

СЕЙЕД МОДЖАБА ДЖАФАРИ ХЕНДЖАНИ, аспирант НТУ «ХПИ»,
В. П. СЕВЕРИН, д-р техн. наук, профессор «ХПИ»

ПРИМЕРЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПУТЕМ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОЦЕНОК

У статті розглядаються приклади розв'язання задач багатокритеріального параметричного синтезу для систем автоматичного керування другого і третього порядків на основі мінімізації приватних і покращених інтегральних квадратичних критеріїв.

В статье рассматриваются примеры решения задач многокритериального параметрического синтеза для систем автоматического управления второго и третьего порядков на основе минимизации частных и улучшенных интегральных квадратичных критериев.

The tasks decision examples of multicriterion parameter synthesis are examined in the article for the automatic control systems of the second and third orders on the basis of private and improved integral quadratic criteria minimization.

Введение. Одной из основных задач разработки и развития систем автоматического управления (САУ) является задача многокритериального параметрического синтеза. Особенностью этой задачи является сложность определения прямых показателей качества (ППК) систем как функций их переменных параметров [1–3]. Для параметрического синтеза систем управления часто применяются интегральные квадратичные оценки (ИКО), которые вычисляются проще по значениям параметров систем и косвенно характеризуют качество протекания в них переходных процессов [1–4]. Использование различных ИКО приводит к задачам многокритериальной оптимизации систем [5], которые требуют аналитического исследования для выработки практических рекомендаций. В связи с этим возникает необходимость в исследовании примеров синтеза систем управления, основанных на оптимизации интегральных квадратичных оценок.

Цель статьи состоит в рассмотрении примеров параметрического синтеза систем автоматического управления на основе минимизации интегральных квадратичных оценок и исследовании принципов многокритериального формирования улучшенных интегральных квадратичных оценок.

Общая постановка задачи многокритериального синтеза. При оценке эффективности САУ рассматривается самый неблагоприятный случай для системы, когда цель управления меняется мгновенно. Такое изменение можно представить ступенчатой функцией. Качество работы системы оценивается по переходному процессу в ее новое состояние. Задача параметрического синтеза САУ сводится к выбору значения вектора ее переменных параметров $x \in R^p$, обеспечивающего наилучшее качество системы, которое часто

определяют по переходной характеристике $y(x, t)$. При этом важнейшими ППК являются перерегулирование $\sigma(x)$, показатели колебательности — размах колебаний $\zeta(x)$ и затухание $\lambda(x)$, время регулирования $t_c(x)$ [1–3]. Эти показатели определены только в области устойчивости САУ. Первые три показателя не должны превышать предельных значений σ_m , ζ_m , λ_m , которые обычно заданы заранее: $\sigma_m = 0,05$, $\zeta_m = 0,065$, $\lambda_m = 0,3$ [1, 2]. При этом время регулирования, определяемое при значении параметра зоны установившегося состояния $\delta_y = 0,05$ и характеризующее быстродействие системы, должно быть минимальным.

Таким образом, показатели $\sigma(x)$, $\zeta(x)$, $\lambda(x)$ и $t_c(x)$ являются частными прямыми критериями общей задачи многокритериального параметрического синтеза САУ, представимой в виде задачи условной оптимизации:

$$\sigma(x) \leq 0,05, \quad \zeta(x) \leq 0,065, \quad \lambda(x) \leq 0,3, \quad \min t_c(x). \quad (1)$$

Рассмотрим применение ИКО для решения этой задачи.

