УДК 537.86+621.373

*Н.Н. ЧЕРНЫШОВ*, канд. техн. наук

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ В КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

Досліджені флуктуаційні поля в плазмі, збуджені випадковими електричними токами. Розроблена кінетична модель квазінейтральної плазми, яка дозволяє зробити статистичний розрахунок розподілу електромагнітного поля. Для розрахунку кореляційних функцій електромагнітного поля були використані флуктуаційно-диссипативна теорема та ланжевеновський. підхід.

Исследованы флуктуационные поля в плазме, возбуждаемые случайными электрическими токами. Разработана кинетическая модель квазинейтральной плазмы, которая позволяет сделать статистический расчет распределения электромагнитных полей. Для расчета корреляционных функций электромагнитного поля были использованы флуктуационно-диссипативная теорема и ланжевеновский подход.

При изучении плазменных систем важное место имеет исследование электромагнитных и термодинамических свойств. Статистическая теория (СТ) термодинамического равновесия базируется на использовании флуктуационно-диссипативной теоремы. Таким образом, задача о нахождении корреляционных функций электромагнитного поля сводится к определению функции отклика системы на внешнее возмущение. Одним из подходов СТ является метод ланжевеновских источников. При этом, необходимо получить корреляционные функции и уравнения распределения флуктуационного электромагнитного поля, создаваемого ланжевеновскими источниками.

Работа посвящена разработке статистической модели полубесконечной плазмы, граничащей с диэлектриком. Заряженные частицы зеркально отражаются от границы диэлектрика. Такая модель используется в астрофизике, при термоядерном синтезе, твердотельной плазме полупроводников и плазме газового разряда, граничащей с диэлектриком. В первом разделе рассмотрена задача о возбуждении электромагнитных волн в диэлектрике на основании уравнений Максвелла и линеаризованного кинетического уравнения с интегралом столкновений в $\vec{r}$ -приближении. Решение этих уравнений представлено в виде разложения Фурье. Во втором разделе использована флуктуационно-диссипативная теорема для нахождения корреляционных функций электромагнитного поля, которые выражаются через функции линейного отклика и среднюю энергию гармонического осциллятора. Найдено распределение функций Грина по $z$-координате. Этот подход использован для случая термодинамического равновесия. В третьем разделе использован ланжевеновский подход для нахождения корреляционных функций распределения электромагнитного поля. Для этого случая получены корреляционные функции электромагнитного поля с использованием корреляционных функций распределения плотности тока ланжевеновских источников с учетом локального равновесия в плазменном и диэлектрическом пространстве. Таким образом, на основании флуктуационно-диссипативной теоремы и метода ланжевеновских источников получены уравнения для корреляционных функций распределения электромагнитного поля и показана эквивалентность этих результатов. В четвертом разделе приведены уравнения для расчета теплового излучения с единицы поверхности плазмы во внешнее пространство, даны указания по решению уравнения баланса тепла от которого зависит распределение электромагнитного поля. Рассмотрена задача о нахождении энергии теплового излучения с единицы поверхности плазмы.

**1. Расчет электромагнитного поля в плазме при заданных источниках.**

Рассмотрим однородную квазиейтральную плазменную систему, занимающую полубесконечное пространство $(-\infty < x, y < \infty, z > 0)$. Внешняя область $(z < 0)$ заполнена диэлектриком с проницаемостью $\tilde{\varepsilon}(\omega) \equiv \tilde{\varepsilon}$. Получим уравнения для расчета распределения флуктуационного электромагнитного поля, создаваемого произвольно распределенными индуцированными источниками $\vec{J}(\vec{r};t)$ и $\vec{\tilde{J}}^{\mathrm{e}}(\vec{r},t)$. Искомые распределения электромагнитного поля могут быть найдены в результате совместного решения системы уравнений Максвелла для внешней области и линеаризованной системы уравнений Максвелла-Больцмана для области занятой плазмой $(z > 0)$

