

ЛЮ ЧАН, аспирант, ХНУРЭ, Харьков
Н.Н. ЧЕРНЫШОВ, канд. техн. наук, доц., ХНУРЭ, Харьков
Е.Е. РАСТРИПА, студент, ХНУРЭ, Харьков
М.С. ШЕВЧЕНКО, студент, ХНУРЭ, Харьков
В.И. ДИТЯТКИН, студент, ХНУРЭ, Харьков
В.В. ДЮКАРЕВ, студент, ХНУРЭ, Харьков
И.К. МЕЙЛАХ, студент, ХНУРЭ, Харьков
А.Е. ПРАСОЛ, студент, ХНУРЭ, Харьков
Д.С. ЗЮКИН, студент, ХНУРЭ, Харьков

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

У роботі розглядаються питання руху частинок, описано розподіл неоднорідного осесиметричного поля, рух електрона в комбінованих та схрещених полях. Для визначення характеру залежності траєкторії частки в неоднорідному статичному полі розглянуто просторовий розподіл магнітної індукції. Робота виконана для випадку, коли щодо осі на рівній відстані величина вектора магнітної індукції залишається постійною при будь-якому куті повороту.

В работе рассматриваются вопросы движения частиц, описано распределение неоднородного осесимметричного поля, движение электрона в комбинированных и скрещенных полях. Для определения характера зависимости траектории частицы в неоднородном статическом поле рассмотрено пространственное распределение магнитной индукции. Работа выполнена для случая, когда относительно оси на равном расстоянии величина вектора магнитной индукции остается постоянной при любом угле поворота.

Введение. Для управления движением потоков заряженных частиц применяются сложные конфигурации (распределения) управляющего магнитного поля. При этом на траекторию движения частиц влияют как собственные параметры частиц, так и параметры полей, внешнего магнитного поля, создаваемого системой управления, и собственного поля. В настоящее время проблема моделирования этих полей окончательно не решена. Определенные наработки в этой области получены благодаря компьютерному моделированию полей.

Цель работы – Моделирование движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях.

Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Рассмотрим случай, когда заряженная частица движется в одно-

родном поле. Выберем системы координат так, чтобы ось x совпадала с вектором магнитной индукции \vec{B}_0 . На рис. 1 приведена схема влета частицы в область с однородным магнитным полем.

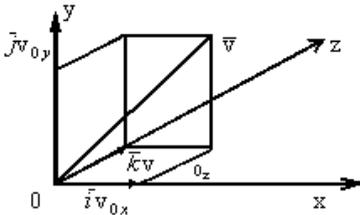


Рис. 1.

Вектор скорости частицы ориентирован произвольно относительно вектора \vec{B}

$$\vec{v} = \vec{i} v_{0x} + \vec{j} v_{0y} + \vec{k} v_{0z}.$$

Запишем уравнение (1) в виде [2]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ m_0 \ddot{y} = qB_0 \dot{z}; \\ m_0 \ddot{z} = -qB_0 \dot{y}. \end{cases} \quad (2)$$

Введем параметр

$$\omega = \frac{qB_0}{m_0}, \quad (3)$$

называемый циклотронной частотой, и перепишем (2) в виде

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = \omega \dot{z}; \\ \ddot{z} = -\omega \dot{y}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь точки означают производные по времени. Из первого уравнения следует

$$x = x_0 + At.$$

Если частица влетает в начале координат при $(t=0, v_x = v_{0x}, v_y = v_{0y}, v_z = v_{0z})$, то $A = v_{0x}$, и вдоль оси x частица движется равномерно [3]

$$x = v_{0x} t.$$

Для определения характера движения частицы относительно координат y и z применим следующий метод. Введем новую переменную

$$\Phi = y + iz, \quad (5)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Умножая третье уравнение системы (3) на i и складывая его со вторым, получаем

$$\ddot{\Phi} = -i\omega\dot{\Phi} \rightarrow \Phi = R + re^{-i\omega t}.$$

При $\Phi|_{t=0} = 0$, $\dot{\Phi}|_{t=0} = v_{0y} + iv_{0z}$,

$$\Phi = \frac{(v_{0z} - iv_{0y})}{\omega}(1 - e^{-i\omega t}). \quad (6)$$

Воспользовавшись (5) и (6) находим [4]

$$\begin{cases} y = \frac{v_{0z}}{\omega}(1 - \cos \omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t; \\ z = -\frac{v_{0y}}{\omega}(1 - \cos \omega t) + \frac{v_{0z}}{\omega} \sin \omega t. \end{cases} \quad (7)$$

