

Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф., зав. каф. КМММ НТУ «ХПИ»,
Д. В. ДЖУЛГАКОВ, студент НТУ «ХПИ»

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статті розглядається задача синтезу обернених динамічних моделей та побудови їх мінімальної реалізації у просторі станів. Аналізується взаємозв'язок обернених динамічних моделей і керування систем з синергетичними законами управління.

В статье рассматривается задача синтеза обратных динамических систем и построения их минимальной реализации в пространстве состояний. Анализируется взаимосвязь обратных динамических моделей и систем, управляемых синергетическими законами управления.

In the paper inverse dynamical systems synthesis and construction of their minimal state-space realizations are considered. The relations of inverse systems and systems driven by synergetic controllers are analyzed.

Введение. Обратные динамические системы находят широкое применение в задачах восстановления входных сигналов динамических систем, компенсации внешних возмущающих воздействий, слежения за заданными траекториями [1]. Отличительной особенностью обратных систем является проекционный характер их динамики, что позволяет рассматривать их поведение как движение по некоторому инвариантному многообразию в пространстве состояний. Задачи синтеза законов управления, обеспечивающих движение по инвариантным многообразиям, относятся к проблемам синергетического управления [2]. Таким образом, представляет интерес анализ динамических свойств многомерных обратных динамических систем с точки зрения синергетического подхода.

Задача синтеза обратных динамических систем. Рассмотрим многомерную линейную стационарную динамическую систему, описываемую моделью в переменных состояния:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^m$ – вектора состояния, входов и выходов;

$A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{m \times n}$, $D \in R^{m \times m}$ – матрицы параметров системы.

Введем в рассмотрение матричные параметры Маркова системы (1):

$$S(0) = D, \quad S(\alpha) = CA^{\alpha-1}B, \quad \alpha = \overline{0, n}. \quad (2)$$

Обозначим через α относительный порядок системы, то есть такое минимальное неотрицательное целое число, что $S(\alpha) \neq 0$. Будем

рассматривать только строго реализуемые системы, для которых $D = 0$, $\alpha > 0$.

Построим обратную динамическую модель системы (1). Рассмотрим последовательные производные выхода:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= CAx + CBu = CAx \\ \ddot{y} &= CA^2x + CABu = CA^2x \\ &\dots \\ y^{(\alpha)} &= CA^\alpha x + S(\alpha)u, \end{aligned} \quad (3)$$

и примем уравнение обратной динамической системы в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_l = Fx_l + BS^{-1}(\alpha)y^{(\alpha)} \\ y = S^{-1}(\alpha)CA^\alpha x_l + S^{-1}(\alpha)y^{(\alpha)} \end{cases}; \quad (4)$$

$$F = A - BS^{-1}(\alpha)CA^\alpha.$$

Действительно, рассмотрим передаточную функцию системы (4):

$$W_l(s) = S^{-1}(\alpha) \cdot s^\alpha - S^{-1}(\alpha)CA(sI_n - F)^{-1}BS^{-1}(\alpha) \cdot s^\alpha. \quad (5)$$

Вычислим резольвенту оператора F, обозначив $R_A = \text{Res } A = (sI_n - A)^{-1}$. Тогда по теореме об обращении суммы матриц [3]:

$$(sI_n - F)^{-1} = (sI_n - A + BS^{-1}(\alpha)CA^\alpha)^{-1} = R_A - R_A B (S(\alpha) + CA^\alpha R_A B)^{-1} CA^\alpha R_A \quad (6)$$

По индукции несложно доказать, что $A^k R_A = s^k R_A - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1} A^i$.

Тогда с учетом того, что $S(i) = 0$ при $i < \alpha$:

$$CA^\alpha R_A B = s^\alpha CR_A B - \sum_{i=0}^{\alpha-1} s^{\alpha-i-1} S(i+1) = s^\alpha W(s) - S(\alpha), \quad (7)$$

где $W(s) = CR_A B$ - передаточная функция исходной системы (1), получаем:

$$(sI_n - F)^{-1} = R_A - s^{-\alpha} R_A B (W(s))^{-1} CA^\alpha R_A; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} W_l(s) &= s^\alpha S^{-1}(\alpha) - s^\alpha S^{-1}(\alpha)CA^\alpha R_A BS^{-1}(\alpha) + \\ &+ S^{-1}(\alpha)CA^\alpha R_A B (W(s))^{-1} CA^\alpha R_A BS^{-1}(\alpha) = (W(s))^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, система (4) действительно является моделью обратной динамической системы для (1).