$$\begin{cases} rot\vec{E}(\vec{r},\omega) = i\dfrac{\omega}{c}\vec{B}(\vec{r},\omega); \\ rot\vec{B}(\vec{r},\omega) = -i\dfrac{\omega\varepsilon}{c}\vec{E}(\vec{r},\omega) + \dfrac{4\pi}{c}\left(\sum \vec{J}(\vec{r},\omega) + \vec{J}^{\mathrm{e}}(\vec{r},\omega)\right)\times \\ \times\left\{-i\omega + \upsilon\dfrac{\partial}{\partial\vec{r}} + \dfrac{e_\sigma}{m_\sigma}\left(\vec{E} + \dfrac{v\vec{B}}{c}\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\right\}\delta f_\sigma(\vec{r},v,\omega) + \\ + \dfrac{e_\sigma}{m_\sigma}\left\{\vec{E}(\vec{r},\omega) + \dfrac{v\vec{B}(\vec{r},\omega)}{c}\right\}\dfrac{\partial f(v)}{\partial v} = L\delta f_\sigma(\vec{r},v,\omega). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\vec{J}(\vec{r},\omega)$ – индуцированный ток частиц $\sigma$, имеющих заряд $e$ , массу $m$ и среднюю плотность $n_\sigma; \varepsilon \equiv \varepsilon(\omega)$ – диэлектрическая проницаемость плазмы; $\delta f\ (\vec{r},v,\omega)$ – отклонение функции распределения частиц $\sigma$ от невозмущенного распределения $f(v)$; $L$ – линеаризованный оператор столкновений. Величины внешней области “~”.

Рассмотрим модель зеркального отражения заряженных частиц. Для гармонического анализа источников $\vec J(\vec r,\omega), \tilde{\vec J}^{\,e}(\vec r,\omega)$ сделаем преобразование Фурье. После перехода от переменных $\vec r$ к переменным $\vec k$ с помощью преобразования Фурье получим [1]

$$A(\vec r,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\vec k\, exp(i\vec k\vec r\,)A(\vec k,\omega), \tag{2}$$

Фурье-компоненты электрического поля можно представить в виде

$$\begin{cases} \vec E(\vec k,\omega)=-i\dfrac{4\pi}{\omega}\Lambda^{-1}(\vec k,\omega)\left\{\vec J(\vec k,\omega)+\dfrac{c}{2\pi}S^{-1}(\vec k,\omega)\vec E^{e}(\vec k,\omega)\right\}; \\ \tilde{\vec E}(\vec k,\omega)=-i\dfrac{4\pi}{\omega}\tilde\Lambda^{-1}(\vec k,\omega)\left\{\tilde{\vec J}^{e}(\vec k,\omega)-\dfrac{c}{2\pi}S^{-1}(\vec k,\omega)\vec E^{e}(\vec k,\omega)\right\}. \end{cases} \tag{3}$$

где
$$\begin{cases} \Lambda(\vec k,\omega)=\varepsilon(\vec k,\omega)-\left(\delta-\dfrac{\vec k\vec k}{k^2}\right)\dfrac{c^2k^2}{\omega^2};\ \tilde\Lambda(\vec k,\omega)=\left(\delta-\dfrac{\vec k\vec k}{k^2}\right)\tilde{\vec\Delta}_T(\vec k,\omega); \\ S(\vec k,\omega)=\dfrac{i}{\pi}\dfrac{c}{\omega}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\vec k\,\tilde\Lambda^{-1}(\vec k,\omega). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon(\vec k,\omega)$ – тензор диэлектрической проницаемости.

**2. Термодинамически равновесная система.**

Если плазменная система находится в состоянии термодинамического равновесия, то в соответствии с флуктуационно-диссипативной теоремой корреляционная функция СТ может быть представлена в виде [2]

$$\left(\vec E(\vec r\,)\vec E^*(\vec r\,')\right)=-\theta(\omega,T)\times\left(G(\vec r,\vec r\,',\omega)+G^*(\vec r\,',\vec r,\omega)\right), \tag{5}$$

где средняя энергия квантового гармонического осциллятора

$$\theta(\omega,T)=\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{T}\right)-1},$$

$G(\vec r,\vec r\,',\omega)$ – функция линейного отклика системы на внешнее возмущение,

$$\vec E(\vec r,\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\vec r\,'G(\vec r,\vec r\,',\omega)\vec J(\vec r\,',\omega). \tag{7}$$

Так как система однородна по координатам $\vec r$, то перейдем к переменным $\vec k$

$$\left(\vec E(z)\vec E^*(z')\right)_k=-\theta(\omega,T)\times\left(G(\vec k,z,z',\omega)+G^*(\vec k,z,z',\omega)\right), \tag{8}$$

где $G(\vec k,z,z',\omega)$ – функция Грина системы Максвелла-Больцмана.

