

С. А. ЦЫБУЛЬНИК, канд. техн. наук, вед. науч. сотр.,
НИУ «УКРНИИЭП», Харьков

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОРОДНОГО ПОТОКА НА ВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНУЮ СПОСОБНОСТЬ ВЕРШИН

Предложен итеративный алгоритм выбора оптимальных интенсивностей источников однородного потока на слабо-связном взвешенном графе, любая пара вершин которого соединена не более чем одним путем, при ограничениях на пропускную способность вершин и фиксированных коэффициентах передачи (трансформации) потока по дугам. Алгоритм разработан для решения задач оптимизации водоохранных мероприятий для речной сети.

Ключевые слова: водный объект, водоохранные мероприятия, математическая модель, взвешенный граф, однородный поток, оптимизация.

Введение. Задачи о потоках на ориентированных графах (сетях) занимают важное место в теории исследования операций. Как правило, в них указывается пропускная способность ребер взвешенного графа, и при фиксированных весах вершин определяются оптимальные веса на ребрах графа, реализующие или максимизирующие поток между истоком и стоком графа [1–3]. Такой подход к взвешиванию пути на графе широко используется при решении разнообразных транспортных задач. Однако он не позволяет учесть структурные свойства таких естественных транспортных потоков, как водные системы, используемые для транспортировки удаляемых с возвратными водами отходов производства и жизнедеятельности человека.

В отличие от обычных транспортных задач, у графа речной сети пропускная способность устанавливается не для ребер, а для вершин. При этом оптимизируемыми переменными являются интенсивности источников потока в вершинах, а в качестве веса ребер фиксируются коэффициенты передачи (трансформации) потока между вершинами.

Оптимизация потока вещества через речную сеть заключается в нахождении таких коэффициентов уменьшения исходных интенсивностей источников потока в вершинах графа, при которых удовлетворяются ограничения на пропускную способность вершин (створов контроля качества воды), и достигается экстремум выбранного критерия оптимальности, например, суммарных затрат на необходимое снижение исходных интенсивностей источников потока. В общем случае такая задача может быть решена только с использованием достаточно сложных методов нелинейного математического программирования. В связи с этим актуальна разработка более простых и эффективных частных алгоритмов решения, учитывающих специфические особенности конкретной задачи.

Цель исследования: разработка алгоритма выбора оптимальных значений коэффициентов регулирования интенсивностей источников однородного потока в вершинах ориентированного слабо-связного взвешенного графа, любая пара вершин которого соединена не более, чем одним путем, при ограничениях на пропускную способность вершин и фиксированном весе направленных ребер (дуг) графа.

Постановка задачи. Пусть $G=(V,A)$ – ориентированный слабо-связный взвешенный граф, где $V=\{v_k\}$, $k \in K$ – множество вершин графа, $A=\{a_r\}$, $r \in R$ – множество дуг графа и пусть каждой вершине графа смежно не более одной его вершины.

Зададим на графе G однородный поток C , с источниками c_k в вершинах v_k . Без ограничения общности будем полагать, что граф содержит только один сток v_m со степенью выхода равной нулю. В противном случае добавим к графу новую вершину в качестве единственного стока, соединенного со старыми стоками дугами с нулевой пропускной способностью.

Определим интенсивности источников потока в вершинах как

$$\bar{c}_k = \sum_{i \in I_k} \bar{a}_{ki} \bar{c}_{ki} (1 - u_i), \quad (1)$$

где $\bar{c}_{ki}$ – исходная интенсивность источника потока i в вершине k ;

I_k – множество индексов источников потока в вершине k ;

$\bar{a}_{ki}$ – коэффициент передачи потока от источника i к вершине k ($0 \leq \bar{a}_{ki} \leq 1$);

u_i – коэффициент регулирования интенсивности источника i ($0 \leq u_i \leq 1$).

Тогда задача оптимизации интенсивности потока может быть записана в виде задачи математического программирования с критерием вида

$$\left\{ F(u) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} f_i(u_i) \right\} \rightarrow \min_u. \quad (2)$$

и системой ограничений вида

$$c_k \leq b_k, \quad k \in K, \quad (3)$$

где $f_i(u_i)$ – затраты на регулирование интенсивности источника потока $i \in I_k$ в вершине k ;

c_k – суммарный поток через вершину k

$$c_k = \bar{c}_k + \sum_{j \in J_k} a_{kj} c_j, \quad k \in K; \quad (4)$$

a_{kj} – коэффициент передачи потока от вершины j к вершине k ($0 \leq a_{kj} \leq 1$);

J_k – множество индексов вершин, которым смежна вершина k ;

b_k – ограничение на суммарный поток через вершину k .