Частные интегральные квадратичные критерии. Пусть $y(x, t)$ — масштабированная переходная функция САУ: $y(x, 0) = 0$, $y(x, \infty) = 1$. По ее отклонению $z(x, t) = y(x, \infty) - y(x, t)$ формируется ИКО отклонения

$$J_0(x) = \int_0^{\infty} [z(x, t)]^2 dt. \quad (2)$$

Минимизация этой оценки приводит к переходным процессам с большими значениями перерегулирования и показателей колебательности [1–3], которые можно уменьшить снижением скорости изменения отклонения в начале процесса путем использования ИКО производных отклонения:

$$J_k(x) = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^k z(x, t)}{\partial t^k} \right]^2 dt. \quad (3)$$

Рассмотрим примеры параметрического синтеза различных систем с применением оценок (2) и (3). Пусть система второго порядка с одним переменным параметром x задана передаточной функцией

$$W(s) = 1/(s^2 + xs + 1). \quad (4)$$

Оценки отклонения (2) и его первой производной (3) имеют вид [1–4]:

$$J_0(x) = 0,5(x + 1/x), \quad J_1(x) = 0,5/x. \quad (5)$$

Приравнивая нулю производную функции $J_0(x)$, при условии устойчивости САУ $x > 0$ получим минимум: $x^* = 1$, $J_0^* = 1$. ИКО для производной отклонения $J_1(x)$ в области устойчивости является убывающей функцией. В ограниченной области $x \in (0; 5]$ эта функция имеет минимум: $x^* = 5$, $J_1^* = 0,1$. Таким образом, частные критерии (5) являются противоречивыми. Графики этих критериев приведены на рис. 1. Переходные процессы, соответствующие минимальным значениям критериев (5), показаны на рис. 2.

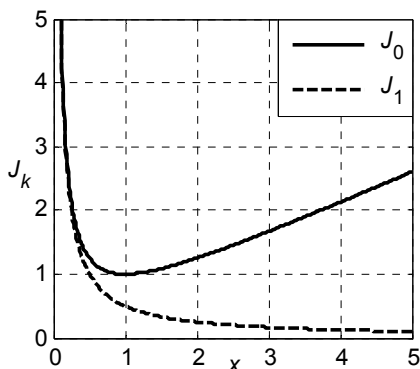


Рис. 1. Графики частных критериев для системы второго порядка

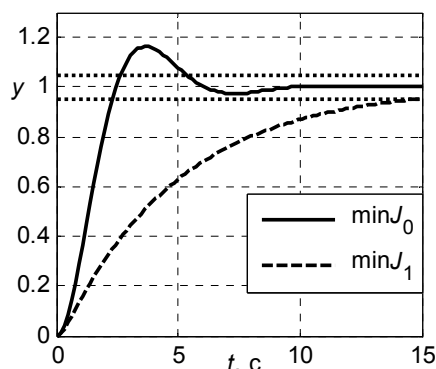


Рис. 2. Графики переходных процессов для системы второго порядка

Минимумы частных ИКО и соответствующие им значения ППК, приведены в табл. 1. При минимуме $J_0(x)$ значения первых двух прямых показателей превышают ограничения неравенств (1). Минимум $J_1(x)$ обнуляет три показателя, время регулирования возрастает в 2,75 раза.

Качество САУ третьего порядка с передаточной функцией

$$W(s) = 1/(s^3 + x_1 s^2 + x_2 s + 1) \quad (6)$$

зависит от значения вектора переменных параметров $x = (x_1, x_2)$.

По критерию Рауса-Гурвица определена область устойчивости этой системы: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 1$. Частные ИКО (2) и (3) имеют вид [1–4]:

$$J_0(x) = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{x_1^2}{x_1 x_2 - 1} \right), \quad J_1(x) = \frac{x_1}{2(x_1 x_2 - 1)}, \quad J_2(x) = \frac{1}{2(x_1 x_2 - 1)}. \quad (7)$$

Функция $J_0(x)$ принимает минимальное значение $J_0^* = 1,5$ при $x^* = (1; 2)$. График этой функции показан на рис. 3. Функции $J_1(x)$ и $J_2(x)$ монотонно убывают в области устойчивости и принимают минимальные значения при $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 5$ в точке $x^* = (5; 5)$: $J_1^* = 5/48$, $J_2^* = 1/48$. На рис. 4 представлены переходные процессы при минимальных значениях частных критериев.