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}'\,G(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)\,\mathbf{J}(\mathbf{k}');\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\tilde{\mathbf{J}}^{e}(\mathbf{r},t);\\ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}'\,\tilde{G}(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)\,\mathbf{J}(\mathbf{k}');\ \tilde{\mathbf{J}}^{e}(\mathbf{r},t)=0. \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} G(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)=-\dfrac{16\pi c}{\omega^2}\Lambda^{-1}(\mathbf{k},\omega)S^{-1}(\mathbf{k},\omega)\left(\theta(z')\Lambda^{-1}(\mathbf{k}',\omega)-\theta(-z')\tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{k}',\omega)\right)-\\ -\dfrac{\theta(z')i8\pi}{\omega}\times\left(\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+\delta(1-2\delta)(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right)\Lambda^{-1}(\mathbf{k},\omega);\\ \tilde{G}(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)=\dfrac{16\pi c}{\omega^2}\tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{k},\omega)S^{-1}(\mathbf{k},\omega)\left(\theta(z')\Lambda^{-1}(\mathbf{k}',\omega)-\theta(-z')\tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{k}',\omega)\right)-\\ -\dfrac{\theta(z')i8\pi}{\omega}\times\left(\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+\delta(1-2\delta)(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right)\tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{k},\omega). \end{cases} \qquad (10)$$

Распределение функций Грина получаем подстановкой (10) в (11)

$$\begin{cases} G(\mathbf{k},z,z',\omega)=\dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{k}'\,exp(i(\mathbf{k}z-\mathbf{k}'z'))\,G(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega);\\ \tilde{G}(\mathbf{k},z,z',\omega)=\dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{k}'\,exp(i(\mathbf{k}z-\mathbf{k}'z'))\,\tilde{G}(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega). \end{cases} \qquad (11)$$

Получаем уравнения для Фурье-компонент электромагнитного поля

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{k})\mathbf{E}^{*}(\mathbf{k}')=-\theta(\omega,T)\times\left(G(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)+G^{*}(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)\right);\\ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})\tilde{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{k}')=-\theta(\omega,T)\times\left(\tilde{G}(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)+\tilde{G}^{*}(\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega)\right). \end{cases} \qquad (12)$$

### 3. Ланжевеновский подход для расчета электромагнитного поля

Используя систему уравнений (3) получаем следующие уравнения для корреляционных функций распределения электромагнитного поля [4, 6]

$$\mathbf{E}(\mathbf{k})\mathbf{E}^{*}(\mathbf{k}')=\left(\frac{4\pi}{\omega}\right)^2\Lambda^{-1}(\mathbf{k},\omega)\Lambda^{*-1}(\mathbf{k}',\omega)\times$$

$$\times\left\{\begin{aligned} &\mathbf{J}^{e}(\mathbf{k})\mathbf{J}^{e*}(\mathbf{k})+\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2 S^{-1}(\mathbf{k},\omega)S^{*-1}(\mathbf{k},\omega)\times\left(\mathbf{E}^{e}\mathbf{E}^{e*}+\tilde{\mathbf{E}}^{e}\tilde{\mathbf{E}}^{e*}\right)+\\ &+\frac{c}{2\pi}\left(S^{*-1}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{J}^{e}(\mathbf{k})\mathbf{E}^{e*}(\mathbf{k},\omega)\right)+S^{-1}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}^{e}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{J}^{e*}(\mathbf{k}') \end{aligned}\right\}; \qquad (13)$$

$$
\tilde{E}(\vec{k})\tilde{E}^{*}(\vec{k}') = \left(\frac{4\pi}{\omega}\right)^{2} \tilde{\Lambda}^{-1}(\vec{k},\omega)\tilde{\Lambda}^{*-1}(\vec{k}',\omega)\times
$$
$$
\times\left\{\begin{array}{l} \left(\tilde{J}^{e}(\vec{k})\tilde{J}^{*e}(\vec{k}')\right)+\left(\dfrac{c}{2\pi}\right)^{2} S^{-1}(\vec{k},\omega)S^{*-1}(\vec{k},\omega)\times\left(\vec{E}^{e}\vec{E}^{*e}+\tilde{\vec{E}}^{e}\tilde{\vec{E}}^{*e}\right)- \\ -\dfrac{c}{2\pi}\left(S^{*-1}(\vec{k},\omega)\tilde{J}^{e}(\vec{k})\tilde{E}^{*e}(\vec{k},\omega)\right)+S^{-1}(\vec{k},\omega)\tilde{E}^{e}(\vec{k},\omega)\tilde{J}^{*e}(\vec{k}') \end{array}\right\}. \tag{14}
$$

Зануление корреляционной функции ланжевеновских источников во внешней области может привести к ошибочным результатам. Подставляя функции (12) в уравнения (13), (14) можно заметить, что электромагнитные поля определяются температурами обеих сред. При $T=\tilde{T}$ уравнения (13) и (14) сводятся к уравнениям для корреляционной функции Фурье-компонент электромагнитного поля. Введение дополнительных источников позволяет рассчитать распределение электромагнитного поля в плазме.

