УДК 681.519

С.В. КАДИГРОБ, ген. директор КП ПТП «Вода» (г.Харьков),
О.В. СЕРАЯ, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

МНОГОФАКТОРНЫЕ БИСЛУЧАЙНЫЕ МОДЕЛИ БЕЗОТКАЗНОСТИ СИСТЕМ

Розглянуто задачу оцінки безвідмовності систем, режим і умови функціонування яких визначаються значеннями випадкових величин з відомою щільністю розподілу. Відповідна математична модель є біслучайною. Запропонована методика розрахунку щільності розподілу тривалості безвідмовної роботи. Побудована напівмарківська модель функціонування системи. Методика доведена до кінцевих співвідношень в окремому випадку, коли чинники, які задають режим і умови експлуатації системи, є нормально розподіленими випадковими величинами.

Рассмотрена задача оценки безотказности систем, режим и условия функционирования которых определяются значениями случайных величин с известными плотностями распределения. Соответствующая математическая модель является бислучайной. Предложена методика расчета плотности распределения продолжительности безотказной работы. Построена полумарковская модель функционирования системы. Методика доведена до конечных соотношений в частном случае, когда факторы, задающие режим и условия эксплуатации системы, являются нормально распределенными случайными величинами.

The task of the faultlessness systems estimation is considered. The mode and operating of this systems are determined the random variables with the known probability density functions. The corresponding mathematical model is bifuzzy. The calculation method of probability density function of faultless work is offered. The half-Markov model of functioning of the system is built. A method is taken to eventual correlations in special case, when factors are the normally distribution variables.

Введение. Оценка безотказности систем является составной частью более общей задачи оценки эффективности функционирования систем в зависимости от режима и условий эксплуатации. Традиционный подход к решению задачи оценки безотказности состоит в следующем. Вводится набор факторов $F=(F_1,F_2,...,F_m)$, численные значения которых задают условия и режим эксплуатации системы. Далее показатель безотказности системы, например, интенсивность отказов $\lambda(t)$, определяется как некая функция набора факторов F в виде

$$\lambda(F,t)=f(F_1,F_2,...,F_m;t). \qquad (1)$$

Понятно, что возможности и эффективность использования соотношения (1) для решения конкретных задач зависят от того, каким образом выбрана аппроксимация этого соотношения. На практике широко используется регрессионное описание (1) в виде линейного по параметрам, но нелинейного по факторам полинома

$$\lambda(F,t)=b_0+\sum_{i=1}^{m+1}b_iF_i+\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{i_2>i_1}b_{i_1i_2}F_{i_1}F_{i_2}+\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{i_2>i_1}\sum_{i_3>i_2}b_{i_1i_2i_3}F_{i_1}F_{i_2}F_{i_3}+$$

$$+\ldots+\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{i_2>i_1}\ldots\sum_{i_d>i_{d-1}}b_{i_1i_2\ldots i_d}F_{i_1}F_{i_2}\ldots F_{i_d}. \qquad (2)$$

Здесь

$F_{m+1}=t$,

$b_{i_1i_2\ldots i_d}$ - коэффициент, характеризующий влияние на интенсивность отказов $\lambda(F,t)$ взаимодействия факторов $F_{i_1}F_{i_2}\ldots F_{i_d}$.

Соотношение (2) называется полиномом Колмогорова – Габора [1,2] и позволяет оценить значение интенсивности отказов для любого набора значений $F_1,F_2,...,F_m,t$. Отметим, что гораздо более удобная для практических целей аппроксимация выражения (1) будет получена, если фактор t («возраст» системы) выделить из числа взаимодействующих факторов следующим образом

$$\lambda(F,t)=a_0(F)+a_1(F)t+\ldots+a_d(F)t^d. \qquad (3)$$

Из этого соотношения, в частности, ясно, что скорость старения систем определяется коэффициентом $a_1(F)$, а ускорение старения – коэффициентом $a_2(F)$.

