УДК 332.144+332.145

***И. В. КОНОНЕНКО***, д-р тех. наук, профессор НТУ «ХПИ»,
***Е. В. ЕМЕЛЬЯНОВА***, аспирантка НТУ «ХПИ»

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ ПО ПРОЕКТУ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СРОКИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ

В статті пропонується математична модель і метод мінімізації вартості робіт по проекту при обмеженнях на строки виконання робіт проекту при заданих альтернативних варіантах фрагментів мережних моделей робіт.

В статье предлагается математическая модель и метод минимизации стоимости работ по проекту при ограничениях на сроки выполнения работ проекта при заданных альтернативных вариантах фрагментов сетевых моделей работ.

In this paper mathematical model and method of work cost minimization on the project under constraints on works execution time of the project by the set alternative fragments variants of the network models works are offered.

**Введение**. В условиях нестабильной рыночной экономики планирование и выполнение инвестиционных проектов осуществляется в жестких рамках: с ограничениями, как по времени, так и по стоимости. Многие методы, применяющиеся в управлении проектами, направлены только на оптимизацию сроков выполнения работ без явного учета при этом стоимости работ. К таким методам относятся метод критического пути, метод ПЕРТ, метод ГЕРТ [1, 2].

Известны работы ряда авторов [3, 4], где применяются методы минимизации затрат по проекту при заданных ограничениях на использованные ресурсы. Данные методы можно разбить на две группы. К первой группе относят эвристические, или приближенные методы, ко второй - методы составления оптимальных планов и основанные на использовании линейного программирования и метода частичного перебора [5, 6].

Существует широкий класс задач, в которых зависимости между стоимостью выполнения работ, их содержанием и временем являются дискретными. Возможные технологии выполнения работ и их совокупностей могут быть заданы альтернативными вариантами, отображаемыми с помощью сетевых моделей. Для данного класса задач отсутствуют методы решения.

**Цель работы**. Целью работы является разработка математических модели и метода минимизации затрат по проекту при ограничениях на сроки выполнения работ.

Предположим, что содержание проекта задаётся в виде сетевой модели.

При этом операции интерпретируются как узлы сети, а дуги описывают технологические взаимосвязи межу операциями. Для каждого узла будем задавать время выполнения операции, а также необходимые финансовые ресурсы.

Значение целевой функции представляет собой затраты на осуществление проекта.

Ограничениями являются сроки выполнения проекта, а также требования о недопустимости задолженностей после завершения отдельных этапов работ.

Модель имеет вид:

$$\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{M_h} w_{hj}x_{hj} = F \to \min_{x_{hj}}, \tag{1}$$

$$w_{hj} = \sum_{i=1}^{n_j} w_{hi^j}, \tag{2}$$

$$T_{проекта} \le T^{задан}, T_{проекта} = \phi(x_{hj}), \tag{3}$$

$$S_h = S_{h-1} + K_h - w_{hj}, S_h \ge 0, h = \overline{1,H}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{M_h} x_{hj} \le 1, h = \overline{1,H}, \tag{5}$$

$$x_{hj} \in \{0,1\}, j = \overline{1,M_h}, h = \overline{1,H}. \tag{6}$$

где $w_{hj}$ – стоимость выполнения операций $j$-го варианта сетевой модели на $h$-м этапе (может складываться из стоимостей нескольких операций);

$T_{проекта}$ – длительность выполнения всех операций проекта;

$M_h$ – количество вариантов выполнения операций на этапе $h$, $h = \overline{1,H}$;

$h$ – номер этапа выполнения операций;

$H$ – максимальное количество этапов;

$x_{hj}$ – булева переменная (6), равная единице, если осуществляется $j$-й вариант выполнения операций на $h$-м этапе, и равная нулю в противном случае;

Значение целевой функции в формуле (1) рассчитывается как затраты на выполнение всех операций на всех этапах с помощью сетевой модели.

Для проверки условия (3) рассчитывается длительность критического пути в сетевой модели

$$G = \{A, Z, \tau, W\}, \tag{7}$$



где $G$ – сетевая модель операций проекта;

$A$ – множество узлов сети; $A = \{a_{hi^j}\}$, $h = \overline{1,H}$, $i = \overline{1,n_j}$, $j = 0,1,...,M_h$. Здесь $a_{hi^j}$ – $i$-я операция, осуществляемая на $h$-м этапе в $j$-м варианте (альтернативе) сетевой модели;

$n_j$ – количество операций в $j$-м варианте сетевой модели;

$Z$ – множество направленных дуг, $Z = \{z_{hi^j,pk^f}\}$, $h, p = \overline{1,H}$, $i,k = \overline{1,n_j}$, $j = 0,1,...,M_h$, $f = 0,1,...,M_p$. Здесь $z_{hi^j,pk^f}$ – дуга, которая выходит из узла $i$ на этапе $h$ альтернативного варианта $j$ и входит в узел $k$ на этапе $p$ альтернативного варианта $f$; $i \ne k$ при $p=h$; $p \ge h$;

τ – множество сроков выполнения операций в узлах, $\tau = \{\tau_{hi^j}\}$, $h = \overline{1,H}$, $i = \overline{1,n_j}$, $j = 0,1,...,M_h$;

$W$ – множество стоимостей выполнения операций сети, $W = \{w_{hi^j}\}$, $h = \overline{1,H}$, $i = \overline{1,n_j}$, $j = 0,1,...,M_h$.

