УДК 621.3.01

П.Я. ПРИДУБКОВ, канд. техн. наук, доц., Українська державна академія залізничного транспорту, Харків
І.В. ХОМЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПІ", Харків

ДО ПИТАННЯ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНОСТІ СТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ В ОБ'ЄМНИХ МЕТАЛЕВИХ ЧАСТИНАХ ЕЛЕКТРОУСТАТКУВАННЯ

Исследовано стационарное электрическое поле проводящих сред. Показано, что для описания данного поля может быть применен постулат Максвелла. Использован векторный потенциал, позволяющий перейти к уравнению Пуассона, решаемого с помощью теоремы Грина. Установлена аналитическая зависимость пространственного распределения вектора напряженности стационарного электрического поля в вещественной среде от пространственного распределения вектора плотности тока и электрических свойств этой среды.

Досліджено стаціонарне електричне поле провідних середовищ. Показано, що для опису даного поля може бути застосований постулат Максвелла. Використано векторний потенціал, що дозволяє перейти до рівняння Пуассона, розв'язуваного за допомогою теореми Гріна. Установлено аналітичну залежність просторового розподілу вектора напруженості стаціонарного електричного поля в речовинному середовищі від просторового розподілу вектора щільності струму й електричних властивостей цього середовища.

Вступ. Для зменшення небезпеки дотику до не струмоведучих металевих частин електроустаткування, що нормально не перебувають під напругою, але попадають під напругу при несправності або пробої ізоляції застосовуються захисні заземлення. Крім захисних, є й робочі заземлення, необхідні для нормальної роботи установок, наприклад, заземлення нейтралі трансформатора або нульової середньої точки ЛЕП постійного струму. Заземлення призначене знизити небезпеку поразки струмом, зменшити напругу дотику й крокової напруги до безпечних значень.

Проектування й розрахунок опору заземлення здійснюються з обліком того, що струми витоку (замикання) на землю й напруга дотику не повинні перевищувати припустимі значення і ґрунтуватися на вихідних значеннях напруги дотику, а також можливої щільності струму в не струмоведучих металевих частинах електроустаткування, які непередбачено можуть стати струмоведучими.

Тому проблема дослідження просторового розподілу напруженості стаціонарного електричного поля в об'ємних металевих частинах електроустаткування, тобто визначення вихідних значеннях напруги дотику, можливої щільності струму в не струмоведучих металевих частинах електроустаткування є досить актуальною.

Основна частина. Завданням дійсної роботи є дослідження стаціонарного електричного поля в провідному середовищі електроустаткування й аналітичних залежностей, що описують дане поле. За допомогою цих залежностей визначається просторовий розподіл вектора напруженості стаціонарного електричного поля в деякому об'ємі металевих частин електроустаткування і, як наслідок, підвищується ефективність рішення проблеми захисного заземлення та функціонування електроустаткування в цілому.

Електричне поле постійних струмів у провідному середовищі є полем потенційним. Це пояснюється тим, що в полі постійних струмів розподіл зарядів у просторі залишається стаціонарним, тобто незмінним у часі, тому що при перерозподілі зарядів напруженість поля неминуче змінюється, і струм перестає бути постійним. Коли розподіл зарядів стаціонарний, то поле їх повинне бути тотожно з електростатичним полем відповідно розподілених нерухомих зарядів. Отже, лінійний інтеграл вектора напруженості електричного поля постійних струмів у провідному середовищі уздовж якого-небудь довільного замкнутого контуру, тобто циркуляція даного вектора по будь-якому замкнутому шляху, дорівнює нулю $\left(\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 \right)$. Крім того, вектор напруженості цього поля може бути виражений через градієнт потенціалу $\left(\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi \right)$.

Та обставина, що в даній точці простору одні елементи заряду завдяки наявності струму переміняються іншими, не може позначатися на напруженості електричного поля, оскільки щільність зарядів у кожній точки простору, відповідно з одним із основних постулатів теорії електричного поля, залишається постійною.

Хоча по своїй природі поле електростатичне й електричне поле постійного струму в провідному середовищі різні, проте між двома полями можна провести певну формальну аналогію [1].

Ця аналогія дозволяє застосувати й для опису стаціонарного електричного поля постійного струму в провідному речовинному середовищі одну з найважливіших теорем електростатики теорему Гауса.

