

Ю.А. БРАНСПИЗ, д-р техн. наук,
А.Ю. КАШТАНОВ, магистр

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ПЛОСКОМЕРИДИАННОГО ПОЛЯ

На прикладі показано, що для запропонованого перетворення координат розв'язання рівняння Лапласа для плоского меридіанного потенціального поля на поверхні одиничного радіуса співпадає з розв'язанням рівняння Лапласа плоскопаралельного потенціального поля для відповідних граничних умов.

На примере показано, что для предложенного преобразования координат решение уравнения Лапласа для плоскомеридианного потенциального поля на поверхности единичного радиуса совпадает с решением уравнения Лапласа плоскопараллельного потенциального поля при соответствующих граничных условиях.

Введение. Рассматривается потенциальное поле с осевой симметрией (плоскомеридианное поле), для которого в цилиндрической системе координат (ρ, z, θ) имеет место уравнение Лапласа вида

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где $\psi(\rho, z)$ – скалярный потенциал рассматриваемого поля; ρ – радиальная координата; z – вторая метрическая координата цилиндрической системы координат (ρ, z, θ) .

Для уравнения (1) аналитическое решение в общем случае встречает определенные трудности, что обусловило в непосредственной практике расчетов полей разработку методов решения уравнения (1) на основе установления аналитической зависимости этого решения с решением уравнения Лапласа для скалярного потенциала соответствующего (например, по граничным условиям) плоскопараллельного поля. Это связано с тем, что для уравнения Лапласа в плоскопараллельном случае имеется достаточно обширная теоретическая база, позволяющая осуществлять аналитические расчеты плоскопараллельных полей практически любой сложности [1].

В этой связи следует констатировать, что в настоящее время задача связи между потенциалами плоскопараллельного поля и поля с осевой симметрией в общем случае (для всей расчетной области при произвольных граничных условиях) не решена. Имеются лишь отдельные исследования

по свойствам такой связи [2-4] (см. также библиографию на эту тему в [5]).

Как следствие, в настоящее время широкое распространение получили решения уравнения (1) численными методами, применение которых, впрочем, не позволяет непосредственно устанавливать зависимости между параметрами рассчитываемого поля с осевой симметрией, что является необходимым при решении разнообразных задач анализа такого поля. Поэтому задача об установлении аналитической связи между потенциалами плоскопараллельного поля и поля с осевой симметрией является актуальной.

В данной работе предлагается новый подход к решению этой задачи, основанный на установлении связи между потенциалами плоскомеридианного и плоскопараллельного поля не во всей расчетной зоне, а на некотором цилиндре, образующая которого параллельна оси симметрии плоскомеридианного поля (ось z).

Постановка задачи. Для рассматриваемого случая плоскомеридианного поля, потенциал которого удовлетворяет уравнению (1), произведем следующее преобразование координат

$$x = \ln \rho$$

и

$$y = z,$$

в результате которого уравнение (1) в новых координатах (x, y) , как это несложно показать, может быть переписано к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} e^{-2x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

В самом деле, согласно (2), вторая производная потенциала Ψ по координате z просто заменяется второй производной по новой координате y , а для слагаемых в (1) с производными по координате ρ имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-x}; \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-x} \right) \cdot \frac{1}{\rho} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} e^{-x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-x} \right) \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} e^{-2x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-2x}, \end{aligned}$$

что и дает в сумме для двух первых слагаемых в левой части (1) первое слагаемое в левой части (3).

В связи с уравнением (3) следует заметить, что для всех точек на оси $x = 0$ оно переписывается к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

который представляет собой уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат для плоскопараллельного (двумерного) поля.

Таким образом, согласно (2), точки с координатой $\rho=1$ переходят в точки оси $x=0$, в уравнение (1) плоскомеридианного поля переходит в уравнение (4) для плоскопараллельного поля, что дает возможность получения решения уравнения для потенциала плоскомеридианного поля на основе решения уравнения для потенциала плоскопараллельного поля (по крайней мере, для всех точек с координатой $\rho=1$). Такая возможность обуславливает задачу ее практической реализации, которая и решается в данной работе.