Из (7) следует, что траектория частицы в плоскости yz задается уравнением

$$\left(y - \frac{v_{0z}}{\omega}\right)^2 + \left(z + \frac{v_{0y}}{\omega}\right)^2 = \frac{(v^2 + v^2)}{\omega}, \quad (8)$$

представляющим собой окружность радиуса

$$R_c = \frac{\sqrt{v_{0y}^2 + v_{0z}^2}}{|\omega|} \quad (9)$$

с центром в координатах $y = \frac{v_{0z}}{\omega}$; $z = \frac{v_{0y}}{\omega}$.

Поскольку знак ω зависит от знака заряда частицы (3), положение точек центра окружности будет зависеть от знака q и массы m_0 .

Траектория частицы является винтовой линией. Шаг винтовой линии равен L . На рис. 2 показан вид траектории движения заряженной частицы в однородном магнитном поле в цилиндрических координатах. При этом шаг винтовой линии определяется из условия, что за один период вращения по окружности вдоль оси x частица проходит расстояние [5]

$$L = v_{0x}T = \frac{2\pi v_{0x}}{\omega}, \quad \omega T = 2\pi. \quad (10)$$

Когда $v_{0x} = v_{0x} = 0$ частица вращается с радиусом $R_c = |v_{0y}/\omega|$.

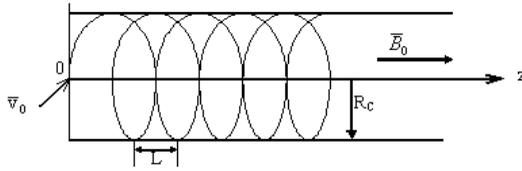


Рис. 2.

При $q > 0 - \omega > 0$; $y = 0 - z = -v_{0x}/\omega$ – частица вращается против часовой стрелки; при $q < 0 - \omega > 0$ – по часовой стрелке.

Движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле. Для определения характера зависимости траектории частицы в неоднородном магнитном поле необходимо знать пространственное распределение $\vec{B}_0(z)$. Ограничимся осесимметричным полем, когда величина вектора магнитной индукции остается постоянной при любом угле поворота (r, φ, z) . Это условие эквивалентно оператору $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Представим вектор индукции через векторный потенциал \vec{A} [6]

$$\vec{B}_0 = \text{rot } \vec{A}, \quad (11)$$

или, расписывая в скалярной форме [1]

$$\begin{cases} B_{0z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi); \\ B_{0\varphi} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\ B_{0r} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{cases} \quad (12)$$

Из уравнений Максвелла при отсутствии сторонних токов для статического случая

$$\text{rot } \vec{B}_0 = 0 \rightarrow \begin{cases} (\text{rot } \vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_{0\varphi}) = 0; \\ (\text{rot } \vec{B})_r = -\frac{\partial B_{0\varphi}}{\partial z} = 0; \\ (\text{rot } \vec{B})_\varphi = \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_r}{\partial r} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Из первых двух уравнений следует, что составляющая B_φ не зависит от r, z . Из уравнений (12) следует, что A_r, A_φ могут быть приравнены нулю. Получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial B_{0r}}{\partial z} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial r} = \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} = 0. \quad (14)$$

Представим решение уравнения (14) в виде ряда [7]

$$A_\varphi(r, z) = r f_1(z) + r^3 f_3(z) + r^5 f_5(z) + \dots \quad (15)$$

Нечетность ряда вызвана тем, что составляющая поля B_{0z} должна быть четной ввиду определенной ранее симметрии магнитного поля. Продифференцируем (15) дважды по z , и подставим в (14):

$$r [\ddot{f}_1(z) + 8f_3(z)] + r^3 [\ddot{f}_3(z) + 24f_5(z)] + \dots \quad (16)$$

