УДК 519.6

Л. С. ЛОБАНОВА, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. прикладної математики УІПА (м. Харків),
В. О. ПАСІЧНИК, канд. техн. наук,
О. О. ЧЕРНЯК, аспірант УІПА

ОПТИМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ В ІНТЕГРАЛЬНОМУ МЕТОДІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА ДВОХ ЗМІННИХ

Пропонується метод, що дозволяє оптимізувати обчислення в інтегральному методі найменших квадратів і базується на апроксимації функцій однієї та двох змінних B-сплайнами першого степеня. Отримані явні формули для подвійних інтегралів від добутку функцій, які є сумами B – сплайнів з різними носіями.

Предлагается метод, позволяющий оптимизировать вычисления в интегральном методе наименьших квадратов и базирующийся на аппроксимации функций одной или двух переменных B-сплайнами первой степени. Метод позволяет получить явные формулы для двойных интегралов от произведения функций, которые являются суммами B – сплайнов с отличающимися носителями.

Is offered the method, allowing to optimise calculation in an integrated method of the least squares and based on approximation of functions of one or two variables by B-splines of the first degree. The method allows to receive obvious formulas for double integrals from product of functions which are the sums B - splines with differing carriers.

Вступ. Проекційно-сітковий метод (метод скінченних елементів) став в наш час ефективним методом розв'язання різноманітних задач математичної фізики. Ця обставина в значній мірі обумовлена досягненнями математики в області теорії проекційних методів та теорії апроксимації за допомогою функцій із скінченними носіями (фінітних функцій), а також швидким ростом застосування електронно-обчислювальної техніки в наукових дослідженнях. На протязі багатьох років варіаційні методи, що є частинним випадком проекційних, використовуються для розв'язання задач математичної фізики. Суть цих методів полягає у формулюванні задачі в варіаційній формі як задачі про пошук функції, яка реалізує мінімум, або, в загальному випадку, екстремум деякого функціонала, і в наступному знаходженні наближення до цієї функції. При цьому зручними виявляються такі алгоритми наближеного розв'язування задач, які, з одного боку, по формі були б варіаційними, або проекційними і, таким чином, мали всі їх переваги, а з іншого боку, щоб ці алгоритми приводили до систем рівнянь, подібних до тих, які виникають в різницевих методах (незначна кількість елементів матриць цих систем були б відмінні від нуля). Такими алгоритмами є проекційно-сіткові алгоритми (метод скінченних елементів). Щоб прийти до таких алгоритмів достатньо в варіаційних або проекційних методах в якості базисних функцій $\{\varphi_i\}$ брати функції із скінченними носіями, тобто такі функції, які відмінні від нуля лише на невеликій частині тієї області, на якій визначений шуканий розв'язок задачі. Привабливими рисами проекційно-сіткових методів є наступні: шукані коефіцієнти часто мають ясну змістовну інтерпретацію, наприклад, є значеннями шуканого розв'язку у вузлах сітки; за допомогою фінітних базисних функцій вдається інколи легко врахувати геометрію області і тим самим усунути труднощі, які виникають в різницевому методі при задовільненні граничним умовам. Крім того, якщо вдало вибран проекційний алгоритм і базисні функції, то подальший процес побудови розв'язку відбувається «автоматично» і чисельно реалізується, наприклад, за допомогою існуючих систем комп'ютерної математики (Mathcad, Matlab, Maple).

Аналіз літератури. Із загальної теорії наближених методів Л. В. Канторовича [1] витікає загальна схема побудови наближених методів, в яку в багатьох випадках вкладаються методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна і деякі їх узагальнення, метод найменших квадратів, інтегральний метод найменших квадратів. Важливі аспекти чисельної реалізації методу найменших квадратів висвітлені в роботі [2]. Загальні умови збіжності методу найменших квадратів і ряд його застосувань наведені в монографії [3].

Мета статті. Метод найменших квадратів у інтегральній формі полягає у наближенні функції $z = f(x,y),(x,y)\in D$ сумою $S_N(x,y)=\sum_{k=1}^{N} C_k\varphi_k(x,y)$ шляхом розв'язання мінімізаційної задачі $J(C_1,\cdots,C_N)\to \min\limits_{C_1,\cdots,C_N}$, де $J(C_1,\cdots,C_N)=\iint\limits_D \left[f(x,y)-\sum_{k=1}^{N} C_k\varphi_k(x,y)\right]^2 dxdy$.