Зависимость интенсивности отказов системы в форме (3) позволяет решать задачи оценки и прогнозирования надежности систем. Например, вероятность безотказной работы системы в течение интервала $[0,T]$ при ее эксплуатации в условиях F определяется по формуле

$$P[0,T]=exp\left\{-\int_0^T\lambda(F,t)dt\right\}=exp\left\{-\int_0^T\sum_{i=0}^{d}a_i(F)t^idt\right\}=$$

$$=exp\left\{-\sum_{i=0}^{d}a_i(F)\frac{T^{i+1}}{i+1}\right\}. \qquad (4)$$

Более детализованное описание зависимости показателей надежности от численного значения факторов будет получено, если ввести совокупность регрессионных соотношений вида

$$a_i(F_1,F_2,...,F_m)=\sum_{k=1}^{m}c_{ik}F_k, \quad i=0,1,2,...,d. \qquad (5)$$

Тогда соотношение (3) примет вид

$$\lambda(F,t)=\sum_{i=0}^{d}\sum_{k=1}^{m}(c_{ik}F_k)t^i, \qquad (6)$$

а вероятность безотказной работы системы на интервале $[0,T]$ будет вычисляться по формуле

$$P[0,T]=exp\left\{-\sum_{i=0}^{d}\sum_{k=1}^{m}(c_{ik}F_k)\frac{T^{i+1}}{i+1}\right\}. \qquad (7)$$

При этом, неизвестные коэффициенты (c_{ik}) оцениваются по результатам контроля безотказности системы в ходе ее эксплуатации с использованием, например, метода максимума правдоподобия [3,4].

С использованием (7) вероятность появления случайного события – отказ системы на интервале $[0,T]$ будет равна

$$Q[0,T]=1-P[0,T]=1-exp\left\{-\sum_{i=0}^{d}\sum_{k=1}^{m}(c_{ik}F_k)\frac{T^{i+1}}{i+1}\right\}. \qquad (8)$$

Задача оценки безотказности систем существенно усложняется, если условия и режим их эксплуатации меняются, причем, для многих реальных систем случайным образом. Поставим задачу оценки безотказности систем в этой ситуации.

Постановка задачи. Пусть численные значения факторов $F_1,F_2,...,F_m$ - случайные величины с известными законами распределения $\varphi_1(F_1),\varphi_2(F_2),...,\varphi_m(F_m)$. Понятно, что при этом значение интенсивности отказов (6), а также вероятности безотказной работы (7) и отказа (8) тоже будут случайными величинами. Математическая модель расчета значений вероятностей (7) и (8) в соответствии с терминологией, введенной в [5], является бислучайной. Рассмотрим методику построения бислучайной модели безотказности систем.

Основные результаты. Перепишем соотношение (7) следующим образом:

$$P[0,T] = exp\left\{-\sum_{i=0}^{d}\sum_{k=1}^{m} d_{ik} F_k\right\} = exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} F_k \sum_{i=0}^{d} d_{ik}\right\}. \tag{9}$$

Введем неслучайные коэффициенты

$$D_k = \sum_{i=0}^{d} d_{ik} = \sum_{i=0}^{d} c_{ik} \frac{T^{i+1}}{i+1}, \; k = 1,2,...,m.$$

Тогда (9) запишется в виде

$$P[0,T] = exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} D_k F_k\right\}.$$

Таким образом, случайная величина $P[0,T]$ является линейной комбинацией совокупности случайных величин $F_1, F_2, ..., F_m$. Поскольку плотности распределения этих величин, по предположению, известны, то в соответствии со стандартными методами теории вероятностей [6] может быть определена плотность распределения случайной величины (9). Следует, однако, заметить, что сложность решения этой задачи для произвольных плотностей $\varphi_k(F_k)$, $k = 1,2,...,m$, быстро растет с увеличением числа факторов. Вместе с тем, решение может быть легко получено в частном случае, когда случайные величины $F_1, F_2, ..., F_m$ распределены нормально. В соответствии с этим пусть

$$\varphi_k(F_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} exp\left\{-\frac{(F_k - m_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\}, \; k = 1,2,...,m. \tag{10}$$

При этом плотность распределения случайной величины $P[0,t]$ будет иметь вид

$$\varphi(P[0,t]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma(t)} exp\left\{-\frac{(P - m_\Sigma(t))^2}{2\sigma_\Sigma^2(t)}\right\}, \tag{11}$$

где

$$m_\Sigma(t) = \sum_{k=1}^{m} D_k(t) m_k, \; \sigma_\Sigma^2(t) = \sum_{k=1}^{m} D_k^2(t)\sigma_k^2. \tag{12}$$