Здесь $w_{hi^j}$ – стоимость выполнения $i$-й операции на $h$-м этапе для $j$-го варианта сетевой модели;

$S_0$ – денежные средства, выделенные на выполнение проекта перед его началом;

$S_h$ – остаток денежных средств после выполнения работ на $h$-м этапе.

$K_h$ – объем денежных средств, выделяемых на $h$-м этапе;

Ограничение (4) предполагает, что при осуществлении проекта не должно быть финансовых задолженностей.

Выражение (5) характеризует ограничение, что на каждом этапе $h$ можно начинать реализацию не более одного варианта.

Предложенная модель является динамической с булевыми переменными с аналитической целевой функцией с алгоритмическими и аналитическими ограничениями.

Для решения задачи предложен метод минимизации затрат выполнения проекта при ограничениях на его сроки, относящийся к группе методов неявного перебора.

Предположим, что альтернативные варианты сетевой модели могут относиться как к одному этапу выполнения работ, так и к нескольким этапам. Опишем в виде последовательных стадий подготовку информации для разработанного метода.

Выявить и описать альтернативы, их взаимосвязи друг с другом. Определить длительности и стоимости работ для каждой из альтернатив.

Провести анализ, цель которого заключается в выявлении альтернатив, которые охватывают несколько этапов. Если некоторая альтернатива охватывает более одного этапа, то эти этапы объединить в один.

Вычислить нижние границы стоимости выполнения операций на каждом $h$-м этапе, $h=\overline{1,H}$ .

Вычисление значений нижней границы предполагает выполнение ряда следующих действий:

3.1. Для каждого из этапов $h=\overline{1,H}$ ввести логические вершины начала и окончания *S(start)* и *T(target)*.

3.2. Для каждого из этапов $h=\overline{1,H}$ рассчитать стоимость выполнения всех операций отдельного этапа для всех альтернатив.

3.3. Для каждого из этапов $h=\overline{1,H}$ выбрать минимальную стоимость выполнения.

Для этого сначала рассчитывается $W=\{w_{hi^j}\}$ – множество стоимостей выполнения операций в сети, которое определяется из сетевой модели до начала итеративной части метода $h=\overline{1,H}$ , $i=\overline{1,n_j}$ , $j=0,1,...,M_h$ . После этого находится $w_{hi}$ – стоимость выполнения операций $j$-го варианта сетевой модели на $h$-м этапе (может складываться из стоимостей нескольких операций).

Затем для каждого из этапов $h$ выбирается минимальная стоимость $w_{\min_h}$ из $j$ вариантов. В результате получим множество минимальных стоимостей: $W_{\min}=\{w_{\min_h}\}_{h=1}^{H}$ .

Рассчитываем $w'_h$ – стоимость выполнения операций на всех этапах от 1-го до $h$-го включительно:

$$w'_h=\sum_{k=1}^{h}\sum_{j=1}^{M_h}w_{kj}x_{kj} \ . \qquad (8)$$

По методу критического пути находим $t_h$ – время выполнения операций на всех этапах от 1-го до $h$-го включительно.

Входные данные, необходимые для осуществления метода:

$G$ – сетевая модель;

$H$ – максимальное количество этапов;

$\{K_h\}_{h=1}^{H}$ – множество объемов выделенных средств для каждого из этапов;

$\{M_h\}_{h=1}^{H}$ – множество максимально возможных вариантов на каждом этапе;



$w_{hj}$ – стоимость выполнения операций $j$-го варианта сетевой модели на $h$-м этапе (рассчитывается предварительно из сетевой модели и представляется в табличном виде);

$T^{задан}$ –максимально возможное время выполнения проекта. Значение $T^{задан}$ задаётся заказчиком перед началом планирования проекта;

Переменные:

$f^*$ – значение рекорда;

$f$ – текущее значение целевой функции;

$h$ – номер этапа;

$S_h$ – остаток денежных средств в конце этапа $h$;

$j_h$ – номер варианта на этапе $h$.