**4. Тепловое излучение плазменного пространства**

Рассмотрим задачу о нахождении энергии теплового излучения с единицы поверхности плазмы во внешнюю область. Ее выражение является нормальной компонентой вектора Умова-Пойнтинга [7]

$$
P(\omega)d\omega = \int\limits_{\theta\le\pi/2} d\Omega\cos\theta I(\omega,\theta,T,\tilde{T})d\omega, \tag{15}
$$

$I(\omega,\theta,T,\tilde{T}) = I(\omega,\theta,T) - I(\omega,\theta,\tilde{T})$ – интенсивность теплового излучения от $\omega$ до $\omega + d\omega$ в единицу телесного угла $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$; $\theta$ – полярный угол от внешней нормали к границе плазмы; $\varphi$ – азимутальный угол.

Выражение (15) отвечает суммарному потоку теплового излучения. Спектральную плотность энергии теплового излучения представим в виде суперпозиции двух направленных навстречу потоков [9]

$$
P(\omega,T,\tilde{T}) = P(\omega,T,\tilde{T}) - P(\omega,\tilde{T}). \tag{16}
$$

Выражения для них могут быть получены, учитывая поток теплового излучения во внешней области

$$
\begin{cases} P(\omega,T,\tilde{T})d\omega = \int\limits_{0\le\pi/2} d\Omega\cos\theta I(\omega,\theta,T,\tilde{T})d\omega; \\ P(\omega,\tilde{T})d\omega = \int\limits_{0\le\pi/2} d\lambda\cos\theta I(\omega,\theta,\tilde{T})d\omega. \end{cases} \tag{17}
$$

Для расчета температуры используется метод конечных разностей и выбирается параболическое распределение. Полученное распределение является основанием для каждого последующего приближения. Решение сходится после нескольких приближений. Работа выполнялась при финансовой поддержке МОН Украины, тема №0107U002295 МОН Украины.

**Заключение.** В работе рассмотрена задача возбуждения термодинамически равновесной плазмы на основании модели зеркального отражения заряженных частиц. Предложен метод построения СТ плазмы, учитывающей излучение внешней среды. Этот метод основан на использовании ланжевеновского подхода, когда случайные источники флуктуаций вводятся в плазменной и внешней областях. Для расчета распределения компонент электромагнитного поля найдены функции Грина системы уравнений Максвелла-Больцмана и сделан их гармонический анализ. Установлено, что флуктуационно-диссипативная теорема и ланжевеновский подход эквивалентны. При $T = \tilde{T}$ уравнения (13) и (14) сводятся к уравнениям для корреляционной функции Фурье-компонент электромагнитного поля. Рассмотрена задача о нахождении энергии теплового излучения с единицы поверхности плазмы и предложен метод конечных разностей для расчета распределения температуры.

**Список литературы:** **1.** *Виноградов Н.Н.* Физика плазмы, № 1; М.: Наука, 1984. – С. 1064. **2.** *Климонтович Ю.Л., Якименко И.П.* Статистическая теория молекулярных систем. М.: МГУ, 1980. – 224 с. **3.** *Ишимару С.* Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975. – 288с. **4**. *Чернишов М.М., Грицай С.В.* Поширення електромагнітних хвиль, № 1; ХНУРЕ, 2004. – 299 с. **5.** *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика, № 1; М.: Наука, 1976. – 584 с. **6.** *Ситенко А.Г.* Электромагнитные флуктуации в плазме. ХГУ, 1965. – 184 с. **7.** *Полевой В.Г.* Теплообмен электромагнитным полем. М.: Наука, 1990. – 192 с. **8.** *Scott B.* Plasma Phys. Contr. Fusion, v. 34; 1992. – P. 1977. **9.** *Nedospasov A.V.* Plasma Phys., v. 15; 1989. – P. 659. **10.** *Tomson W.B., Habbard J.* Rev. Mod. Phys., v.5; 1960. – P. 714.

*Поступила в редколлегию 10.09.07*