Чтобы это решение удовлетворялось при любых r , необходимо приравнять нулю все выражения в квадратных скобках [5]:

$$f_3(z) = -\frac{1}{8} \ddot{f}_1(z); f_5(z) = -\frac{1}{24} \ddot{f}_3(z) = \frac{1}{2 \times 4^2 \times 6} f_1^{(4)}(z) \rightarrow \quad (17)$$

$$\rightarrow A_\varphi(r, z) = r f_1(z) - \frac{r^3}{2 \cdot 4} \ddot{f}_1(z) + \frac{r^5}{2 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 3} f_1^{(4)}(z) + \dots$$

Для определения $f_1(z)$ подставим (17) в (14)

$$B_{0z}(r, z) = \frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} = 2f_1(z) - \frac{1}{2} r^2 \ddot{f}_1(z) + \dots \quad (18)$$

$$r = 0, f_1(z) = \frac{1}{2} B_0(z). \quad (19)$$

Тогда ряд (18) может быть представлен в виде

$$A_\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} B_0^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}. \quad (20)$$

Скобка $(2n)$ означает порядок производной по z .

Для составляющих магнитной индукции получаем в итоге [8]

$$B_{0z}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_0^{(2n)}(z)}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}; \quad (22)$$

$$B(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_0^{(2n+1)}(z)}{n(n+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}. \quad (23)$$

При условии $E_0 = 0, v \ll c \rightarrow m_0 \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = q[\bar{v} \bar{B}_0]$. \bar{R} – радиус-

вектор траектории движения частицы.

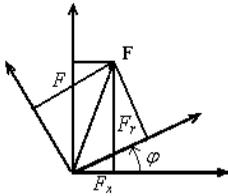


Рис. 3.

Вектор силы Лоренца $\bar{F} = q[\bar{v} \bar{B}_0]$ имеет одно и то же направление и величину в любой системе координат. Если совместить оси z, F_x, \bar{F} в декартовой и цилиндрической системах координат, то значения радиальной F_r и азимутальной F_ϕ составляющих можно получить по правилам преобразования систем координат (рис. 3) [9]:

$$\begin{cases} F_r = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi; \\ F_\phi = F_x \sin \varphi - F_y \cos \varphi, \end{cases} \quad (24)$$

где $F_x = m_0 \ddot{x}, F_y = m_0 \ddot{y}$.

После подстановки в (24) соответствующих производных по времени, находим

$$\begin{cases} F_r = m_0 [\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2]; \\ F_\phi = \frac{m_0 d}{r dt} (r\dot{\varphi}); \end{cases} \quad (25)$$

$$[\bar{v} \bar{B}_0] = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & \bar{e}_\phi & \bar{e}_z \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & \dot{z} \\ B_{0r} & 0 & B_{0z} \end{vmatrix}; B_{0\phi} = 0 \rightarrow \begin{cases} m_0 [\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2] = qrB_{0z}\dot{\varphi} \\ \frac{m_0}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = q(-B_{0z}\dot{r} + B_{0r}\dot{z}); \\ m_0 \ddot{z} = -qrB_{0r}\dot{\varphi} \end{cases} \quad (26)$$

Выразим B_{0z} и B_{0r} через A_ϕ [9].

$$\begin{cases} m_0 \ddot{z} = qr\dot{\varphi} \frac{\partial A_\phi}{\partial z}; \\ m_0 [\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2] = q\dot{\varphi} \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}; \\ \frac{m_0}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = q \left[-\dot{z} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\dot{r}}{r} \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} \right]. \end{cases} \quad (27)$$

Интегрируя последнее уравнение в (27) по времени, находим

$$\dot{\phi} = -\frac{q}{m_0} \frac{A_\phi}{r}; \dot{\phi}|_{t=0} = 0; A_\phi|_{t=0} = 0. \quad (28)$$

при отсутствии азимутальной составляющей. В параксиальной области учтем первый член в разложении $A_\phi = \frac{r}{2} B_0(z)$. Тогда

$$\dot{\phi} = -\frac{q}{2m_0} B_0(z). \quad (29)$$

Угол поворота траектории движения частицы вдоль оси z вычислим при учете

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = v_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (30)$$

где v_0 – скорость частицы, определяемая законом сохранения энергии

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = -qU_0;$$

U_0 – потенциал, необходимый для придания частице скорости v_0 вдоль оси z на влете в область существования магнитного поля [10].