В електростатичному полі відповідно до даної теореми потік вектора електричної індукції крізь будь-яку замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів q, що перебувають усередині цієї поверхні: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$ (для однорідного й ізотропного середовища: $\oint_S \varepsilon_a \vec{E} d\vec{S} = q$). Заряди q, що входять у праву частину останнього виразу, відповідно до постулату Максвелла можуть бути як статичними, так і мінливими в часі [2]. Відповідно до постулату Максвелла теорема Гауса залишається справедливою для будь-якого електричного поля, зв'язаного або не пов'язаного з нерухомими, або, як завгодно рушійними зарядами [3].

Таким чином, для стаціонарного електричного поля, що має місце в провідному середовищі (у провідниках і реальних діелектриках), одному з основних положень електродинаміки теоремі Гауса відповідає наступне вираження:

$$\frac{d}{dt}\oint_S \varepsilon_a \vec{E} d\vec{S} = \frac{dq}{dt},$$

або:

$$\oint_S \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_a \vec{E} d\vec{S}\right) = \frac{dq}{dt},$$

чи то:

$$\oint_S \left(\frac{d\varepsilon_a}{dt}\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dt}\varepsilon_a\right) d\vec{S} = \frac{dq}{dt}.$$

Але: $\vec{E} = \mathrm{const}$, тому $\oint_S \frac{d\varepsilon_a}{dt}\vec{E} d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$, звідки $\frac{d\varepsilon_a}{dt} = \gamma$, тому що: $\frac{d}{d\vec{S}}\oint_S \frac{d\varepsilon_a}{dt}\vec{E} d\vec{S} = \frac{d}{d\vec{S}}\frac{dq}{dt}$, або: $\frac{d\varepsilon_a}{dt}\vec{E} = \vec{\delta}$, і як наслідок:

$$\gamma \vec{E} = \vec{\delta}, \tag{1}$$

де $\vec{\delta}$ – щільність повного струму стаціонарного електричного поля в речовинному провідному середовищі.

Для розрахунку електричного поля постійного струму в умовах статики може бути використаний векторний потенціал. Це векторна величина, що плавно змінюється від точки до точки, ротор якої дорівнює вектору $\gamma \vec{E}$ стаціонарного електричного поля речовинного провідного середовища:

$$\gamma\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{A}. \qquad (2)$$

Подання вектора $\gamma\vec{E}$ стаціонарного електричного поля у вигляді ротора від вектора-потенціалу ґрунтується на тому, що дивергенція будь-якого ротора тотожно дорівнює нулю [4], тому що відповідно до диференціальної форми першого закону Кірхгофа дивергенція вектора повного струму $\vec{\delta}$ дорівнює нулю:

$$\operatorname{div}\vec{\delta} = 0,$$

але:

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E} + \varepsilon_a \frac{d\vec{E}}{dt},$$

і з огляду на те, що для стаціонарного електричного поля постійного струму $\vec{E} = \mathrm{const}$, можна записати:

$$\operatorname{div}\gamma\vec{E} = 0. \qquad (3)$$

Якщо підставити в останню рівність (3) замість вектора $\gamma\vec{E}$ його еквівалент у вигляді ротора від вектора-потенціалу $\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)$, то одержимо вираження тотожно рівне нулю:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0.$$

Щоб установити залежність напруженості електричного поля від просторового розподілу вектора щільності струму стаціонарного електричного поля провідного середовища, виділимо елементарний об'єм у речовинному середовищі металевих частин електроустаткування.

Тому що розглянуте електричне поле є стаціонарним, тобто полем, створюваним постійним струмом $\left(\vec{E} = \mathrm{const}, \frac{d\vec{E}}{dt} = 0\right)$, то формула теореми Гауса, постульованої Максвеллом $\left[\oint_S \left(\gamma\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dt}\varepsilon_a\right) d\vec{S} = \frac{dq}{dt}\right]$, здобуває наступний вид:

$$\oint_S \gamma\vec{E}d\vec{S} = \frac{dq}{dt},$$

або:

$$\gamma\vec{E} = \vec{\delta}\,.$$

Отже, зв'язок між векторами $\vec{\delta}$ й $\vec{E}$ визначається також рівнянням:

$$\mathrm{rot}\,\gamma\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{\delta}\,.$$

Тому що вектор $\vec{\delta}$ може бути виражений через векторний потенціал ($\gamma\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$), то:

$$\mathrm{rot}\,\gamma\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{\delta} = \mathrm{rotrot}\,\vec{A} = \mathrm{graddiv}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A}\,. \qquad (4)$$

Векторний потенціал $\vec{A}$ є допоміжною функцією, уведеної з метою спрощення розрахунку, тому в електричному полі постійного струму її можна підкорити вимозі: $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ [3]. Дана вимога означає, що лінії вектора $\vec{A}$ є замкнуті самі на себе лінії. З обліком того, що $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ рівняння (4) здобуває вид:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mathrm{rot}\,\vec{\delta}\,, \text{ або } \quad \nabla^2\vec{A} = -\mathrm{rot}\,\gamma\vec{E}\,. \qquad (5)$$