Тогда плотность распределения продолжительности безотказной работы определяется соотношением

$$\varphi(t) = \int_0^1 \varphi(P[0,t])dp =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma(t)} exp\left\{-\frac{(P - m_\Sigma(t))^2}{2\sigma_\Sigma^2(t)}\right\} dp \; \overline{\frac{p - m_\Sigma(t)}{\sigma_\Sigma(t)} = u}$$

$$= \int_{\frac{-m_\Sigma(t)}{\sigma_\Sigma(t)}}^{\frac{1-m_\Sigma(t)}{\sigma_\Sigma(t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{1 - m_\Sigma(t)}{\sigma_\Sigma(t)}\right) + \Phi\left(\frac{m_\Sigma(t)}{\sigma_\Sigma(t)}\right)\right]. \tag{13}$$

Полученные соотношения позволяют построить полумарковскую модель безотказности системы. Опишем эту модель. Введем

E_0 - состояние нормального функционирования системы;

E_1 - состояние отказа системы, в котором происходит ее восстановление;

$\varphi_{01}(t) = \varphi(t)$ - плотность распределения случайной продолжительности пребывания системы в состоянии нормального функционирования E_0 до перехода в состояние отказа E_1 (параметры этой плотности распределения рассчитываются по формулам (9) - (13));

$\varphi_{10}(t)$ - плотность распределения случайной продолжительности восстановления;

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - матрица вероятностей перехода для марковской цепи, вложенной в полумарковский процесс переходов системы из состояния E_0 в состояние E_1 и обратно, описываемый плотностями распределения $\varphi_{01}(t)$, $\varphi_{10}(t)$.

Тогда, как известно [7], стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет вид

$$\Phi_s = \frac{\pi_s T_s}{\sum_{k=0}^{1} \pi_k T_k}, \; s = 0{,}1,$$

где (π_0, π_1) - финальное распределение вероятностей состояний для вложенной марковской цепи,

T_s - средняя продолжительность пребывания системы в состоянии s до ухода, $s = 0{,}1$.

Финальное распределение вероятностей состояний для марковской цепи, вложенной в изучаемый полумарковский процесс найдем, решая векторно-матричное уравнение

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1)P = (\pi_0, \pi_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

совместно с условием нормировки

$$\pi_0 + \pi_1 = 1. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует, что

$$\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Далее

$$T_0 = \int_0^{\infty} t\varphi_{01}(t)dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t}{2\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}(t)}\left[\Phi\left(\frac{1 - m_{\Sigma}(t)}{\sigma_{\Sigma}(t)}\right) + \Phi\left(\frac{m_{\Sigma}(t)}{\sigma_{\Sigma}(t)}\right)\right]dt \;, \tag{18}$$

$$T_1 = \int_0^{\infty} t\varphi_{10}(t)dt.$$

Приведенные соотношения (17), (18) позволяют рассчитать искомое распределение вероятностей состояний системы (14).

Выводы. Таким образом, получена бислучайная модель безотказности системы, режим и условия эксплуатации которой задаются набором случайных значений факторов с известными плотностями распределения. Методика доведена до конечных соотношений для частного случая, когда случайные значения факторов имеют нормальный закон распределения.

Список литературы. ***1.*** *Гаскаров Д.В.* Прогнозирование технического состояния и надежности радиоэлектронной аппаратуры / Д.В. Гаскаров, Т.А. Голинкевич, А.В. Мозгалевский. – М.: Сов. Радио, 1974. – 224 с. ***2.*** *Костенко Ю.Т.* Прогнозирование технического состояния систем управления / Ю.Т. Костенко, Л.Г. Раскин. – Х.: Основа, 1996. – 303 с. ***3.*** *Крамер Г.* Математические методы статистики: пер. с англ. / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648с. ***4.*** *Барзилович Е.Ю.* Модели технического обслуживания сложных систем / Е.Ю. Барзилович.- М: Высшая школа, 1982. – 232с. ***5.*** *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования: пер. с англ. / Б. Лю. – М.: БИНОМ, 2005. – 416с. ***6.*** *Венцель Е.С.* Теория вероятностей / Е.С. Венцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с. ***7.*** Вопросы математической теории надежности / *Под. ред. Гнеденко Б.В.* – М.: Радио и связь, 1983. – 376с.

Поступила в редколлегию 16.03.09