Тогда угол поворота при движении частицы в магнитном поле

$$\dot{\phi} = \sqrt{-\frac{q}{8m_0U_0}} B_0(z) \rightarrow \phi(z) = \sqrt{-\frac{q}{8m_0U_0}} \int_{z_0}^{z_1} B(z) dz. \quad (31)$$

Угол поворота не зависит от начального положения частицы.

Знак минус под знаком радикала свидетельствует о том, что для отрицательных частиц ускоряющим является положительный потенциал U_0 , а для положительных – отрицательный. В меридианальной плоскости уравнение траектории получим следующим образом.

$$\ddot{r} - r \left(\frac{q}{m_0} \right)^2 \frac{A_\phi}{r^2} = - \left(\frac{q}{m_0} \right)^2 \frac{A_\phi}{r} \left(A_\phi + r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right). \quad (32)$$

В приосевом приближении [10, 11]:

$$r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} = \frac{r}{2} B_0(z) = A_\phi \rightarrow \ddot{r} = - \left(\frac{q}{m_0} \right) \frac{r}{4} B_0^2(z). \quad (33)$$

С учетом преобразования

$$\ddot{r} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dr}{dz} \dot{z} \right) \dot{z} = \frac{d^2 r}{dz^2} (\dot{z})^2 = -\frac{q}{m_0} 2U_0 \frac{d^2 r}{dz^2} \rightarrow \frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{q}{8m_0U_0} r B_0^2(z).$$

Движение частицы в скрещенных полях. Рассмотрим траектории движения заряженных частиц, когда они попадают в y область, где существуют взаимно перпендикулярные электростатическое \vec{E}_0 и магнитное \vec{B}_0 поля. Ориентация вектора магнитной индукции $\vec{B}_0 = \vec{i}B_0$, а

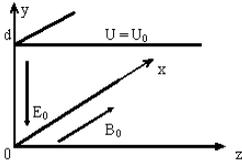


Рис. 4.

вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_0 = -\vec{j}E_0$. Электрическое поле создается системой из двух пластин в плоскостях xOz ; xOy между которыми приложена разность потенциалов U_0 , распределение потенциала в области между пластинами $U(y) = U \frac{y}{d}$, а напряженность электрического поля $E_0 = \frac{U_0}{d}$. На рис. 4

приведено расположение векторов для скрещенных полей.

Уравнение движения при нерелятивистских скоростях частицы имеет вид

$$m_0 \ddot{\vec{R}} = q\vec{E}_0 + q[\vec{v}\vec{B}_0]. \quad (34)$$

$$\ddot{x} = 0; \ddot{y} = \frac{q}{m_0}(B_0 \dot{z} - E_0); \ddot{z} = -\frac{q}{m_0}B_0 \dot{y}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение (34) [12]:

$$\dot{z} = -\omega y + A, A = v_{0z} + \omega y_0. \quad (35)$$

Подставим полученное решение в уравнение для \ddot{y}

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\frac{q}{m_0}E_0 + A. \quad (36)$$

Решение этого неоднородного уравнения имеет вид

$$y = G \sin \omega t + D \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{q}{m_0} E_0 + \omega A \right), \quad (37)$$

а постоянные интегрирования D и G определяются из начальных условий:

$$D = y_0 - \frac{1}{\omega} \left[-\frac{q}{m_0} E_0 + \omega A \right]; G = \frac{v_{0y}}{\omega}.$$

Проинтегрируем уравнение для \ddot{z} и подставим постоянные

$$z = G \cos \omega t - D \sin \omega t + A + C; C = -G = -\frac{v_{0y}}{\omega}. \quad (38)$$

Получаем уравнения:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t + \frac{(E_0/B_0 - v_{0z})}{\omega} (\cos \omega t - 1);$$

$$z = \frac{v_{0y}}{\omega} (\cos \omega t - 1) - \sin \omega t + E_0 t / B_0.$$

Получим параметрическую зависимость

$$\left[y - y_0 + \frac{1}{\omega} (t - v_{0z}) \right]^2 + \left[z + \frac{v_{0y}}{\omega} - E_0 t / B_0 \right]^2 = \frac{v_{0y}^2 + (E_0/B_0 - v_{0z})^2}{\omega^2}. \quad (39)$$

Частица в скрещенных полях движется по окружности с радиусом

$$R = |\omega|^{-1} \sqrt{v_{0y}^2 + (t - v_{0z})^2}, \quad (40)$$

вокруг центра с изменяющимися во времени координатами [13-15]

$$\begin{cases} y = y_0 - (E_0/B_0 - v_{0z})/\omega; \\ z = E_0 t / B_0 - v_{0y}/\omega. \end{cases} \quad (41)$$

Центр окружности перемещается вдоль оси с постоянной скоростью $u_0 = E_0/B_0$.