$t_h$ – время выполнения операций на всех этапах от 1-го до $h$-го включительно;

$w'_h$ – стоимость выполнения операций на всех этапах от 1-го до $h$-го включительно;

$W'_{пр_h}$ – нижняя граница для стоимости выполнения всех последующих этапов после $h$, которая представляет собой сумму вида:

$$W'_{пр_h}=w_{\min_{h+1}}+...+w_{\min_H}, , \qquad (9)$$

где стоимости, являющиеся элементами множества $W_{\min}=\{w_{\min_h}\}_{h=1}^{H}$, рассчитываются способом, описанным ранее.

Результат решения:

$W_H$ – искомое решение, множество выбранных вариантов $j$ на всех $H$ этапах. Перед началом решения данный вектор обозначим $W_0$ .

Рассмотрим предложенный метод минимизации затрат на выполнение проекта при ограничениях на его сроки:

1. Полагаем:

$x_{hj}=0, j=\overline{1,M_h}, h=\overline{1,H};$

$W_0:=\varnothing;$

$W_{\min}=\{w_{\min_h}\}_{h=1}^{H};$

$h$:=1;

$f$:=1;

$f$:=0;

$f^*:=+\infty$ .

2. Принимаем $j_h=1$ то есть начинаем рассматривать 1-й вариант.

3. Проверяем выполнение ограничений задачи на этапе $h$:

$$S_h = S_{h-1} + K_h - w_{hj}, \, S_h \geq 0,$$

если ограничение не выполняется, переходим к шагу 8.

4. Вычисляем $t_h$ (время выполнения операций на всех этапах от 1-го до $h$-го включительно) путём расчёта длительности критического пути в сети – CPM($h,j$) от первого этапа до этапа $h$ включительно. Для этого вводится фиктивная вершина «финиш», обозначающая окончание всех операций $h$-го этапа.

Полагаем $T_{проекта} := t_h$ и проверяем выполнение второго ограничения задачи:

$$T_{проекта} \leq T^{задан},$$

если оно не выполняется, переходим к шагу 8.

5. Рассчитываем текущее значение функции: $w'_h$. Полагаем $f := w'_h$.

Вычисляем $W'_{np_h} = w_{\min_{h+1}} + \ldots + w_{\min_H}$, .

Если $f + W'_{np_h} > f^*$,то введение $j$- го варианта не даёт решения лучшего, чем рекордное, переходим к шагу 8.

6. При $h < H$ анализируем следующий этап проекта, то есть $h := h+1$ и возвращаемся к шагу 2.

7. Величине $f^*$ присваиваем новое значение $f^* := f$ и фиксируем множество $W_H := \{j_h\}_{h=1}^{|H}$. Редуцируем $f$ следующим образом $f := w'_{H-1}$.

8. При $j_h < M_h$ рассматриваем следующий вариант, т.е. $j_h := j_h + 1$ и переходим к шагу 3.

При $h > 1$ переходим на предыдущий этап, т.е. $h := h-1$ и изменяем значение $f =: w_{h-1}$. Извлекаем из памяти $j_h$, и переходим к шагу 8.

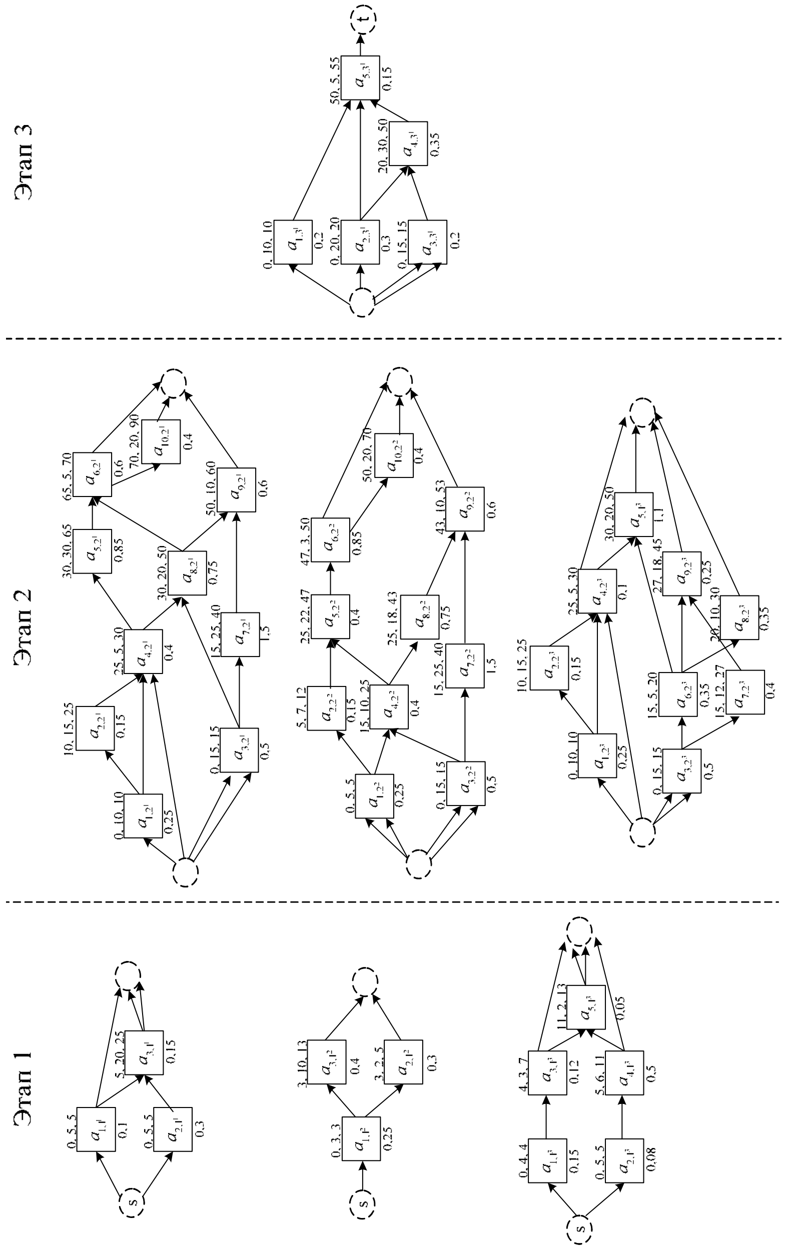
При $h$=1 и $W_H = \{\varnothing\}$ задача не имеет решения, в противном случае оптимальное решение получено. При этом $F$=$f$*.