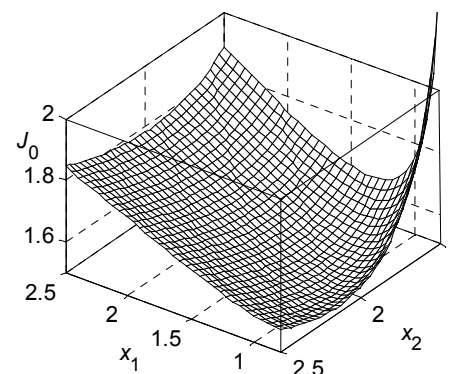


Рис. 3. График ИКО отклонения для системы третьего порядка

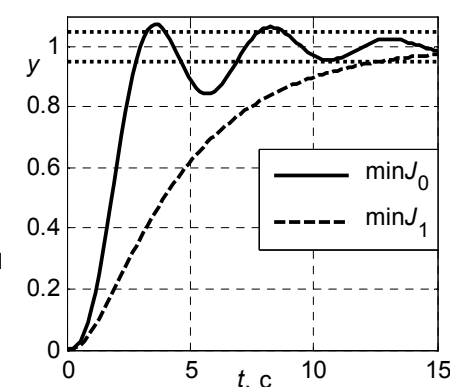


Рис. 4. Графики переходных процессов для системы третьего порядка

Минимумы частных ИКО и соответствующие им значения ППК приведены в табл. 2. Для минимума оценки $J_0(x)$ значения первых трех показателей превышают ограничения неравенств (1). Для минимума оценок $J_1(x)$ и $J_2(x)$ первые три прямых показателя равны нулю, а последний –

Таблица 2
Минимизация частных ИКО САУ третьего порядка

k	x_1^*	x_2^*	J_k^*	σ^*	ζ^*	λ^*	t_c^* , с
0	1	2	1,5	0,073	0,229	2,15	8,73
1	5	5	0,10	0	0	0	12,62
2	5	5	0,02	0	0	0	12,62

время регулирования возрастает в 1,45 раза.

Минимизация ИКО отклонения (2) приводит к сильно колебательным процессам с большим переуправлением, а минимизация ИКО производных отклонения (3) приводит к медленным переходным процессам с большим значением времени регулирования [1–3]. Таким образом, частные критерии качества САУ (2) и (3) имеют различные минимумы, являются противоречивыми и не позволяют решить общую задачу синтеза (1).

Улучшенные интегральные квадратичные оценки. Решение многокритериальной задачи оптимизации критериев качества (2) и (3) в виде компромисса их применения может быть достигнуто использованием свертки этих критериев и перехода к минимизации улучшенной ИКО [1–3, 5]:

$$J(x) = \sum_{k=0}^l w_k J_k(x), \quad (8)$$

где l – число частных критериев, w_k – весовые коэффициенты свертки. Для передаточной функции (4) по формулам (5) получим улучшенную ИКО (8):

$$J(x) = 0,5[x + (1+w)/x]. \quad (9)$$

В области устойчивости эта функция имеет единственную точку минимума $x^* = \sqrt{1+w}$, $J^* = \sqrt{1+w}$, оптимальную по Парето. Графики критерия (9) для различных значений весового коэффициента w приведены на рис. 5. На рис. 6 показаны переходные процессы, соответствующие минимальным значениям этого критерия при различных значениях w .