Можно выделить ряд интересных частных случаев.

Пусть $y_0 = v_{0y} = v_{0z} = 0$. Тогда

$$y = \frac{u_0}{\omega} (\cos \omega t - 1); z = \frac{u_0}{\omega} (\omega t - \sin \omega t), \quad (42)$$

$$R_{\text{окр}} = \frac{u_0}{\omega}, B_{\text{окр}} = \frac{1}{d} \sqrt{2 \left| \frac{m_0}{q} \right| U_0}, d = 2 \frac{u_0}{\omega}. \quad (43)$$

$$y = y_0, v_{0y} = 0, v_{0z} = u_0 \rightarrow y = y_0; z = u_0 t. \quad (44)$$

$$y = \frac{(u_0 - v_{0z})}{\omega} (\cos \omega t - 1); z = ut - \frac{(u_0 - v_{0z})}{\omega} \sin \omega t; v_{0y} = 0, v_{0z} \neq u_0.$$

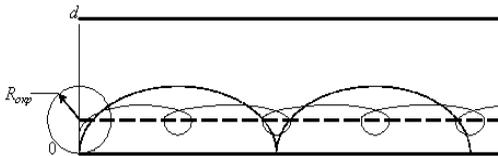


Рис. 5.

Траектории движения частицы в скрещенных полях показаны на рис. 5: сплошная линия соответствует уравнениям (42), (43), пунктирная – уравнению (45).

Выводы. В работе рассмотрены вопросы движения заряженной частицы в случае однородного, осесимметричного неоднородного и скрещенных полях. Для определения характера зависимости траектории частицы в неоднородном поле рассмотрено пространственное распределение индукции. Электрическое поле создается системой из двух пластин между которыми приложена разность потенциалов. Результаты работы могут быть использованы при численном моделировании движения заряженных частиц.

Список литературы. 1. Ландау Л.В., Лифшиц Е.М. Теория поля. – 4-е изд. – М.: Физматлит, 1962. – 423 с. 2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики: Уч. пособие для вузов. – М.: Наука, Физматлит, 1983. – 643 с. 3. Фукс Б.А., Шабат Б.Ф. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – 3-е изд. – М.: Наука, 1964. – 388 с. 4. Шимони К. Физическая электроника. – М.: Энергия, 1977. – 608 с. 5. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц / Пер. с англ. под ред. А.А. Коломенского. – М.: Мир, 1980. – 439 с. 6. Бронштейн И.М., Фрайман Б.С. Вторичная электронная эмиссия. – М.: Наука, 1969. – 287 с. 7. Зинченко Н.С. Курс лекций по электронной оптике: Уч. пособие для вузов. – Харьков: ХГУ, 1958. – 275 с. 8. Жигарев А.А. Электронная оптика и электронно-лучевые приборы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1972. – 540 с. 9. Алямовский И.В. Электронные пучки и пушки. – М.: Сов. радио, 1966. – 454 с. 10. Клейнер Э.Ю. Основы теории электронных ламп: Уч. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1974. – 368 с. 11. Грибов Л.А., Прокофьева Н.И. Основы физики: Учебник для вузов. – 2-е изд. – М.: Наука, Физматлит, 1988. – 560 с. 12. Годжаев Н.М. Оптика: Уч. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с. 13. Трофимова Т.И. Курс физики: Уч. пособие для вузов. – 5-е изд. – М.: Высш. шк., 1998. – 542 с. 14. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Уч. пособие для вузов. – 4-е изд. – М.: Наука, Физматлит, 1988. – 224 с. 15. Коваленко В.Ф. Электроника СВЧ. – Т. 2. – М.: Сов. Радио, 1951. – 124 с.

Поступила в редколлегию 28.01.2010