В качестве примера рассмотрена сетевая модель, которая отражает содержание проекта. Данный проект состоит из трех этапов. На каждом этапе задаются альтернативные варианты выполнения комплексов работ в виде фрагментов сети, представленные на рисунке. Для каждого узла рассматриваемой сети заданы длительности выполнения операций, а также величины затрат, которые необходимы для выполнения каждой из них.

После проведенных расчетов по методу минимизации стоимости работ по проекту были получены следующие результаты.

Минимальная стоимость осуществления проекта составляет 5,2 млн. грн.






Альтернативные варианты выполнения работ по проекту

Время выполнения проекта 140 дней.

Для первого этапа выполнения проекта выбрана 1-я альтернатива, для второго этапа – третья альтернатива, для третьего этапа выбрана первая альтернатива выполнения работ.

В случае использовании метода полного перебора, без отсечения заранее не перспективных последовательностей работ, количество вариантов в соответствии с комбинаторным правилом произведения составило бы 3*3*1=9 вариантов – т.о. по 3 альтернативы на первом и втором этапах проекта. При решении задачи с помощью предложенного метода ветви выбирались следующим образом (по альтернативам):

1,1,1 – установлено значение рекорда $f^*$=7,75 млн. грн;

1,2,1 – значение рекорда уменьшилось до $f^*$=7,55 млн. грн;

1,3,1 – установлено новое значение рекорда $f^*$=5,2 млн. грн;

2,… − ветвь отсечена из-за не выполнения на первом этапе $S_h \geq 0$;

3,… − ветвь отсечена, так как на 1-м этапе выполнилось условие $f + T'_{np_h} \geq f^*$.

**Вывод**. В работе предложена математическая модель и метод минимизации стоимости работ по проекту при ограничениях на сроки выполнения работ проекта. Данные модель и метод позволяют решать задачи планирования в условиях, когда альтернативные варианты выполнения работ и их совокупностей заданы в виде фрагментов сети со сложными взаимосвязями с последующими и предыдущими работами.

**Список литературы**: ***1***. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей.− М.: Мир, 1984.− 496 с. ***2.*** *Давыдов Э.Г.* Исследование операций.– М.: Высшая школа. 1990.– 383 с. ***3.*** *Воропаев В. И., Гельруд Я.Д.* Циклические альтернативные сетевые модели и их использование при управлении проектами, available: http://www.sovnet.ru/pages/public/casm.htm (20.03.08 г). ***4.*** *Воропаев В.И., Лебедь Б.Я., Нудельман М.П., Орел Т.Я.* Задачи и методы временного анализа календарных планов на обобщенных сетевых моделях. //Экономико-математические методы и АСУ в строительстве.– М.: НИИЭС, 1986.− 320 с. ***5.*** *Воропаев В.И. и др.* Методические рекомендации по ресурсному анализу календарных планов на основе обобщенных сетевых моделей.– М.: ЦНИИЭУС, 1990.− 150 с. ***6.*** *Голенко Д.И.* Статистические методы сетевого планирования и управления.– М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1968.– 400 с.

*Поступила в редколлегию 08.01.09*