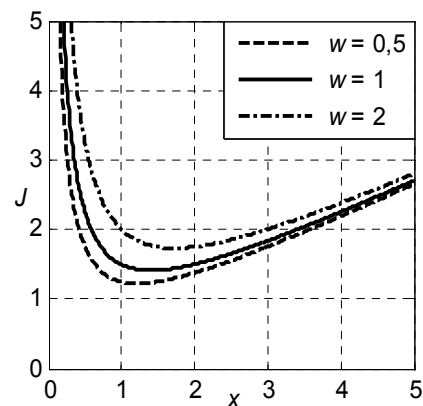


Рис. 5. Графики улучшенной ИКО для системы второго порядка

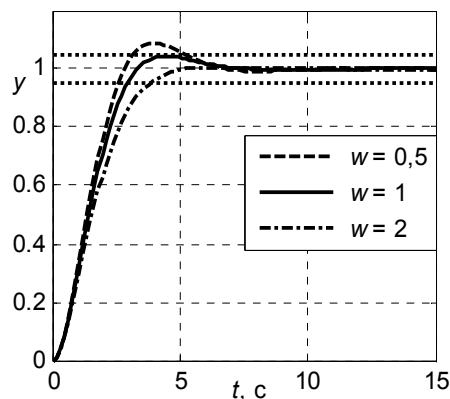


Рис. 6. Графики улучшенных переходных процессов для системы второго порядка

Результаты минимизации улучшенной ИКО (9) со значениями ППК для различных значений w , приведены в табл. 3. По сравнению со значениями прямых показателей по минимуму простой оценки отклонения вида (2), представленных в табл. 1, достигнуто существенное улучшение всех прямых показателей. При этом, чем больше значение w , тем меньше значения переуправления и размаха колебаний. Процесс с наилучшими значениями прямых показателей, удовлетворяющими ограничениям (1), получен при значении $w = 1$.

Для системы автоматического управления с передаточной функцией (6) по формулам (7) получим улучшенную интегральную квадратичную оценку (8) в виде функции переменных параметров:

$$J(x) = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{x_1^2 + w_1 x_1 + w_2}{x_1 x_2 - 1} \right).$$

Приравняв нулю частные производные этой функции, получим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 x_2 - 2x_1 - w_2 x_2 - w_1 = 0, \\ x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 - x_1^3 - w_1 x_1^2 - w_2 x_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений не позволяет найти аналитическое решение. Таким образом, уже для системы управления третьего порядка решение задачи синтеза усложняется, поскольку возникает задача выбора нескольких весовых коэффициентов, а для определения минимума улучшенной Интегральной квадратичной оценки необходимо применять численные методы.

Выбор весовых коэффициентов улучшенных интегральных оценок. Путем интегральных преобразований улучшенную интегральную квадратичную оценку (8) при $l = 1$ можно представить в виде равенства [1–3]:

$$J(x) = \tau + I(x), \quad (10)$$

где $\tau = \sqrt{w}$, $I(x)$ — модифицированная улучшенная ИКО:

$$I(x) = \int_0^{\infty} \left[z(x, t) + \tau \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right]^2 dt. \quad (11)$$

Таблица 3

Улучшенная ИКО для САУ второго порядка

w	x^*	J^*	σ^*	ζ^*	λ^*	t_c^* , с
0,5	1,22	1,22	0,878	0,095	0,089	5,20
1	1,41	1,41	0,043	0,045	0,004	2,93
2	1,73	1,73	0,004	0,004	0,004	3,79

Эта оценка может принять наименьшее равное нулю значение, если

$$z(x, t) + \tau \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Такое уравнение имеет решение $z_e(t) = e^{-t/\tau}$. Выбирая параметры системы по минимуму улучшенной оценки (11), можно приблизить переходный процесс к заданной экспоненте $y_e(t) = 1 - e^{-t/\tau}$, которая определяется постоянной времени τ и носит в этом случае название экстремали [1–3].

Для системы управления второго порядка с передаточной функцией (4) модифицированная улучшенная оценка (11) имеет вид:

$$I(x) = 0,5[1 + (x - \tau)^2]/x. \quad (12)$$

В области устойчивости системы эта функция имеет единственный минимум $x^* = \sqrt{1 + \tau^2}$, $I^* = \sqrt{1 + \tau^2} - \tau$. Графики критерия (9) при $w = 1$ и критерия (12) при $\tau = 1$ приведены на рис. 7. Эти критерии имеют одну и ту же точку минимума $x^* = \sqrt{2}$, поскольку в соответствии с равенством (10) $J(x) = I(x) + 1$. На рис. 8 показаны графики экстремали $y_e(t)$ и оптимального переходного процесса $y(t)$, соответствующего минимальным значениям критериев (9) и (12). Время регулирования $t_c = 2,93$ с оптимального переходного процесса (см. табл. 3, $w = 1$) и время регулирования $t_e = 3,00$ с экстремали этого процесса $y_e(t)$ близки.