Тут $\varphi_1,\cdots,\varphi_N$ – деяка повна система функцій. Зокрема, якщо ця система функцій ортонормована $(\varphi_i,\varphi_k)=\delta_{i,k}, 1\le k,i\le\infty$, $\delta_{i,k}=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\ne k\end{cases}$, то

$$C_k=\iint\limits_D f(x,y)\varphi_k(x,y)\,dxdy, k=\overline{1,N}. \qquad (1)$$

Якщо функції $\varphi_k(x,y)$ є швидкоосцилюючими функціями (наприклад $\varphi_k(x,y)=\cos 2\pi(k_1x+k_2y)$, то обчислення інтегралів (1) за допомогою класичних квадратурних формул (прямокутників, парабол тощо) не є ефективним. У цьому випадку ефективними є формули, побудовані шляхом заміни функції $f(x,y)$ відповідним сплайном і подальшим точним обчисленням отриманих інтегралів.

Ця ідея може бути плідною навіть для випадку, коли $\varphi_k(x,y)$ не мають сильної осциляції, а є сплайнами. У цьому випадку, якщо $\varphi_k(x,y)$ є сплайнами степеня r_1 і $f(x,y)$ замінена також сплайном степеня r_2, то для коефіцієнтів $C_k, k=\overline{1,N}$ можна отримати систему, елементи матриці якої можна знайти точно. Метою даної статті є дослідження обчислювальних аспектів обчислення вказаних елементів матриці.

Основна частина. Нехай функція двох змінних $f(x,y)$ задана своїми значеннями $z_{i,j}\left(i=\overline{1,M};\, j=\overline{1,N}\right)$ на сітці $\Delta_1: a=x_1<x_2<\cdots<x_M=b$; $c=y_1<y_2<\cdots<y_N=d$. Застосуємо для її апроксимації систему неперервних кусково-лінійних функцій $\left\{h(x,X_i)\right\}$, $X_i=\left\{x_{i-1},x_i,x_{i+1}\right\}$ з наступними властивостями: $h(x_i,X_i)=1$, $h(x_j,X_i)=0\,(j\neq i)$; $h(x,X_i)$ відмінна від нуля лише на проміжку (x_{i-1},x_{i+1}) і визначається рівностями

$$h(x,X_i)=\begin{cases}0,-\infty<x\le x_{i-1};x_{i+1}\le x<\infty\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},x_{i-1}<x\le x_i\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i},x_i<x<x_{i+1}\end{cases};$$

і аналогічну систему $\left\{h(y,Y_j)\right\}$ по змінній y, де $Y_j=\left\{y_{j-1},y_j,y_{j+1}\right\}$.

Тоді дану функцію $f(x,y)$ можна наблизити білінійним сплайном

$$Sp_{M,N}(x,y)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}z_{k,l}h(x,X_k)h(y,Y_l). \qquad (2)$$

Розглянемо тепер сітку з іншим кроком $\Delta_2:\left(x_i^*,y_j^*\right)\left(i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}\right)$ і побудуємо на ній теж білінійний сплайн $Sp_{m,n}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}h(x,X_i^*)h(y,Y_j^*)$; $X_i^*=\left\{x_{i-1}^*,x_i^*,x_{i+1}^*\right\}, Y_j^*=\left\{y_{j-1}^*,y_j^*,y_{j+1}^*\right\}$.

Знайдемо коефіцієнти розкладу $C_{i,j}\left(i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}\right)$ з умови:

$$J(z,C)=\int_a^b\int_c^d\left(Sp_{M,N}(x,y)-Sp_{m,n}(x,y)\right)^2dxdy\to\min_{C_{i,j}}.$$

Користуючись необхідною умовою екстремуму $\dfrac{\partial J(z,C)}{\partial C_{r,s}}=0,\left(r=\overline{1,m};s=\overline{1,n}\right)$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_{i,j}\left(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}\right)$. Дійсно,

$$\frac{\partial J(z,C)}{\partial C_{r,s}}=-2\int_a^b\int_c^d\left(Sp_{M,N}(x,y)-Sp_{m,n}(x,y)\right)h(x,X_r^*)h(y,Y_s^*)dxdy=0,$$

$$\int_a^b\int_c^d\left(Sp_{M,N}(x,y)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}h(x,X_i^*)h(y,Y_j^*)\right)h(x,X_r^*)h(y,Y_s^*)dxdy=0.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\int_a^b\int_c^d h(x,X_i^*)h(y,Y_j^*)h(x,X_r^*)h(y,Y_s^*)dxdy=\int_a^b\int_c^d Sp_{M,N}(x,y)h(x,X_r^*)h(y,Y_s^*)dxdy$$

Тобто, вказана система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j,r,s}C_{i,j}=b_{r,s}\left(r=\overline{1,m};s=\overline{1,n}\right), \qquad (3)$$

де

$$a_{i,j,r,s}=\int_a^b\int_c^d h(x,X_i^*)h(x,X_r^*)h(y,Y_j^*)h(y,Y_s^*)dxdy=$$
$$=\int_a^b h(x,X_i^*)h(x,X_r^*)dx\int_c^d h(y,Y_j^*)h(y,Y_s^*)dy; \qquad (4)$$

$$b_{r,s}=\int_a^b\int_c^d Sp_{M,N}(x,y)h(x,X_r^*)h(y,Y_s^*)dxdy=$$
$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}z_{k,l}\int_a^b h(x,X_k)h(x,X_r^*)dx\int_c^d h(y,Y_l)h(y,Y_s^*)dy. \qquad (5)$$

