталя и преобразуем формулу (33) для определения отношения амплитуд при $\varepsilon_\alpha=2$.

$$\frac{\delta_a}{\delta_{a3}} = \lim_{\varepsilon_\alpha \rightarrow 2} \frac{3\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha^2 - 2}{3(2,2\varepsilon_\alpha - 0,6\varepsilon_\alpha^2 - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(x+1)}{-3x(0,6x+0,2)} = \frac{x+1}{3(0,6x+0,2)} = \frac{5}{3}.$$

Подстановка величины отношения в формулу (33) приводит к следующему результату $\Delta L_{1-3} = 20 \lg(\delta_a/\delta_{a3}) = 20 \lg(5/3) \approx 4,44$.

Выводы:

1. Применение зубчатых зацеплений зубьев с "глубоким" профилем в применяемом диапазоне передаточных чисел 1,6...4,0 приводит к снижению уровня вибрации до 2,5...6,2 децибел.

2. Более эффективными возможностями для снижения уровней вибрации обладают передачи с зацеплениями колес со смещенными относительно друг друга венцами.

3. Оптимальное смещение венцов в зацеплениях многовенечных колес будет при равномерном смещении в пределах шага зацепления.

Дальнейшие исследования в этом направлении должны быть проведены с учетом влияния ударных явлений при входе и выходе зубьев из зацепления, уточнения характеристики динамического процесса в контактах зубьев и др.

Список литературы. 1. Айрапетов Э.Л., Апархов В.И., Генкин М.Д., Жирнов А.А., Косарев О.И. Возбуждение колебаний в зубчатых передачах // "Динамические процессы в механизмах с зубчатыми передачами". – М., "Наука", 1976. – С.3-18. **2.** Косарев О.И. Модификация зубьев косозубых цилиндрических передач для снижения вибраций с зубцовой частотой // Вестник машиностроения. – №5. – 2009. – С.7-9. **3.** Попов А.П., Кипреев Ю.Н. Снижение виброактивности зубчатых передач. Машиностроение и техносфера XXI века // Сборник XV международной научно-технической конференции в г. Севастополе 15-20 сентября 2008г. В 4-х томах – Донецк: ДонГТУ, 2008. – Т.3. – С.104-109. **4.** Попов О.П., Кипреев Ю. М., Савенков О.И. Аналіз віброактивності і навантажувальної здатності нових зубчастих передач // Дев'ятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. – Львів: КНПАТРИ ЛТД, 2009. – С.296-297. **5.** Marine gearing – development and technology. Sigg H. "Proc. Inst. Mech. Eng.", 1990, 204, №A1. **6.** Патент №81008 на винахід. Україна. Зубчаста передача Попова О.П. з точковою і двопарною системою зацеплення евольвентних зубів / Попов О.П. – Опубл. 26.11.07. Бюл. №19. **7.** Патент №35343 на винахід. Україна. Зубчаста передача з точковою і чотирипарною системою зацеплення зубів / Попов О.П., Кипреев Ю.М. – Опубл. 10.09.2008, бюл. №17.

Поступила в редколлегию 11.05.12