Общая формулировка задачи. Пусть решение уравнения (1) ищется в некоторой двумерной (для координат ρ и z) области G_0 , ограниченной некоторой линией $g(\rho, z)$, на которой задано значение потенциала ψ или его производной (граничные условия).

Пусть также преобразование (2) переводит область G_0 и ее границу $g(\rho, z)$ в другую двумерную (для координат x и y) область G_0^* , ограниченную линией $g^*(x, y)$. При этом в соответственных точках границ $g(\rho, z)$ и $g^*(x, y)$ сохраняются граничные условия для потенциала ψ .

Тогда, если в области G_0^* распределение потенциала ψ на оси $x=0$ описывается некоторой функцией $f(y)$, то, согласно приведенному выше преобразованию уравнения (1) к уравнению (4), можно предполагать, что этой же функцией будет описываться распределение потенциала ψ в области G_0 в соответственных точках с координатой $\rho=1$.

Пример расчета. Не имея возможности доказать приведенное предположение, покажем на одном практическом примере, что такой подход к установлению связи между потенциалами плоскомеридианного и плоскопараллельного поля имеет место. А именно, будем рассматривать решение уравнения (1) для области G_0 , изображенной на рис. 1, при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho \leq e, \quad z=0 & - \psi=0; & 0 \leq \rho \leq e, \quad z=e & - \psi=\psi_0; \\ \rho=e, \quad 0 \leq z \leq e & - \psi=0; & \rho=0, \quad 0 \leq z \leq e & - \frac{\partial \psi}{\partial \rho}=0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для этой области решение уравнения (1), полученное методом разделения переменных [6], может быть записано в виде следующей суммы

$$\psi(\rho, z) = 2\psi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{e} z\right) \cdot J_0\left(\frac{x_{0k}}{e} \rho\right)}{x_{0k} \cdot J_1(x_{0k}) \cdot \operatorname{sh}(x_{0k})}, \quad (6)$$

где J_0 и J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно; x_{0k} – k -й корень функции Бесселя нулевого порядка.

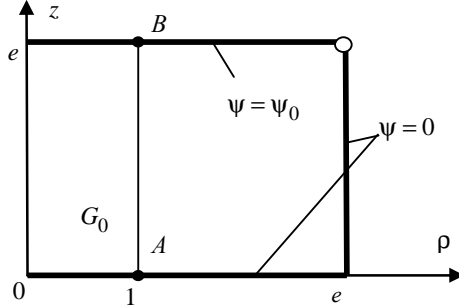


Рис. 1. Расчетная область плоскомеридианного поля

Из выражения (6) несложно получить следующее распределение потенциала ψ на линии AB ($\rho=1$ и $0 \leq z \leq e$, рис. 1)

$$\psi(\rho, z) = \psi_0 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{e} z\right) \cdot J_0\left(\frac{x_{0k}}{e}\right)}{x_{0k} \cdot J_1(x_{0k}) \cdot \operatorname{sh}(x_{0k})}. \quad (7)$$

Согласно тому, что изложено выше, это же распределение имеет место и на линии A^*B^* , которая получается из линии AB после преобразования по (2) области G_0 в область G_0^* (рис. 2).

Чтобы проверить это, достаточно найти распределение потенциала ψ на линии A^*B^* в области G_0^* (бесконечная в одну сторону полоса, рис. 2). Это можно сделать, заметив, что для потенциала на линии A^*B^* в области G_0^* распределение потенциала ψ на ней может быть с любой степенью точности получено как распределение потенциала вблизи правой границы плоскопараллельной области G_0^{**} , изображенной на рис. 3, при достаточно большом горизонтальном размере a этой области.