Результаты исследования. Пронумеруем вершины покрывающего дерева графа начиная от конца каждой ветви к ее корню, нумеруя вершины ветвления после нумерации всех вышележащих вершин. Соответственно порядку вершин, последовательно пронумеруем источники потока в них.

Преобразуем (4) к не рекуррентной форме, развернем относительно u_i и подставим в (3). Умножим обе части каждого ограничения k на общий коэффициент передачи потока от вершины k к стоку графа. Тогда в каждом ограничении перед каждой переменной u_i будет стоять один и тот же коэффициент α_i ($0 \leq \alpha_i \leq 1$) и ограничения задачи примут вид

$$\sum_{i \in \Theta_k} \alpha_i u_i \geq \beta_k, \quad k \in [1, m], \quad (5)$$

$$u_i^{\min} \leq u_i \leq u_i^{\max}, \quad i \in [1, n], \quad (6)$$

где m – мощность множества K ;

n – мощность множества источников потока по всем вершинам графа;

Θ_k – множество индексов источников, влияющих на поток в вершине k ;

$u_i^{\min}$ и $u_i^{\max}$ – ограничения на допустимые значения переменной u_i .

Ограничения (5) назовем вложенными, т.к. при выбранном способе нумерации вершин графа для любой пары вершин (k, p) справедливо условие

$$(\Theta_k \cap \Theta_p) \Rightarrow (k < p) \wedge (\Theta_k \subset \Theta_p) \vee (p < k) \wedge (\Theta_p \subset \Theta_k). \quad (7)$$

Будем далее полагать, что $f_i(u_i)$ – выпуклые (вниз) монотонно возрастающие функции на R^n . Теоретически это сужает область возможного применения алгоритма, но на практике в транспортных задачах рассматриваемого вида критерияльные функции именно таковы.

Монотонность и выпуклость функций $f_i(u_i)$, неотрицательность коэффициентов α_i и вложенность ограничений (5) позволяют построить итеративную пошаговую процедуру решения задачи (2), (5), (6), основанную на идеях методов максимального элемента и последовательных приращений и кусочно-линейной аппроксимации функций $f_i(u_i)$ [4]. Необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{I. } \forall i \in I_k, \quad k \in K^n : u_i &= u_i^{\min}, \\ \text{II. } \forall (i, p) \in \Theta_k, \quad k \in K^a : \frac{c_i^+}{\alpha_i} &\geq \frac{c_p^-}{\alpha_p}, \end{aligned} \quad (8)$$

где c_i^- и c_i^+ – угловые коэффициенты кусочно-линейной аппроксимации функций $f_i(u_i)$ с шагом h_i влево и вправо от текущего значения переменной u_i ;

K^a – множество активных ограничений системы (5);

K^n – множество пассивных ограничений системы (5), не вложенных ни в одно из активных ограничений (если множество не пусто, оно по определению включает последнее ограничение задачи для вершины m).

Первое условие означает, что переменные, не входящие в активные ограничения, принимают минимальные значения. Второе – что решение нельзя улучшить ни по какой паре входящих в активные ограничения переменных при противоположном приращении последних.

Пусть M – достаточно большое число. Определим границы интервалов и угловые коэффициенты кусочно-линейной аппроксимации $f_i(u_i)$, $i \in [1, n]$ как

$$\begin{aligned} u_i^- &= \max(u_i^{\min}, u_i - h_i), \\ u_i^+ &= \min(u_i^{\max}, u_i + h_i), \\ c_i^- &= \begin{cases} (f_i(u_i) - f_i(u_i^-)) / (u_i - u_i^-), & \text{если } u_i > u_i^{\min}, \\ 0, & \text{если } u_i = u_i^{\min}, \end{cases} \\ c_i^+ &= \begin{cases} (f_i(u_i^+) - f_i(u_i)) / (u_i^+ - u_i), & \text{если } u_i < u_i^{\max}, \\ M, & \text{если } u_i = u_i^{\max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Определим для переменной u_p минимальную невязку пассивных ограничений задачи, вложенных в ограничение с номером s как

$$\gamma_p(s) = \min_{k \in K^a} \left(\sum_{j \in \Theta_k} \alpha_j u_j - \beta_k / p \in \Theta_k, k < s \right). \quad (10)$$

Пусть K_γ – множество k , доставляющих минимум $\gamma_p(s)$, $\omega(i) = \min \{ j / j \in K^a, p \in \Theta_j \}$ – номер первого активного ограничения, содержащего u_i и ε – достаточно малая величина. Тогда алгоритм определения оптимальных значений коэффициентов регулирования интенсивностей источников потока u_i можно представить в следующем виде:

1. Положить $h_i = 0,5 \cdot (u_i^{\max} - u_i^{\min})$ для $i \in [1, n]$.
2. Положить $u_i = u_i^{\max}$ для $i \in [1, n]$; если система (5) несовместна, остановиться, так как задача не имеет решения.
3. Определить множества $K^a, K^{\text{н}}$.
4. Определить u_i^-, u_i^+, c_i^- и c_i^+ для $i \in [1, n]$.
5. Если выполняется условие оптимальности I, то если $K^a = \emptyset$ перейти к шагу 21, иначе перейти к шагу 10.
6. Определить $p = \arg \max_{j \in I_m} (c_j^- / \alpha_j)$.
7. Вычислить $\gamma_p(m+1)$ и $\delta_p = \min(\gamma_p(m+1) / \alpha_p, u_p - u_p^-)$.
8. Если $\delta_p = \gamma_p(m+1) / \alpha_p$, то переместить из множества $K^{\text{н}}$ в множество K^a все ограничения с номером $k \in K_\gamma$.
9. Положить $u_p = u_p - \delta_p$, определить $u_p^-, u_p^+, c_p^-, c_p^+$ и перейти к шагу 5.

10. Определить $t = \max \{j / j \in K^a\}$ и $p = \arg \max_{j \in \Theta_t} (c_j^- / \alpha_j)$.
11. Положить $s = \omega(p)$ и определить $i = \arg \min_{j \in \Theta_s} (c_j^+ / \alpha_j)$.
12. Если $i=p$, условие оптимальности II выполнено, перейти к шагу 20.
13. Если $\omega(i) \neq \omega(p)$, исключить из множества K^a ограничения k такие, что $i \in \Theta_k$ и $p \notin \Theta_k$.
14. Вычислить $\mu_p = \min(\alpha_p(u_p - u_p^-), \alpha_i(u_i^+ - u_i))$.
15. Определить $s = \min \{j / j \notin K, (i, p) \in \Theta_j\}$.
16. Вычислить $\gamma_p(s)$ и $\delta_p = \min(\gamma_p(s), \mu_p)$.
17. Положить $u_p = u_p - \delta_p / \alpha_p$ и $u_i = u_i + \delta_p / \alpha_i$.
18. Если $\delta_p = \gamma_p(s)$, то включить в множество K^a все ограничения с номером $k \in K_\gamma$.
19. Определить $u_p^-, u_p^+, c_p^-, c_p^+$ и $u_i^-, u_i^+, c_i^-, c_i^+$ и перейти к шагу 10.
20. Если $\max h_i > \varepsilon$, положить $h_i = h_i / 2, \forall h_i > \varepsilon$ и перейти к шагу 4.
21. Записать оптимальное решение.

Определенные с помощью данного алгоритма значения u_i определяют поток (3), удовлетворяющий наложенным ограничениям (4) и критерию оптимальности (2) и, следовательно, являются решением задачи (2)–(4).

Выводы. Разработанный алгоритм позволяет определить оптимальные водоохранные мероприятия, обеспечивающие нормативное качество поверхностных вод в бассейне реки по доминирующему либо интегральному показателю состава возвратных вод. Для расчета более сложных сетей, узлы которых соединены более чем одним путем, может быть использован разработанный автором универсальный алгоритм [5], позволяющий определить поток на графе произвольной конфигурации.

Список литературы: 1. Исследование операций : В 2-х т. Т. 1 / ред. Дж. Моудер, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – 712 с. 2. Басакер Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати. – М. : Наука, 1973. – 368 с. 3. Форд Л. Поток в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М. : Мир, 1966. – 276 с. 4. Берзин Е. А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Е. А. Берзин. – М. : Сов. радио, 1974. – 304 с. 5. Цыбульник С. А. Применение итеративных алгоритмов расчета качества вод при выборе водоохранных мероприятий / С. А. Цыбульник // В кн.: Комплексные водоохранные мероприятия. – Харьков : ВНИИВО. – 1981. – С. 118–124.

Bibliography (transliterated): 1. Moudier, Dzh., and S. Jelmagrabi, ed. *Issledovanie operacij*. Vol. 1. Moscow: Mir, 1981. 2 vols. 2. Basaker, R., and T. Saati. *Konechnye grafy i seti*. Moscow: Nauka, 1973. Print. 3. Ford L., and Falkerson D. *Potoki v setjah*. Moscow: Mir, 1966. Print. 4. Berzin, E. A. *Optimal'noe raspredelenie resursov i jelementy sinteza sistem*. Moscow: Sov. radio, 1974. Print. 5. Tsybulnik, S. A. "Primenenie iterativnyh algoritmov rascheta kachestva vod pri vybere vodoohrannyh meroprijatij." *Kompleksnyye vodoohrannyye meroprijatija*. Kharkiv: VNIIVO, 1981. 118–124. Print.

Поступила (received) 11.12.2014