УДК 621.396

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук,
Е.В. РОГОЖКИН, д-р физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ» (г. Харьков)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА ПРИ ДИСКРЕТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИГНАЛОВ НР

Розглянуто типову задачу математичної статистики, що відноситься до корельованих послідовностей з фіксованим рівнем статистичного зв'язку між ними і використовується в іоносферних вимірюваннях. Одержано вирази, що описують розподіли для автокореляційної функції.

Is it considered correlation functional, determined on complex-value normal Markov process. The expressions describing statistical properties such functional are received.

1. Решение практических задач при ионосферных исследованиях основывается на применении методов математической статистики. Способ получения информации об ионосфере, который в настоящее время является наиболее эффективным, состоит в измерениях автокорреляционных функций сигнала некогерентного рассеяния. Последующее оценивание характеристик ионосферной плазмы сводится к сопоставлению экспериментальных данных с теоретическими кривыми и принятию решения в соответствии с методом наименьших квадратов.

В силу свойств сигнала некогерентного рассеяния, который принимается к тому же на фоне гауссового шума, последовательность отсчетов $\{z_1, z_2, \ldots\}$ оказывается случайной. Следовательно, случайными оказываются и оценки автокорреляционной функции.

Ниже будет рассмотрен аддитивный автокорреляционный функционал следующего вида

$$K_m = \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}\left(z_n^* z_{n+m} + z_n z_{n+m}^*\right), \tag{1}$$

где $\{z_1, z_2, \ldots, z_{2N}\}$ – выборка объемом $2N$, извлеченная из генеральной совокупности отсчетов нормального комплекснозначного марковского процесса $z(t)$, $m = \tau/\Delta$ – дискретный интервал задержки ($m = 0,1,\ldots, N$), Δ – элемент задержки.

Функционалу (1) можно поставить в соответствие его интегральный аналог, определенный на непрерывной реализации нормального марковского процесса, следующего вида

$$K_\tau = \frac{1}{2}\int_0^T \left[z^*(t)z(t+\tau) + z(t)z^*(t+\tau)\right]dt \qquad (2)$$

где T – временной интервал наблюдения, τ – временная задержка.

В силу статистической связи между значениями $z(t)$ нормального марковского процесса (НМП) [1] распределение корреляционного функционала K_m (или K_τ) будет иметь существенно различный вид в зависимости от N (или T), m (или τ) и параметров НМП. В этой связи возникает вопрос о степени влияния коррелированности данных на распределение рассматриваемого функционала (прямая задача).

Целью настоящей работы является, таким образом, изучение влияния коррелированности отсчетов на распределение функционала (1) или (2). При этом анализируются коррелированные последовательности, извлеченные из НМП. В реальных ионосферных экспериментах они являются комплексно-значными, т.к. соответствуют либо сигналам после синхронного детектирования, либо отсчетам взятым на промежуточной частоте с интервалом, равным четверти её периода [2].

Рассмотрение будет проведено при следующем допущении: используемые ниже наборы отсчетов $\{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{2N}\}$ - суть совокупность сечений объемом $2N+1$, взятых с постоянным временным шагом Δ из реализации комплекснозначного нормального марковского процесса (НМ–процесса) [1,3,4] $z(t)$ с интенсивностью σ и декрементом ν

Далее скобками $\langle . \rangle$ будем обозначать операцию нахождения математического ожидания относительно рассматриваемых случайных величин.

2. *Теорема* 1. В принятых предположениях аддитивный функционал

$$K_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |z_n|^2 \qquad (3)$$

имеет равновесную производящую функцию

$$Q(\lambda) \equiv Q(\lambda; q, N) \qquad \langle \exp(-\lambda K_0) \rangle \qquad (4)$$

следующего вида

$$Q(\lambda; q, N) = \frac{(1-q^2)R}{\left(a_+ - q^2\right)^2 a_+^{N-1} - \left(a_- - q^2\right)^2 a_-^{N-1}}, \qquad (5)$$

где $q = \exp(-\nu\Delta)$ – коэффициент корреляции соседних отсчетов КОУ–процесса и

$$a_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 + q^2 + N^{-1}\lambda\sigma(1-q^2) \pm R\right), \tag{6a}$$

$$R = \sqrt{\left(1 + q^2 + N^{-1}\lambda\sigma(1-q^2)\right)^2 - 4q^2} \tag{6b}$$

Доказательство.

Для вычисления (4) используем равновесную $(k=0)$ и переходные $(k=1,2,...,n)$ плотности распределения вероятностей для соответствующих сечений используемого НМ–процесса:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi\sigma}\exp\left(-\frac{|z_0|^2}{\sigma}\right), \tag{7}$$

$$f(z_k, k\Delta;\ z_{k+1}, (k+1)\Delta) = \frac{1}{\pi(1-q^2)\sigma}\exp\left(-\frac{|z_{k+1} - qz_k|^2}{(1-q^2)\sigma}\right). \tag{8}$$

Введем обозначение для $(N+1)$–компонентных векторов $Z = (z_0, z_1,...,z_N)$ и $U = (u_0, u_1,...,u_N)$. В интеграле (4) выполним двойное $(N+1)$–кратное Фурье–преобразование на комплексной u–плоскости относительно набора комплекснозначных переменных $(u_0, u_1,...,u_N)$ следующего вида

$$\exp\left(-|z|^2\right) = \pi^{-1}\int \exp\left[-|u|^2 + i\left(uz^* + u^* z\right)\right] d^2u\ . \tag{9}$$

Такое преобразование дает линейную комбинацию в показателе экспоненты для случайного вектора Z

$$Q(\lambda) = \pi^{-N-1}\int d^{2N+2}U\left\langle \exp\left[-\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2 + i\lambda^{1/2}\sum_{n=0}^{N}\left(u_n z_n^* + z_n u_n^*\right)\right]\right\rangle, \tag{10}$$

где обобщенный дифференциал $d^{2N+2}u = d^2u_0 d^2u_1 \cdots d^2u_N$, а интегрирование ведется по набору из $(N+1)$ комплексных переменных. Пользуясь гауссовостью вектора Z, получим из (8)

$$Q(\lambda)=\pi^{-N-1}\int d^{2N+2}U\exp\left(-\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2+\lambda\left\langle\sum_{n=0}^{N}\left[u_n z_n^*+u_n^* z_n\right]\right\rangle\right), \qquad (11)$$

и такая статистическая конструкция окажется полезной ниже. Равенство (10) имеет вид гауссова интеграла, поскольку в (11) под экспонентой содержится линейное выражение относительно вектора Z, а весовые коэффициенты в (7) и (8) – нормальные. Поэтому

$$Q(\lambda)=\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}, \qquad (12)$$

где A – матрица показателя экспоненты в выражении (10).

Перейдем к нахождению искомого определителя $\det(A)$. Матрица A размером $(N+1)\times(N+1)$ является трехдиагональной, она может быть записана в виде

$$A= \qquad (13)$$

$$=\begin{pmatrix} 1+\lambda p\sigma & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 1+\lambda p\sigma+q^2 & -q & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -q & 1+\lambda p\sigma+q^2 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1+\lambda p\sigma \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителя $\det(A)$ выделим в матрице (13) блок-матрицу B_{N-1} размером $(N-1)\times(N-1)$ путем исключения верхней и нижней строк, а также левого и правого столбцов. Получившаяся матрица B_{N-1} имеет следующие матричные элементы:

$(B_{N-1})_{n,m}=1+\lambda\sigma p+q^2$ для диагональных элементов,

$(B_{N-1})_{n,n+1}=(B_{N-1})_{n+1,n}=-q$ для наддиагональных и поддиагональных элементов,

$(B_{N-1})_{n,m}=0$ для остальных элементов.

В силу (13) имеем для искомого определителя матрицы A

$$\det(A) = (1+\lambda\sigma)\det(B_{N-1}) - 2q^2(1+\lambda\sigma)\det(B_{N-2}) + q^2 \qquad (14)$$

Из вида матрицы B_{N-1} вытекает, что она является матрицей Якоби. Использование стандартной процедуры [4] позволяет найти определитель

$$\det(B_k) = R^{-1}\left(a_+^{k+1} - a_-^{k+1}\right), \qquad (15)$$

где $1 \le k \le (N-1)$.