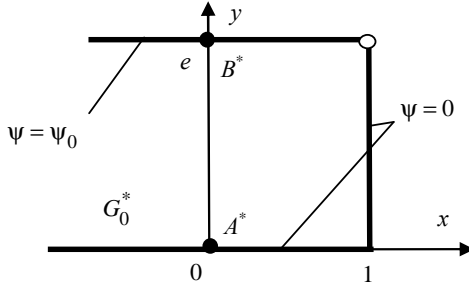


Рис. 2. Преобразованная расчетная область

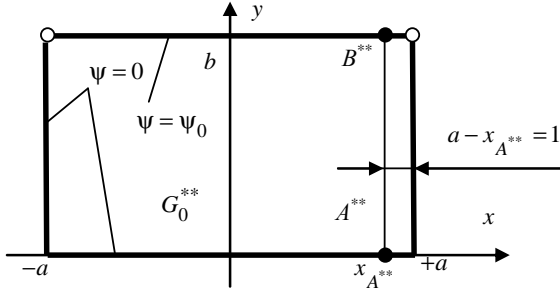


Рис. 3. Вспомогательная плоскопараллельная расчетная область

А именно, зная распределение потенциала плоскопараллельного поля в области G_0^{**} , задаваемое следующим выражением (его также можно получить методом разделения переменных) [6]

$$\psi_0 \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2k-1}{a}\pi x\right) \cdot \text{sh}\left(\frac{2k-1}{a}\pi y\right)}{\text{sh}\left(\frac{2k-1}{a}\pi b\right)}, \quad (8)$$

несложно определить распределение потенциала на линии $A^{**}B^{**}$ (эта линия расположена на единичном расстоянии от правой границы области G_0^{**} , рис. 3) при таком значении горизонтального размера области G_0^{**} , для которого его увеличение не приводит к изменению распределения потенциала на линии $A^{**}B^{**}$ (это изменение меньше задаваемой точности расчета).

Таким образом, распределение потенциала на линии A^*B^* в области G_0^* может быть посчитано по выражению (8) при подстановке в него $b = e$ и $x = a - 1$, когда $a \gg 1$. Непосредственный численный расчет по-

казал, что при $a \geq 30$ и $k = 200$ сумма в (8) практически не изменяется.

В таблице приведены результаты расчетов по (7) и (8) отношения ψ/ψ_0 для указанных условий. Согласно этим данным преобразование уравнения (1) по (2) дает в рассмотренном примере совпадающее распределение потенциала плоскомеридианного и плоскопараллельного поля для соответственных линий $\rho=1$ и $x=0$. Расхождение полученных результатов можно объяснить недостаточной точностью расчета функций Бесселя, о чем свидетельствует последняя строка в таблицы. Повышение точности расчета функций Бесселя должно привести к снижению значений отношения ψ/ψ_0 , вычисленных по (7), что должно снизить и расхождение результатов расчетов по (7) и по (8).

Таблица – Результаты расчета распределения потенциала для линий $\rho = 1$ и $x = 0$

z	ψ/ψ_0		Погрешность, %
	по (7)	по (8)	
$0.2 \cdot e$	0,117	0,107	8,45
$0.4 \cdot e$	0,258	0,230	10,6
$0.6 \cdot e$	0,448	0,396	11,6
$0.8 \cdot e$	0,708	0,645	8,86
e	1,087	0,999	8,11

Выводы. Подтверждена возможность использования предложенного преобразования координат для решения уравнения Лапласа в плоскомеридианном случае. Требуется теоретическое обобщение такого использования.

Список литературы: 1. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчёт электрических и магнитных полей. – М.: Энергия, 1970. – 376 с. 2. Сочнев А.Я. О классе плоскомеридианных полей, идентичных по геометрической структуре плоскопараллельным полям // Электричество. – 1966. – 10. – С. 48-52. 3. Острейко В.Н. О связи плоскомеридианных и плоскопараллельных полей эквипотенциальных электродов // Изв. вузов. Электромеханика. – 1972. – № 9. – С. 942-948. 4. Бранстиз Ю.А. Связь потенциалов идентичных по структуре двумерных полей // Материалы IV Всеукр. науч.-техн. конф. "Актуальные вопросы теоретической и прикладной биофизики, физики и химии" (г. Севастополь, 21-26 апреля 2008 г.). – Севастополь: СевНТУ, 2008. – С. 78-81 5. Загирияк М.В. Исследование, расчет и усовершенствование шкивных магнитных сепараторов. – К.: ИЗМН, 1996. – 488 с. 6. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высш. шк., 1978. – 231 с.

Поступила в редколлегию 12.09.08