

Откуда видно, что $|\det A|$ не зависит от x и y .

Рассмотрим, какое влияние на изображение оказывает преобразование перспективы.

2. Анализ свойств преобразований перспективы. Изучим характер изменения распределения энергии изображения при преобразовании перспективы. Для этого установим, как отображается каждая точка изображения при преобразовании перспективы вида:

$$B_0(x, y) = B\left(\frac{x}{h_1x + h_2y + 1}, \frac{y}{h_1x + h_2y + 1}\right), \quad (7)$$

где $h_1 = h \cos a$, $h_2 = h \sin a$ – параметры преобразования;

B , B_0 – входное и эталонное изображения соответственно.

Пусть $dP = \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}$. Известно [3], что $\det(dP)$ дает информацию

о преобразовании каждой точки изображения, а $|\det(dP)|$ представляет коэффициент сжатия этой точки. Поскольку

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1 + h_2 y}{(h_1 x + h_2 y + 1)^2}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-h_2 x}{(h_1 x + h_2 y + 1)^2};$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-h_1 y}{(h_1 x + h_2 y + 1)^2}; \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1 + h_1 x}{(h_1 x + h_2 y + 1)^2},$$

то

$$\det(dP) = \frac{1}{(h_1 x + h_2 y + 1)^3}. \quad (8)$$

Тогда, из выражения (5) следует, что если входное B и эталонное B_0 изображения отличаются только преобразованием перспективы вида (7), которая не выводит изображение за пределы поля зрения D , то энергия этих изображений имеет зависимость:

$$\iint_D B(x, y) dx dy = \iint_D \frac{B_0(x, y) dx dy}{|(h_1 x + h_2 y + 1)^3|} \quad (9)$$

3. Построение математической модели критерия идентификации проективных преобразований и алгоритма нормализации. Исходя из того,

что $|\det \Pi| = |\det A| |\det P_a|$ (10), и $|\det A|$ не зависит от x и y , а $|\det P_a|$ – зависит от них, можно определить критерий присутствия проективных преобразований.

Если $|\det P_a| = 1$, то преобразования перспективы отсутствуют и из (3) можно сказать, что на изображении присутствуют только аффинные преобразования.

Рассмотрим для входного и искаженного изображения следующее отношение $\frac{E_B}{S}$, где $E_B = \iint_D B(x, y) dx dy$ – энергия изображения $B(x, y)$, а $S = \iint_D \text{sign}(B(x, y)) dx dy$ – площадь изображения $B(x, y)$. Аналогично можно определить энергию и площадь эталонного изображения $B_0(x, y)$ соответственно как $E_{B_0} = \iint_D B_0(x, y) dx dy$ и $S_0 = \iint_D \text{sign}(B_0(x, y)) dx dy$.

Пусть $B_0(x, y)$ – точка эталонного изображения, $B(x, y)$ – образ точки $B_0(x, y)$ при преобразовании (2). Тогда точка $B_0(x, y)$ вместе со своей бесконечно малой окрестностью связана со своим образом соотношением в рамках аффинной модели:

$$B(x, y) = |\det A| B_0(x, y).$$

Проинтегрируем по всей области, в которой находится рассматриваемое изображение. В результате получим функциональную зависимость энергий входного и эталонного изображений:

$$\iint_D B(x, y) dx dy = \iint_D |\det A| B_0(x, y) dx dy,$$

т.к. $|\det A| = z$ и не зависит от x и y , то $|\det A|$ можно вынести за интеграл и получим:

$$\iint_D B(x, y) dx dy = |\det A| \iint_D B_0(x, y) dx dy.$$

Подставив полученные результаты в отношение, получим:

$$\frac{E_B}{S} = \frac{|\det A| \iint_D B_0(x, y) dx dy}{|\det A| \iint_D \text{sign}(B_0(x, y)) dx dy} = \frac{\iint_D B_0(x, y) dx dy}{\iint_D \text{sign}(B_0(x, y)) dx dy}.$$