Нетрудно теперь убедиться в том, что

$$\det(A) = \left(a_+ - q^2\right)^2 a_+^{N-1} - \left(a_- - q^2\right)^2 a_-^{N-1} \qquad (16)$$

С учетом условия нормировки $Q(0)=1$, для производящей функции функционала (3) приходим к результату - выражению (5).

3. *Теорема* 2.

Производящая (характеристическая) функция

$$Q_m(\lambda) = \left\langle \exp(-\lambda K_m) \right\rangle \qquad (17)$$

случайных значений корреляционного функционала K_m для заданного интервала задержки $m\Delta > 0$ имеет вид

$$Q_m(\lambda) = Q_0(\lambda_+)Q_0(\lambda_-), \qquad (18)$$

с производящими параметрами

$$\lambda_+ = \frac{\lambda}{2}[1+\exp(-m\nu\Delta)], \qquad \lambda_- = \frac{\lambda}{2}[1-\exp(-m\nu\Delta)], \qquad (19)$$

которые выражаются через исходный производящий параметр λ в (4).

Доказательство.

Для вычисления нового безусловного среднего (17) представим корреляционный функционал K_m в виде неприводимой квадратичной формы

$$K_m = \frac{1}{4N}\sum_{n=1}^{N}\left[\left|z_n + z_{n+m}\right|^2 - \left|z_n - z_{n+m}\right|^2\right]. \qquad (20)$$

Введем обозначение для $(N+1)$-компонентных векторов $U=(u_0,\ldots,u_N)$, $V=(v_0,\ldots,v_N)$. В интеграле – безусловном среднем (17) – выполним два $(N+1)$-кратных Фурье–преобразования относительно двух наборов комплекснозначных переменных, что, как и выше, даст линейную комбинацию в показателе экспоненты для случайного вектора Z

$$Q(\lambda)=\pi^{-2N-2}\int d^{2N+2}U\int d^{2N+2}V\left\langle \exp\left[-\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2-\sum_{n=0}^{N}|v_n|^2+W\right]\right\rangle, \qquad (21)$$

где

$$W=i\sqrt{\frac{\lambda}{4N}}\sum_{n=0}^{N}\left[u_n\left(z_n^*+z_{n+m}^*\right)+u_n^*\left(z_n+z_{n+m}\right)\right]+ \qquad (22)$$

$$+i\sqrt{\frac{-\lambda}{4N}}\sum_{n=0}^{N}\left[v_n\left(z_n^*+z_{n+m}^*\right)+v_n^*\left(z_n+z_{n+m}\right)\right],$$

а интегрирование осуществляется по двум наборам из $(N+1)$ комплексных переменных. Случайная величина W является линейным функционалом случайной величины Z и в связи с этим также нормальна. Как можно убедиться, случайные величины

$$S_+=\sum_{n=0}^{N}\left[u_n\left(z_n^*+z_{n+m}^*\right)+u_n^*\left(z_n+z_{n+m}\right)\right], \qquad (23a)$$

$$S_-=\sum_{n=0}^{N}\left[u_n\left(z_n^*-z_{n+m}^*\right)+u_n^*\left(z_n-z_{n+m}\right)\right], \qquad (23b)$$

являются взаимно некоррелированными. Поэтому из их нормальности вытекает, что они и взаимно независимы. Следовательно, усреднение в (21) возможно осуществлять раздельно, рассматривая две независимые случайные величины

$$W_+=i\sqrt{\frac{\lambda}{4N}}\sum_{n=0}^{N}\left[u_n\left(z_n^*+z_{n+m}^*\right)+u_n^*\left(z_n+z_{n+m}\right)\right], \qquad (24a)$$

$$W_-=i\sqrt{\frac{-\lambda}{4N}}\sum_{n=0}^{N}\left[v_n\left(z_n^*-z_{n+m}^*\right)+v_n^*\left(z_n-z_{n+m}\right)\right], \qquad (24b)$$