Рассмотрим характеристический полином обратной динамической системы (4):

$$\Delta_I(s) = |sI_n - F| = \Delta(s) \cdot |I_n + BS^{-1}(\alpha)CA^\alpha R_A| = \Delta(s) \cdot |W(s)| \cdot s^{cm} \cdot |S^{-1}(\alpha)|. \quad (10)$$

Полином $\Delta_0(s) = \Delta(s) \cdot |W(s)|$ является полиномом нулей исходной системы (1). Таким образом, получаем известный результат [4] о том, что полюса системы (4) совпадают с нулями исходной системы (1). Кроме того система (4) имеет нулевой полюс кратности cm , а потому реализация в пространстве состояний (4) не является минимальной. Действительно:

$$\begin{aligned} CA^k \dot{x}_I(t) &= CA^{k+1} \dot{x}_I(t), \quad k = \overline{0, a-2}; \\ CA^{\alpha-1} \dot{x}_I(t) &= y_I^{(\alpha)}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Для упрощения выкладок предположим выполнение условий согласованности начальных условий для обратной модели:

$$CA^k \dot{x}_I(0) = y_I^{(\alpha)}(0), \quad k = \overline{0, a-1}. \quad (12)$$

Введем обозначения $R(i) = (C \ CA \ \dots \ CA^i)^T$, $Y_I^{(i)}(t) = (y_I(t) \ \dot{y}_I(t) \ \dots \ y_I^{(i)}(t))$. Тогда условие согласованности (12) запишется как $R(\alpha-1)x_I(0) = Y_I^{(\alpha-1)}(0)$. Проинтегрировав (11) по времени с учетом условий согласованности начальных условий получим, что движение обратной системы осуществляется по нестационарному инвариантному многообразию в пространстве состояний:

$$\sigma(x_I(t)) = R(\alpha-1)x_I(t) = Y_I^{(\alpha-1)}(t). \quad (13)$$

Таким образом, обратная система не является полностью управляемой [5], а значит, реализация (4) не является минимальной.

Понижение размерности обратных динамических систем. Применим метод расщепления для выделения подсистемы, описывающей движение по многообразию, которая и будет минимальной реализацией обратной системы.

Обозначим для краткости $R = R(\alpha-1)$ и будем считать, что инвариантное многообразие не вырождено, т.е. $\text{rank } R = cm$. Разложим пространство состояний системы X в прямую сумму пространств X_1 и X_2 , где X_2 параллельно многообразию (13). Вводя проекционные операторы $P_1 = R^+R$ и $P_2 = I - R^+R$, получим: $X = X_1 \oplus X_2$, $x_1 = P_1 x_I \in X_1$, $x_2 = P_2 x_I \in X_2$, $\sigma = R x_I = R x_1$, $R x_2 = 0$.

Пусть матрица W состоит из линейно независимых столбцов матрицы P_2 . Так как $P_2 R^+ = 0$ и матрица R^+ невырождена, то $\dim \ker P_2 \geq cm$. С другой стороны, $\text{rank } R^+R = cm$, $\text{rank } P_2 \geq n - cm$. Таким образом, получаем, что $\text{rank } P_2 = n - cm$, а, значит, матрица W имеет размеры $n \times (n - cm)$. Тогда вектор x_2 можно выразить как $x_2 = W\bar{x}$, $\bar{x} \in R^{n-cm}$, то есть выполняется разбиение вектора x_I на вектора σ и \bar{x} . Действительно:

$$x_1 = R^+R x_I = R^+\sigma, \quad x_2 = W\bar{x}; \quad x_I = R^+\sigma + W\bar{x} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \sigma \\ \bar{x} \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} R^+ & W \end{bmatrix}. \quad (14)$$

По сути, была выполнена замена переменных с матрицей Q . Учитывая, что $RW = 0$, нетрудно показать, что $Q = \begin{bmatrix} R \\ W^+ \end{bmatrix}$.

Подставим введенное преобразование в уравнение обратной системы (4):

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\bar{x}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ W^+ \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} R^+ & W \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \bar{x} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ W^+ \end{bmatrix} BS^{-1}(\alpha) y_I^{(\alpha)}. \quad (15)$$

Выполняя поблочное умножение получаем:

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\bar{x}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ & W^+FR^+ & & W^+FW & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \bar{x} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \\ W^+BS^{-1}(\alpha) \end{bmatrix} y_I^{(\alpha)}. \quad (16)$$

Из (16), как и ранее, получаем, что $\sigma(t) = Y_I^{(\alpha-1)}(t)$. Рассматривая только компоненту \bar{x} , получим искомую минимальную реализацию системы:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{F}\bar{x} + \bar{G}Y_I^{(\alpha)}(t), \quad \bar{F} = W^+FW, \quad \bar{G} = [W^+FR^+ \quad W^+BS^{-1}(\alpha)]. \quad (17)$$

Конкретизируем возможный вид матриц R, W, \bar{F}, \bar{G} . Матрица R имеет полный ранг, будем считать, что первые ее cm столбцов линейно независимы: $R = [R_1 \ R_2]$, $R_1 \in R^{cm \times cm}$, $\det R_1 \neq 0$. Тогда получаем следующие выражения:

$$R^+ = \begin{bmatrix} R_1^{-1} \\ 0_{(n-cm) \times cm} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -R_1^{-1}R_2 \\ I_{n-cm} \end{bmatrix}, \quad W^+ = \begin{bmatrix} 0_{(n-cm) \times cm} & I_{n-cm} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0_{(n-cm) \times cm} & I_{n-cm} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & -R_1^{-1}R_2 \\ 0_{(n-cm) \times cm} & I_{n-cm} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Вводя блочное разбиение исходных матриц $F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$,

можно записать: $\bar{F} = F_{22} - R_1^{-1}R_2F_{21}$, $\bar{G} = \begin{bmatrix} F_{21}R_1^{-1} & B_2S^{-1}(\alpha) \end{bmatrix}$.