Останнє вираження являє собою рівняння Пуассона. Для одержання загального рішення даного рівняння необхідно скористатися теоремою Гріна [5], застосовної до кінцевої області *V*, обмеженою поверхнею *S*. У формулі даної теореми необхідно використати векторний градієнт функції $\vec{A}$:

$$\int_V \left(\frac{1}{r}\nabla^2\vec{A} - \vec{A}\nabla^2\frac{1}{r} \right) dV = \oint_S \left(\frac{1}{r}\frac{d\vec{A}}{dn} - \vec{A}\frac{d}{dn}\frac{1}{r} \right) dS\,. \qquad (6)$$

Тут *r* означає відстань довільної точки поля від точки *P*, у якій шукається векторний потенціал.

Тому що відповідно до правил операцій диференціювання векторного аналізу:

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}_0}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\,;$$

$$\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\mathrm{div}\,\vec{r} + \vec{r}\,\mathrm{grad}\frac{1}{r^3}\,,$$

і з огляду на те, що:

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\vec{r}_0 = -\frac{3}{r^4}\vec{r}_0\,, \text{ а } \mathrm{div}\,\vec{r} = 3\,,$$

одержуємо:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - 3\frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r^4} = 0 . \qquad (7)$$

Беручи до уваги рівняння Пуассона (6) і рівності (5) і (7), формулу Гріна можна представити як:

$$-\int_V \frac{\operatorname{rot} \gamma \vec{E}}{r} = \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{A}}{dn} - \vec{A} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) dS . \qquad (8)$$

У розглянутому об'ємі, що включає в собі точку, у якій визначається векторний потенціал, вектор $\vec{A}$ і його похідні є безперервними функціями точки. А от скаляр $1/r$ і його похідні кінцеві й безперервні у всьому просторі, крім розглянутої точки P. Теорема Гріна може бути використана до ділянок простору, де $\vec{A}$ й $1/r$, і їхні похідні безперервні. Тому з об'єму інтегрування варто виключити дану точку, уклавши її в сферу довільно малого радіуса, і застосувати формулу (8) до об'єму, укладеному між зовнішньою поверхнею S всього об'єму й поверхнею S_0 сфери:

$$-\int_V \frac{\mu \operatorname{rot} \vec{J}}{r} = \oint_{S+S_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{A}}{dn} - \vec{A} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) dS,$$

де індекс $S + S_0$ у знака поверхневого інтеграла означає, що інтеграл цей повинен бути розповсюджений по поверхнях S і S_0.

Нормаль до поверхні сфери S_0, спрямована до її центра, прямо протилежна радіус-вектору $\vec{r}$ і є зовнішньою стосовно об'єму інтегрування, тому на поверхні даної сфери:

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{r} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} ;$$

$$\frac{d\vec{A}}{dn} = -\frac{d\vec{A}}{dr} .$$

Якщо поширити поверхневий інтеграл формули теореми Гріна по поверхні S_0 сфери, вносячи в нього отримані у двох останніх рівняннях значення, а також застосувавши теорему про середнє інтегральне вирахування, то одержимо:

$$\oint_{S_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d\vec{A}}{dn} - \vec{A} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right\} dS = \oint_{S_0} \left\{ -\frac{1}{r_0} \frac{d\vec{A}}{dr} - \frac{\vec{A}}{r_0^2} \right\} dS = \left\{ -\frac{1}{r_0} \left(\frac{d\bar{\vec{A}}}{dr} \right) - \frac{1}{r_0^2} \bar{\vec{A}} \right\} \oint_S dS , \qquad (9)$$

де $\bar{\vec{A}}$ й $\left(\overline{\dfrac{d\vec{A}}{dr}}\right)$ – деякі середні значення вектора $\vec{A}$ і його похідній $\dfrac{d\vec{A}}{dr}$ на поверхні сфери S_0.

Інтеграл $\oint\limits_{S_0} dS$ дорівнює загальної поверхні сфери S_0 $4\pi r_0^2$, тому права частина рівняння (9) має вигляд:

$$-4\pi r_0\left(\overline{\frac{d\vec{A}}{dr}}\right)-4\pi\bar{\vec{A}}\ . \tag{10}$$

Якщо тепер спрямувати до нуля радіус r_0, стягуючи сферу S_0 в крапку P, то перший член виразження (10) звернеться в нуль, а середнє значення вектора-потенціалу $\vec{A}$ на поверхні нескінченно малої сфери може бути прийнятий рівним значенню вектора $\vec{A}$ в її центрі P.