Безпосереднє обчислення всіх інтегралів в (4), (5) при великій кількості вузлів сіток за допомогою стандартних систем комп'ютерної математики (наприклад, Mathcad) може вимагати дуже багато часу порівняно з часом розв'язання самої системи (3). В цій роботі пропонується метод, за яким отримуються явні формули для коефіцієнтів $a_{i,j,r,s}$ і $b_{r,s}$. Для обчислення інтегралів (4), (5) скористаємося формулою Сімпсона за кожною змінною. Зазначимо, що підінтегральна функція в кожному з інтегралів є кусково-квадратичною функцією, відмінною від нуля лише на певному інтервалі (залежно від індекса функцій, що є складовими підінтегральної функції). Враховуючи означення функції $h(x, X_i)$, робимо висновок, що $I_{i,r} = \int_a^b h(x, X_i) h(x, X_r) dx = 0$, якщо $|i-r| > 1$, тобто відмінними від нуля є лише три інтеграли $I_{i,i-1}, I_{i,i}, I_{i,i+1}\ (r = i-1, i, i+1)$, які і підлягають обчисленню.

Беспосередні обчислення дають наступні результати:

$$I_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{6},$$

$$I_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right)^2 dx = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3},$$

$$I_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{6}.$$

Для інтегралів, що містяться в формулі (5) з урахуванням двох різних сіток отримуємо аналогічні результати при конкретному співвідношенні між кроками сіток, якщо вони сталі. Наведені результати стосуються функцій двох змінних, але, зрозумілим чином вони переносяться на випадок функцій однієї змінної.

Приклад. Описана вище методика використовувалась [4 – 6] для оптимізації числа горизонтальних та вертикальних ліній при побудові поверхні манекена з використанням інтерлінації функцій та з умови найкращого наближення шуканої поверхні (з меншим числом вказаних ліній) до заданої поверхні за допомогою точок на іншій, більш детальній системі горизонтальних та вертикальних ліній. На рис. 1 зображено оригінальний каркас манекена, а на рис. 2 – наближення цього каркасу з меншою кількістю горизонтальних та вертикальних ліній.

Висновки. Таким чином, в даній роботі запропоновані та апробовані формули для обчислення інтегралів від функцій, що є добутком сплайнів від двох змінних (першого степеня по кожній змінній), побудованих на різних сітках вузлів. Ці формули дозволяють значно прискорити обчислення елементів матриці системи рівнянь в методі найменших квадратів.

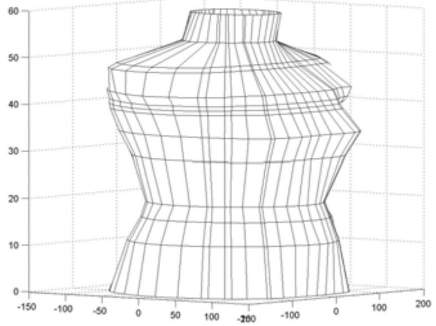

Рис.1. Каркас манекена, побудований за допомогою 14 горизонтальних та 23 вертикальних ліній

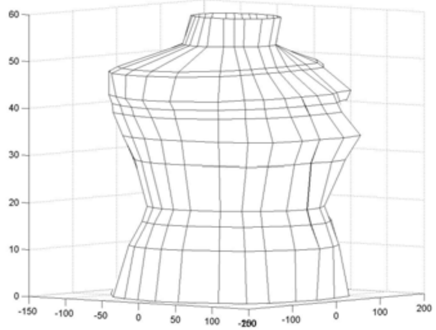

Рис.2. Каркас манекена, побудований за допомогою 13 горизонтальних та 13 вертикальних ліній

Список літератури: ***1.*** *Крылов В. И., Канторович Л. В.* Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962.– 708 с. ***2.*** *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов / *Пер. с англ. Х. Д. Икрамова*. – М.: Наука. Физматгиз, 1986. – 232 с. ***3.*** *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. ***4.*** *Литвин О. М., Пасічник В. О.* Оптимізація горизонтальних перерізів математичної моделі поверхні манекена з використанням інтерлінації функцій. // Доповіді НАН України. – 2004. - №2.– С. 66–71. ***5.*** *Литвин О. М., Пасічник В. О.* Оптимізація числа вертикальних перерізів поверхні манекена та їх розміщення при математичному моделюванні. // Доповіді НАН України. – 2005. - №6.– С. 63–68. ***6.*** *Литвин О. Н., Пасечник В. А.* Оптимизация математической модели поверхности трехмерного тела. // Кібернетика и системный анализ. – 2006. - №1.– С. 103–112.

Надійшла до редколегії 30.09.09