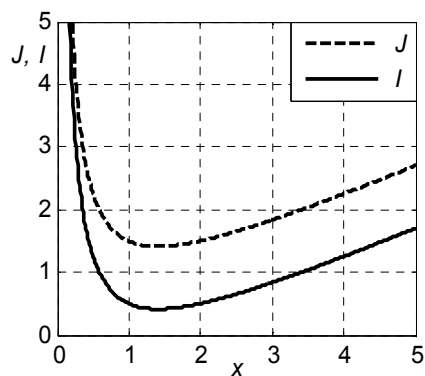


Рис. 7. Графики различных улучшенных ИКО для системы второго порядка

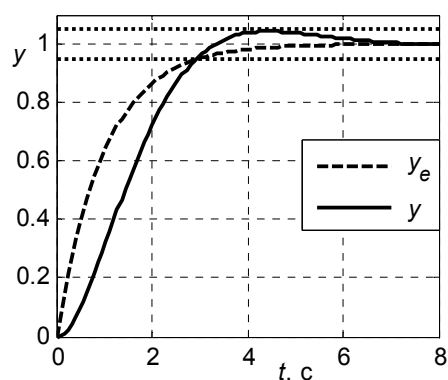


Рис. 8. Графики экстремали и оптимального переходного процесса

Модифицированная улучшенная интегральная квадратичная оценка (12) имеет преимущество перед оценкой (9), поскольку коэффициент τ при производной отклонения в этой оценке является постоянной времени экстремали, определяющей желаемое качество оптимального процесса.

Улучшенной интегральной квадратичной оценке (8) при числе частных критериев $l = 2$ соответствует модифицированная улучшенная оценка [1–3]

$$I(x) = \int_0^{\infty} \left[z(x, t) + \tau_1 \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} + \tau_2 \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} \right]^2 dt,$$

параметры которой τ_1 и τ_2 связаны с весовыми коэффициентами оценки (8) равенствами: $\tau_1^2 - \tau_2 = w_1$, $\tau_2^2 = w_2$. Экстремаль такой оценки определяется дифференциальным уравнением второго порядка.

Выводы. Из проведенных исследований вытекают следующие выводы.

1. Задача многокритериального параметрического синтеза систем автоматического управления представлена в виде задачи условной оптимизации прямых показателей качества.

2. Интегральная квадратичная оценка отклонения управляемой переменной и интегральные квадратичные оценки производных отклонения являются противоречивыми частными критериями. Переходные процессы, протекающие в системах управления и обеспечивающие минимум оценки отклонения, имеют большие значения перерегулирования и колебательности.

3. Улучшенные интегральные квадратичные оценки в виде свертки частных критериев позволяют достигнуть существенного улучшения всех прямых показателей качества. Однако решение задачи синтеза усложняется проблемой выбора весовых коэффициентов улучшенных интегральных квадратичных оценок и необходимостью применения численных методов для их минимизации.

4. Применение модифицированных улучшенных интегральных квадратичных оценок имеет преимущество, так как позволяет связать весовые коэффициенты оценок с параметрами экстремалей, задающих желаемое качество оптимального процесса.

Список литературы: 1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования, издание третье, исправленное. – М.: Наука, 1975. – 768 с. 2. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с. 3. Теория автоматического управления. Ч. 1 / Под ред. А. А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с. 4. Кац А. М. К вопросу о вычислении квадратичного качества регулирования // Прикладная математика и механика. 1952. – Т. XVI. – Вып. 3. – С. 362–364. 5. Брейтон Р. К., Хэчтел Г. Д., Санджованни-Винченцелли А. Л. Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // ТИИР. – 1981. – Т. 69. – № 10. – С. 180–215.

Поступила в редколлегию 08.01.09