Отже,

$$\lim_{r_0\to 0}\oint\limits_{S_0}\left\{\frac{1}{r}\frac{d\vec{A}}{dn}-\vec{A}\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right\}dS=-4\pi\vec{A}\ \ . \tag{11}$$

Таким чином, у межі при $r_0\to 0$ рівняння (8) приймає вид:

$$-\int\limits_V\frac{\text{rot}\,\gamma\vec{E}}{r}=-4\pi\vec{A}+\oint\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{d\vec{A}}{dn}-\vec{A}\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right)dS$$

або:

$$\vec{A}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\frac{\text{rot}\,\gamma\vec{E}}{r}-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{d\vec{A}}{dn}-\vec{A}\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right)dS\ , \tag{12}$$

де об'ємний інтеграл може бути розповсюджений на весь розглянутий об'єм, тому що при $r_0\to 0$ область інтегрування прагне до даного об'єму V, а підінтегральне вираження залишається кінцевим і при $r = 0$.

Останній член рівняння (12) являє собою інтеграл по поверхні, що обмежує об'єм, у якому визначається вектор $\vec{A}$, і виражає залежність значень вектора-потенціалу $\vec{A}$ в об'ємі V від значень цього вектора і його перших похідних на граничній поверхні цього об'єму.

Якщо під об'ємом інтегрування розуміти весь нескінченний простір (тобто видалити обмежуючу V поверхню S в нескінченність) і накласти на $\vec{A}$ і його перші похідні наступні граничні умови: у нескінченності $\vec{A}$ прагне до нуля не повільніше, ніж $1/r$, а його перші похідні по координатах не повільніше, ніж $1/r^2$, тобто $r\vec{A}$ й $r^2 \dfrac{d\vec{A}}{dn}$ при $r \to 0$ залишаються кінцевими, то інтеграл по граничній поверхні стане дорівнювати нулю.

Таким чином:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{rot}\gamma\vec{E}}{r} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{rot}\vec{\delta}}{r} dV. \tag{13}$$

Отже:

$$\gamma\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{rot}\,\vec{\delta}}{r} dV\right). \tag{14}$$

Відповідно до формул векторного аналізу:

$$\int_V \frac{\mathrm{rot}\,\vec{\delta}}{r} dV = -\int \frac{[\vec{\delta}\vec{r}\,]}{r^3} dV\ ;$$

тому:

$$\gamma\vec{E} = -\mathrm{rot}\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{\delta}\vec{r}\,]}{r^3} dV = -\frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{rot}\frac{[\vec{\delta}\vec{r}\,]}{r^3} dV\ . \tag{15}$$

З огляду на те, що [6]:

$$\mathrm{rot}[\vec{\delta}\vec{r}\,]r^n = \vec{\delta}(n+2)r^n - \vec{r}(\vec{\delta}\vec{r}\,)nr^{n-2}\ ,$$

одержуємо:

$$\gamma\vec{E} = -\frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{rot}\frac{[\vec{\delta}\vec{r}\,]}{r^3} dV = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\vec{\delta}}{r^3} - \frac{3\vec{r}\left(\vec{\delta}\vec{r}\right)}{r^5}\right) dV\ ;$$

отже:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\gamma}\int_V \mathrm{rot}\frac{[\vec{\delta}\vec{r}\,]}{r^3} dV = \frac{1}{4\pi\gamma}\int_V \left(\frac{\vec{\delta}}{r^3} - \frac{3\vec{r}\left(\vec{\delta}\vec{r}\right)}{r^5}\right) dV\ . \tag{16}$$

Висновки. Таким чином, просторовий розподіл вектора напруженості стаціонарного електричного поля в деякому об'ємі речовинного середовища залежить від просторового розподілу вектора щільності струму в даному об'ємі й електричних властивостях цього середовища. Значення вектора напруженості убуває не повільніше, ніж $1/r^3$ і визначається геометричними параметрами об'єму речовинного середовища. Установлена аналітична залежність може бути використана, наприклад, при розрахунку опору захисного й робочого заземлення електротехнічного встаткування з метою підвищення ефективності його функціонування.

Список літератури: **1.** *Сукачев А.П.* Теоретические основы электротехники. Часть I. Физические основы электротехники. – Харьков, 1959. – 460 с. **2.** *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с. **3.** *Федоров Н.Н.* Основы электродинамики. - М.: Высшая школа, 1965. 328 с. **4.** *Шимони К.* Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 773 с. **5.** *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с. **6.** *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960. – 618 с.

Надійшла до редколегії 04.07.2010