Анализ динамики обратных систем с точки зрения движения по многообразиям. Рассмотрим для сравнения синтез синергетического закона управления для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (19)$$

Будем искать управление u , которое обеспечивало бы движение системы (19) по линейному многообразию

$$\sigma(x) = Sx = k, \quad k \in R^m, \quad k = const \quad (20)$$

при условии $|SB| \neq 0$. Такой закон управления называют эквивалентным. Необходимым условием движения системы по многообразию (20) является

$$\dot{\sigma}(x) = \left(\frac{d}{dx} \sigma(x) \right)^T \dot{x} = S\dot{x} = SAx + SBu_{eq} = 0. \quad (21)$$

Поэтому получаем эквивалентный закон управления в следующем виде:

$$u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx. \quad (22)$$

Тогда уравнение замкнутой системы будет иметь вид

$$\dot{x} = (A - B(SB)^{-1}SA)x. \quad (23)$$

Заметим, что матрицу замкнутой системы можно представить в виде PA , где $P = I - B(SB)^{-1}S$ – проекционный оператор. Найдем характеристический полином системы (23): $\Delta_s(s) = |sI_n - A + B(SB)^{-1}SA| = \Delta(s)|I_n + B(SB)^{-1}SAR_A| = \Delta(s)|I_m + SAR_AB(SB)^{-1}| = \Delta(s) \cdot s^m \cdot |W(s)| \cdot |(SB)^{-1}|$, где $\Delta(s) = |sI_n - A|$, $R_A = (sI_n - A)^{-1}$, $W(s) = SR_AB$. Поскольку $W(s)$ является передаточной функцией системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \sigma = Sx, \quad (24)$$

а $\Delta_0(s) = \Delta(s) \cdot |W(s)|$ – полиномом нулей системы, то набор полюсов системы (23) состоит из $(n-m)$ нулей системы (24) и нулевого полюса кратности m .

Также как и для обратных систем, проведем расщепление пространства состояний $x = x_1 + x_2 = P_1x + P_2x$, $P_1 = S^+S$, $P_2 = I_n - S^+S$, $\sigma = Sx_1$, $Sx_2 = 0$.

Пусть матрица W состоит из линейно независимых столбцов матрицы P_2 . Аналогично получаем, что $W \in R^{n \times (n-m)}$. Нетрудно показать, что выполняются тождества $SW = 0$, $W^+B = 0$. Тогда можно сделать замену:

$$x_1 = S^+\sigma, \quad x_2 = Wz, \quad z \in R^{n-m};$$

$$x = \begin{bmatrix} S^+ & W \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ W^+ \end{bmatrix} x. \quad (25)$$

Подставляя замену (25) в систему (23) получим:

$$\dot{z} = W^+AWz + W^+AS^+k, \quad \dot{\sigma} = 0. \quad (26)$$

Система пониженного порядка (26) описывает поведение замкнутой системы (23) на инвариантном многообразии (20). Одинаковый вид уравнений (26) и (17), (23) и (13) позволяет трактовать движение обратной системы как движение по изменяющемуся во времени многообразию $\sigma(x_i(t)) = Rx_i(t) = Y_i^{(\alpha-1)}(t)$.

Выводы. В работе рассмотрены проекционные свойства динамики обратных динамических моделей произвольного порядка. Это позволило выделить инвариантное многообразие в пространстве состояний обратной системы, зависящее от входных сигналов, и построить минимальную реализацию системы. Кроме того, была продемонстрирована близость обратных динамических систем и замкнутых системы, управляемых эквивалентным синергетическим законом управления. Такая синергетическая трактовка обратных систем позволит использовать методы синергетического управления в задачах синтеза обратных динамических моделей.

Список литературы: 1. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. Системы управления с динамическими моделями.– Х.: Основа, 1996. – 212 с. 2. Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления. Ч. II / Под. ред. А. А. Колесникова. – Москва–Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – 555 с. 3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1967.– 576 с. 4. Levy S., Sivan. R. On the stability of zero-output systems.// IEEE Trans. Automat. Control. – 1966.– № 11.– с. 315-316. 5. Позняк А. С. Основы робастного управления (H[∞]-теория).– М.: МФТИ, 1991.– 128 с.

Поступила в редколлегию 05.02.09