что дает

$$Q(\lambda)=\pi^{-N-1}\int d^{2N+2}U\left\langle \exp\left[-\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2+W_+\right]\right\rangle\times \tag{25}$$

$$\times\pi^{-N-1}\int d^{2N+2}V\left\langle \exp\left[-\sum_{n=0}^{N}|v_n|^2+W_-\right]\right\rangle .$$

Прямыми вычислениями моментов рассматриваемых случайных величин получим

$$\langle W_+\rangle=0\,,\quad \left\langle |W_+|^2\right\rangle=\frac{1}{2N}\left[1+\exp(-m\nu\Delta)\right]\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2 \tag{26a}$$

$$\langle W_-\rangle=0\,,\quad \left\langle |W_-|^2\right\rangle=\frac{1}{2N}\left[1-\exp(-m\nu\Delta)\right]\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2 \tag{26b}$$

Основываясь на свойствах гауссовых интегралов с помощью найденных в (26) выражений получим для искомой производящей функции

$$Q(\lambda)=\pi^{-N-1}\int d^{2N+2}U\exp\left[-\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2+\left\langle |W_+|^2\right\rangle\right]\times$$

$$\times\pi^{-N-1}\int d^{2N+2}V\exp\left[-\sum_{n=0}^{N}|v_n|^2+\left\langle |W_-|^2\right\rangle\right]. \tag{27}$$

Поэтому интегрирование в (21) сводится к произведению двух интегралов, которые имеют вид $Q_0(\lambda_+)$ или $Q_0(\lambda_-)$. Отсюда и вытекает утверждение (17) теоремы.

4. Из выражения (18) для производящей (характеристической) функции $Q_m(\lambda)$ следует, что плотность распределения вероятностей $f_m(\eta)$ случайных значений η корреляционного функционала K_m можно интерпретировать как свертку

$$f_m(\eta)=(f_+ * f_-)(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}f_+(\xi)f_-(\eta-\xi)d\xi \tag{28}$$

плотностей распределения вероятностей $f_+(\eta)$ и $f_-(\eta)$, связанных со случайными величинами W_+ и W_-. В свою очередь, функции $f_+(\eta)$ и $f_-(\eta)$, как и сама плотность $f_m(\eta)$, определяются как результат обратного преобразования Лапласа (с учетом знака величины W_-) от соответствующих производящих функций $Q_0(\lambda_+)$ и $Q_0(\lambda_-)$, например

$$f_+(\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp(\lambda\eta) Q_+(\lambda)\, d\lambda \tag{29}$$

с соответствующим контуром интегрирования C на комплексной λ – плоскости.

5. Таким образом, найденные аналитические выражения для производящей (характеристической) функции $Q_m(\lambda)$ полностью описывают статистические свойства корреляционного функционала K_m, определенного на комплекснозначном стохастическом нормальном марковском процессе. Полученные результаты применимы для вещественных переменных и могут быть обобщены для случайных многомерных переменных, в частности, в задачах анализа сигнала некогерентного рассеяния, если его представить случайным многомерным вектором с разной степенью коррелированности его компонентов [5,6]. Полученные выражения могут быть использованы при обработке результатов ионосферного эксперимента различного типа для всех случаев, когда данные опыта оказываются коррелированными.

Список литературы: 1. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с. 2. *Рогожкин Е.В.* Измерение параметров ионосферной плазмы по корреляционной функции сигнала некогерентного рассеяния / Ионосферные исследования. 27. – М., 1979. 3. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1979. – 404 с. 4.. *Мазманишвили А.С.* Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. – К.: Наукова думка, 1987. – 224 с. 5. *Рогожкин Е.В., Мазманишвили А.С.* Анализ зондирующих сигналов для исследования ионосферы методом некогерентного рассеяния // Электромагнитные явления, (Харьков). 2, № 3, 1998, 22–34. 6. *Мазманишвили А.С., Рогожкин Е.В.* Коррелированные последовательности в задачах статистического оценивания // Вестник Харьковского государственного политехнического университета, (Харьков), Вып. 103, 2000, с. 67-70.

Поступила в редколлегию 08.04.03