Видно, что для аффинных преобразований выполняется условие:

$$\frac{E_B}{S} = \frac{E_{B_0}}{S_0}. \quad (11)$$

Действуя по аналогии, исходя из (9) получим выражения для преобразования перспективы:

$$\frac{E_B}{S} = \frac{\iint |\det P_a| B_0(x, y) dx dy}{\iint |\det P_a| \text{sign}(B_0(x, y)) dx dy},$$

$$\frac{E_{B_0}}{S_0} = \frac{\iint B_0(x, y) dx dy}{\iint \text{sign}(B_0(x, y)) dx dy},$$

откуда можно сделать вывод, что для преобразования перспективы:

$$\frac{E_B}{S} \neq \frac{E_{B_0}}{S_0}. \quad (12)$$

Т.о. исследовав свойства аффинных и проективных преобразований, на основе (3), (10), (11), (12) можно предложить критерий присутствия проективных преобразований. На основании того, что перспектива, в отличие от аффинных преобразований, вносит изменение в перераспределение энергии на изображении, построим функционал вида:

$$\Phi_1 = \frac{S}{E_B} - \frac{S_0}{E_{B_0}}, \quad (13)$$

где $E_B = \iint_D B(x, y) dx dy$ и $E_{B_0} = \iint_D B_0(x, y) dx dy$ – энергия изображения $B(x, y)$ и $B_0(x, y)$ соответственно;

S и S_0 – площадь изображения $B(x, y)$ и $B_0(x, y)$ соответственно.

Исходя из (9), для нормализации преобразований целесообразно будет ввести также функционал Φ_2 вида:

$$\Phi_2 = \iint_D B(x, y) dx dy - \iint_D \frac{B_0(x, y) dx dy}{\left[(h_1 x + h_2 y + 1)^3 \right]}. \quad (14)$$

Исходя из описанных свойств аффинной и проективной группы сформулируем критерий присутствия на изображении проективных искажений. Если величина функционала Φ_1 или Φ_2 равна нулю, то изображение относится к аффинной группе, иначе к проективной группе.

На основании предложенного критерия можно предложить процедуру нормализации проективных преобразований, которая заключается в многократном выполнении преобразования перспективы с некоторым шагом с вычислением функционала (13) или (14). Преобразования продолжаются до тех пор, пока функционал не будет равен нулю. Этот принцип осуществления нормализации соответствует принципу построения нормализатора следящего типа.

Исходя из того, что проективная группа представляется в виде композиции аффинного и перспективного преобразования, не влияющего на параметры аффинного, в свою очередь перспективное преобразование представляется в виде композиции коммутативных преобразований однопараметрической перспективы вдоль осей OX и OY , то:

$$\Pi = AP_a(h) = AP_x(h_1)P_y(h_2) = AP_y(h_2)P_x(h_1).$$

Т.о. мы можем найти параметры перспективы корреляционным методом по двум параметрам, после чего перейти к новому изображению, которое отличается от эталонного изображения только аффинным преобразованием.

Приведем алгоритм нормализации преобразований перспективы.

Алгоритм:

1. Задаем первоначальное значение для h_1, h_2 .
2. Вычисляем функционал (13) или (14).
3. Если он не равен нулю, то увеличиваем один из параметров h_1, h_2 на некоторую величину Δh и переходим к п.1, иначе h_1, h_2 являются искомым значением.
4. Нормализуем изображение, используя матрицу преобразования (5).

На практике условие равенства нулю вычисляемых функционалов из-за погрешности вычислений заменяют на условие $|\Phi| < \epsilon$, где ϵ – некоторое малое $\epsilon > 0$.

4 Экспериментальные исследования. Целью экспериментальных исследований является проверка устойчивости критерия, а также установление значения ϵ для эффективной работы критерия. Критерий состоит в том, чтобы на начальном этапе определить к какой группе преобразований относится искажение изображения. Также существует возможность установить некоторую априорную информацию (в частности, пределы допустимых значений параметров преобразований) [4], что существенно повышает быстродействие алгоритмов. эталонное изображение объекта искажалось проективными преобразованиями, и с помощью алгоритмов находились параметры преобразования. Устойчивость критерия оценивалась сравнением заданных значений параметров с найденными.

Последовательность экспериментов состояла в следующем:

