*ISSN 2311-4738 (print)*
*ISSN 2413-3000 (online)*

УДК 658.51:631.3

***Ю. І. КОВАЛЬЧИК, О. І. ГОВДА***

# РОЗРАХУНОК ЙМОВІРНОСТІ ДИСКРЕТНИХ СТАНІВ СИСТЕМИ ІЗ П'ЯТЬМА ОДИНИЦЯМИ ЗБИРАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Застосовано підхід, заснований на положеннях теорії випадкових марківських процесів, до визначення ефективності функціонування систем із дискретними станами, зокрема, для визначення імовірності відповідних станів, у яких може перебувати система. Розглянуто приклад системи, складеної з п'яти одиниць збиральної техніки. Сформульовано задачу Коші для системи диференціальних рівнянь. Розраховано ймовірності перебування системи у дискретних станах.

**Ключові слова:** управління проектами, марківський процес, дискретні стани, рівняння Колмогорова.

**Вступ.** Для збирання зернових культур використовується складна і дорога техніка. Тому природно, що одним з пріорітетних завдань розвитку зернозбиральної техніки є підвищення її продуктивності.

**Аналіз стану питання.** Питанню вдосконалення моделей розрахунку показників продуктивності збиральної техніки, зокрема, комбайнів присвячені праці багатьох вчених. Здебільшого в таких моделях використовується узагальнений показник – добова продуктивність комбайна, що враховує дію таких факторів як технічна продуктивність в заданих умовах, простої через невчасну подачу транспортних засобів, технологічні та технічні відмови, погодні умови впродовж доби тощо [1, 2, 3, 4]. Проте подібні моделі не дають змоги врахувати структуру неефективного використання часу зміни та дію обслуговуючих систем, а саме технічних підрозділів парків збиральної техніки і т.д., що доволі ефективно може бути змодельовано за допомогою стохастичного підходу. Тому у [5, 6] було обґрунтовано доцільність та методологію застосування випадкових марківських процесів у моделях визначення продуктивності технічних засобів із складанням математичної моделі.

**Постановка задачі.** На основі підходу (застосування випадкових марківських процесів), сформульованого в роботах [5, 6] у статтях [7, 8] розглянуто модельний приклад для системи, утвореної трьома одиницями збиральної техніки. Розглянемо модельний приклад для системи, утвореної із п'ятьох елементів.

**Виклад основного матеріалу**. Розглянемо ймовірність відмов збиральної техніки. Оскільки ми маємо справу з невизначеними факторами відмов, які є випадковими величинами, у нашому випадку ймовірнісні характеристики цих величин можуть бути отримані з практики або відомі заздалегідь. Тоді для побудови математичних моделей застосовні так звані марківські випадкові процеси [5]. Тобто розглядатимемо такі випадкові процеси, для яких в будь-який момент часу $t_0$ ймовірнісні характеристики процесу в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент часу $t_0$ і не залежать від того, коли і як система прийшла до цього стану [5].

При цьому ми розглядатимемо процес із дискретними станами і неперервним часом. Тобто, вважаємо, що система, яка описує працездатність певної кількості одиниць збиральної техніки, може бути в різних можливих станах $S_1$, $S_2$, $S_3$, …, $S_n$, які можна заздалегідь перерахувати і які характеризуються відмовою внаслідок поломок і позапланових ремонтів певної кількості одиниць цієї техніки. Вважаємо, що перехід зі стану працездатності в стан поломки відбувається раптово, стрибкоподібно, практично моментально, тобто стани дискретні. Оскільки моменти переходів зі стану в стан не є керованими, а невизначені, випадкові, то такі переходи можливі в будь-який момент часу. Таким чином ми будемо розглядати лише процеси з дискретними станами й неперервним часом.

На основі стохастичної моделі [7] складемо систему Колмогорова для розрахунку ймовірності перебування системи, складеної з п'ятьох одиниць збиральної техніки, у можливих дискретних станах при управлінні проектами збирання сільськогосподарської продукції.

Для цього запишемо можливі дискретні стани цієї системи: $S_1$ – усі чотири одиниці справні; $S_2$ – 1-ша одиниця ремонтується, 2-га, 3-тя, 4-та та 5-та є справними; $S_3$ – 2-га одиниця ремонтується, а 1-ша, 3-тя, 4-та, 5-та є справними; $S_4$ – 3-тя одиниця ремонтується, а 1-ша, 2-га, 4-та, 5-та є справними; $S_1$, $S_5$ – 4-та одиниця ремонтується, а 1-ша, 2-га, 3-тя, 5-та є справними; $S_6$ – 5-та одиниця ремонтується, 1-ша, 2-га, 3-тя, 4-та є справними; $S_7$ – 1-ша та 2-га одиниці ремонтуються, а 3-тя, 4-та та 5-та є справними. Повний опис станів не подаємо через громіздкість запису. Скажемо лише, що усіх станів системи є 32, причому стан $S_{32}$ означає, що всі 5 одиниць ремонтуються. Припускаємо, що середній час ремонту одиниці с/г техніки не залежить від того, чи ремонтується одна одиниця, чи кілька відразу. Також вважаємо, що, наприклад, перехід системи зі стану $S_1$ у стан $S_7$ можливий лише через стани $S_2$ та $S_3$. Тобто вважаємо, що всі одиниці виходять із ладу незалежно одна від одної, ймовірністю одночасного виходу їх із ладу нехтуємо.

Тут $\lambda_i$ ($i$ = 1..5) – інтенсивності потоків подій, що сприяють відмовам відповідно першої, другої, третьої, четвертої та п'ятої одиниць техніки; $\mu_i$ ($i$ = 1..5) – інтенсивності потоків подій “закінчення ремонту” відповідно першої, другої, третьої, четвертої та п'ятої одиниць збиральної техніки.

Розглянемо систему $S$, яка має тридцять два можливі стани $S_1$, $S_2$, …, $S_{32}$. Через $p_i(t)$ позначатимемо ймовірність перебування системи $S$ в момент часу $t$ у стані $S_i$ ($i$ = 1..32). Для будь-якого моменту сума всіх ймовірностей станів дорівнює одиниці.

Можна знайти всі ймовірності станів $p_i(t)$ як функції часу. Для відшукання ймовірностей станів $p_i(t)$ складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова [7]. Складемо перше рівняння. Розглянемо одну з ймовірностей станів, наприклад $p_1(t)$. Це – ймовірність того, що в момент $t$ система буде в стані $S_1$, тобто всі п'ять одиниць техніки будуть справними. Надамо $t$ малого приросту $\Delta t$ і знайдемо $p_1(t+\Delta t)$ – ймовірність того, що в момент $t+\Delta t$ система перебуватиме у стані $S_1$. Очевидно, це може трапитися за таких обставин: 1) в момент $t$ система уже була в стані $S_1$ і за час $\Delta t$ не вийшла з нього; 2) в момент $t$ система була в стані $S_2$, а за час $\Delta t$ перейшла у стан $S_1$; 3) в момент $t$ система була в стані $S_3$, а за час $\Delta t$ перейшла у стан $S_1$; 4) в момент $t$ система була в стані $S_4$, а за час $\Delta t$ перейшла у стан $S_1$; 5) в момент $t$ система була в стані $S_5$, а за час $\Delta t$ перейшла у стан $S_1$; 6) в момент $t$ система була в стані $S_6$, а за час $\Delta t$ перейшла у стан $S_1$ .

Знайдемо ймовірність першого варіанта. Ймовірність того, що в момент $t$ система знаходиться у стані $S_1$, дорівнює $p_1(t)$. Цю ймовірність потрібно помножити на ймовірність того, що за час $\Delta t$ жодна з одиниць техніки не вийде з ладу (система не перейде ні у стан $S_2$, ні у стан $S_3$, ні у стан $S_4$, ні у стан $S_5$, ні у стан $S_6$. Інтенсивність потоку подій, що виводить систему із стану $S_1$ дорівнює $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5$ .

Отже, ймовірність того, що за час $\Delta t$ система вийде зі стану $S_1$, є рівною $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)\Delta t$, а тому ймовірність того, що за час $\Delta t$ система не вийде зі стану $S_1$: $1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)\Delta t$.

Таким чином, ймовірність першого варіанта становить $p(t)\left[1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)\Delta t\right]$.

Знайдемо ймовірність другого варіанта. Вона дорівнює ймовірності того, що в момент $t$ система була в стані $S_2$, а за час $\Delta t$ перейшла у стан $S_1$, тобто вона дорівнює $p_2(t)\mu_1\Delta t$.

Аналогічно ймовірностями третього, четвертого, п'ятого, шостого варіантів є відповідно ймовірності

$p_3(t)\mu_2\Delta t$, $p_4(t)\mu_3\Delta t$, $p_5(t)\mu_4\Delta t$ і $p_6(t)\mu_5\Delta t$.

Додаючи всі ці ймовірності, отримаємо:

$$\begin{aligned}&p_1(t+\Delta t)=\\&=p_1(t)\left[1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)\Delta t\right]+\\&+p_2(t)\mu_1\Delta t+p_3(t)\mu_2\Delta t+p_4(t)\mu_3\Delta t+\\&+p_5(t)\mu_4\Delta t+p_6(t)\mu_5\Delta t.\end{aligned} \quad (1)$$

Після нескладних перетворень в (1) отримаємо диференціальне рівняння для $p_1(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt}&=\mu_1 p_2+\mu_2 p_3+\mu_3 p_4+\mu_4 p_5+\\&+\mu_5 p_6-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)p_1.\end{aligned} \quad (2)$$

Аналогічно записуються диференціальні рівняння для всіх інших станів. Долучивши до них рівняння (2), отримаємо систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів. Через громіздкість запису системи 32-х рівнянь її тут не приводимо.

Щоб розв’язати систему рівнянь Колмогорова та знайти ймовірності станів, передусім потрібно задати початкові умови. Якщо точно відомий початковий стан системи $S_i$, то у початковий момент (при $t=0{,}1$ год) $p_i(t)=1$, всі інші початкові ймовірності є рівними нулю.

У нашому випадку природно припустити, що в початковий момент часу всі п'ять одиниць техніки є справними, тобто розв’язуватимемо систему Колмогорова при таких початкових умовах:

$$p_1(t)=1,\ p_i(t)=0,\ (i=2\ldots32) \quad (3)$$

Будемо розглядати інтенсивності $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$, $\lambda_4(t)$, $\lambda_5(t)$ як фунції від часу, що підпорядковані закону розподілу Вейбулла. Це підтверджується даними спостережень [9]. Функції інтенсивності відмов моделюють у вигляді $\lambda(t)=\lambda_0\alpha t^{\alpha-1}$, де $\lambda_0$, і $\alpha$ – числові параметри закону розподілу Вейбулла [10].

Для визначення параметрів $\lambda_0$, і $\alpha$ функції $\lambda$(t) використаємо математично оброблені статистичні дані [9] та метод найменших квадратів. Після знаходження числових параметрів функції $\lambda_i(t)$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}&\lambda_1(t)=877{,}96\cdot t^{-1{,}88193},\\&\lambda_2(t)=816{,}84\cdot t^{-1{,}85615},\\&\lambda_3(t)=838{,}66\cdot t^{-1{,}91494},\\&\lambda_4(t)=838{,}66\cdot t^{-1{,}91494},\\&\lambda_5(t)=1699{,}66\cdot t^{-2{,}06554}.\end{aligned} \quad (4)$$

Зробимо модельне припущення, що інтенсивність потоку подій, що сприяють виходу зі стану поломки не залежить від часу, тобто, знайдемо значення $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$, $\mu_5$. Для цього розглянемо конкретні марки зернозбиральних комбайнів «Нива ффект», «CS 520, New Holland», «CS 640 RS, New Holland», «CX 840, New Holland». На сучасному на ринку України налічується біля 50 тисяч зернозбиральних комбайнів,

*ISSN 2311-4738 (print)*
*ISSN 2413-3000 (online)*

які відрізняються як технічними, так і вартісними показниками [9]. На основі хронометражних спостережень за роботою зернозбиральних комбайнів, що працювали в умовах сільськогосподарських підприємств Львівщини, зібрані та математично опрацьовані статистичні дані про згадані часткові функціональні показники комбайнів (усунення технічних відмов) [9]. Зокрема

$$\mu_1 = 1,75\,,\ \mu_2 = 2\,,\ \mu_3 = 2,25\,,\ \mu_4 = 2,5\,,\ \mu_5 = 2,75 \quad (5)$$

Отримуємо систему диференціальних рівнянь з нелінійними коефіцієнтами

$$\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \lambda_3(t),\ \lambda_4(t),\ \lambda_5(t).$$

Отже, маємо сформульовану задачу Коші для системи диференціальних рівнянь з початковими умовами (3), яку розв'яжемо числовими методами за допомогою програмного пакету Maple.

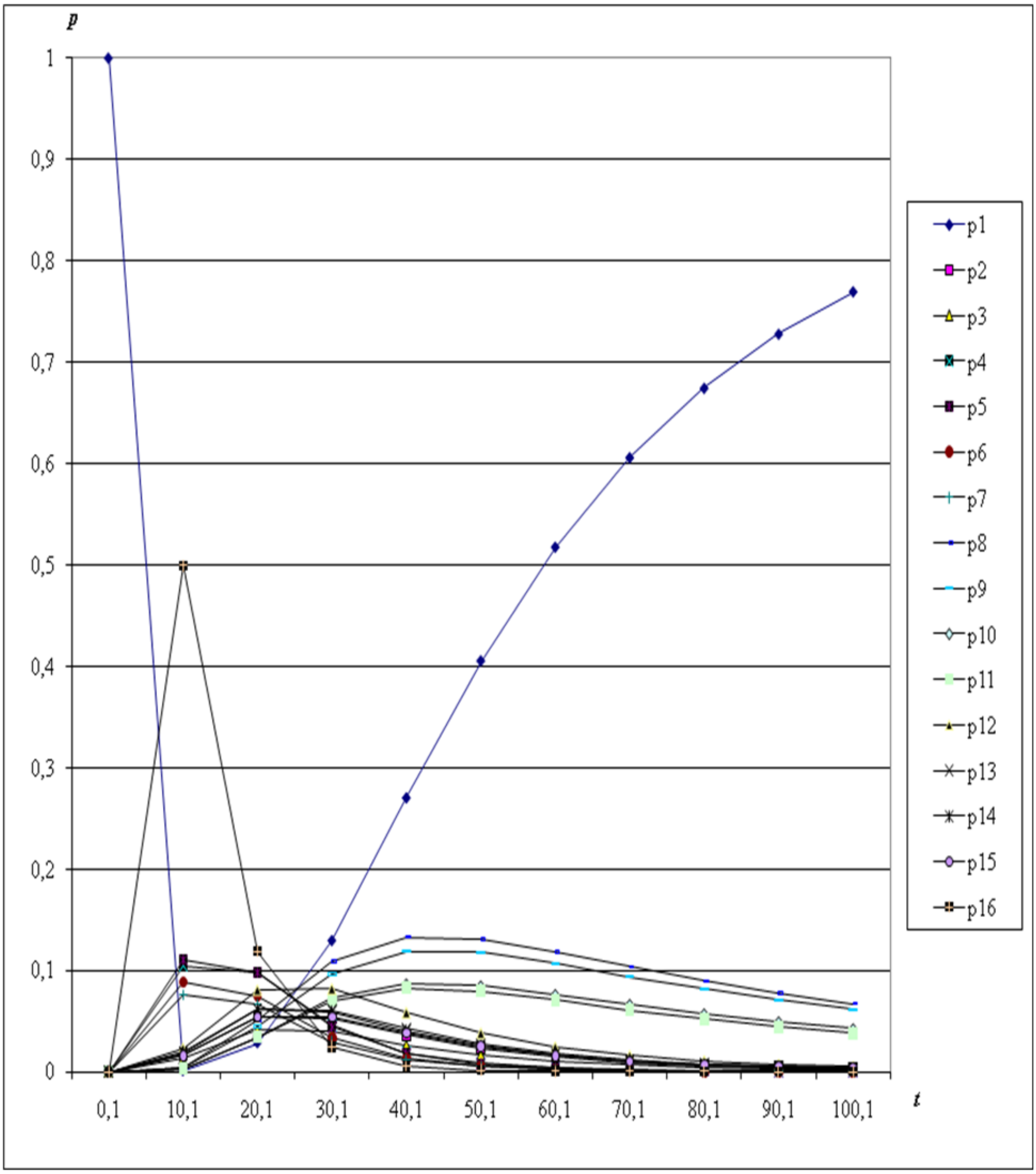


Рис. 1 – Залежність від часу ймовірностей виходу техніки з ладу.

Отримали табульовані розв'язки, частину з яких (16 з 32) подаємо тут у вигляді графіків (див. рис. 1). На основі аналізу співвідношень ймовірностей на рис. 1 встановлено як змінюються ймовірності станів системи з плином часу. Отримані результати за умови відомої номінальної продуктивності кожної одиниці техніки дозволяють обчислити математичне сподівання швидкості збору врожаю наявним парком.

Відтак, при заданому інтервалі надійності збору врожаю на визначеній площі можуть бути сформульовані параметри, за якими можна оцінити достатню кількість одиниць парку збиральної техніки.

**Висновки.** Показано, що на різних проміжках часу ймовірності перебування системи чотирьох одиниць у відповідних дискретних станах суттєво відрізняються. Зокрема, встановлено, що $p_1$ – ймовірність того, що всі п'ять одиниць збиральної техніки будуть справними – є найбільшою, хоч і достатньо швидко зменшується у перші 10 годин роботи системи. У наступні 20 годин роботи значення цієї ймовірності досягає свого мінімуму. Після 30-и годин роботи системи $p_1$ знову швидко зростає, значно перевищуючи ймовірності інших станів, Ймовірності інших станів мають в перші 20-40 годин роботи системи зростаючий характер, після чого поволі спадають. Отримані результати дозволяють оцінити середню продуктивність парку збиральної техніки у кожен момент часу. Це дає можливість оптимального формування парку на період збору врожаю.

**Список літератури:** **1.** *Сидорчук, О.* Імітаційна модель роботи зернозбирального комбайна впродовж сезону [Текст] / *О. Сидорчук, В. Тимочко, Є. Цін* // Вісник ЛДАУ : агроінженерні дослідження. – 2001. – №5. – С. 17–26. **2.** *Тимочко В.* Відображення моделлю проекту збирання врожаю зернових культур у сільськогосподарському підприємстві [Текст] / *В. Тимочко* // Вісник ЛНАУ : агроінженерні дослідження. – 2009. – №13. – С. 43–51. **3.** *Dumenko K.* Design of process of providing of reliability of combine harvesters [Text] / *K. Dumenko, E. Shevchenko* // MOTROL. MOTORYZACJA I ENERGETYKA ROLNICTWA. – 2012. – T 14. №2, .Lublin, 51–56. **4.** *Smolinskyi S.* Tehnolohicheskiie s tehnicheskiie predposylky povysheniia efektyvnosti roboty zernouborochnoho kombaina [Text] / *S. Smolinskyi* // MOTROL. MOTORYZACJA I ENERGETYKA ROLNICTWA. – 2012. — T 14. №3, .Lublin, 64–68. **5.** *Вентцель Е. С.* Исследование операций [Текст] / *Е. С. Вентцель* – М. : Высшая школа, 2001. – 208 с. **6.** *Ковальчик Ю.* Використання випадкових марківських процесів в управлінні проектами збирання сільськогосподарської продукції [Текст] / *Ю. Ковальчик, С. Ковалишин, В. Тимочко* // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2011. – №1. – С. 57–59. **7.** *Ковальчик Ю. І.* Управління проектами збирання продукції із стохастичним моделюванням системи трьох об'єктів [Текст] / *Ю. І. Ковальчик, В. О. Тимочко, О. І. Говда* // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2012. – №1. – С. 17–24. **8.** *Kovalchyk Yu.* Calculation of discrete states probability of the system with four units of harvesting machines [Text] / *Yu. Kovalchyk, O. Govda* // ECONTECHMOD : an international quarterly journal on economics in technology, new technologies and modeling processes. – 2014. – Lublin; – Rzeszow, – Volum 3, number 4. – 63–68. **9.** *Сидорчук Л.* Ідентифікація конфігурації парку комбайнів у проектах систем централізованого збирання ранніх зернових культур [Текст] / *Л. Сидорчук* // Автореферат дисертації канд. техн. наук – Львів, 2008. – 18 с. **10.** *Васілевський О. М.* Нормування показників надійності технічних засобів [Текст] / *О. М. Васілевський, В. О. Поджаренко* – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 130 с.

**References:** **1.** Sydorchuk, O., Tymochko, V., & Tsip, E. (2001). Imitatsiyna model' roboty zernozbyral'noho kombayna vprodovzh sezonu [A simulation model of a combine harverster during the season]. *Visnyk LNAU: ahroinzhenerni doslidzhennya – Bulletin LNAU: ahgroinzhenerni research, 5*, 17–26 [in Ukrainian]. **2.** Tymochko, V. (2009). Vidobrazhennya modellyu proektu zbyrannya vrozhayu zernovykh kul'tur u sil's'kohospodars'komu pidpryyemstvi [A model of display of project of a harvesting crops in the agricultural enterprise]. *Visnyk LNAU: ahroinzhenerni doslidzhennya – Bulletin LNAU: ahgroinzhenerni research, 13*, 43–51 [in Ukrainian]. **3.** Dumenko, K., & Shevchenko, E. (2012). Design of process of providing of reliability of combine harvesters. *MOTROL. MOTORYZACJA I ENERGETYKA ROLNICTWA, 14, 2*, 51–56. **4**. Smolinskyi, S. (2012). Tehnolohicheskiie s tehnicheskiie predposylky povysheniia efektyvnosti roboty zernouborochnoho kombaina [Technological and technical prerequisites for improving the efficiency of combine harvesters]. *MOTROL. MOTORYZACJA I ENERGETYKA ROLNICTWA, 14, 3*, 64–68 [in Russsian]. **5.** Ventsel, E. S. (2001). *Isledovanie operatsyj [Research of operations]*. Moscow : Vysshaya shkola, 208 [in Russsian]. **6**. Kovalchyk, Y., Kovalyshyn, S., & Tymochko, V. (2011). Vykorystannya vypadkovych markivskych protsesiv v upravlinni proektamy zbyrannya silskogospodarskoj produktsii [Using random Markov processes in project management harvesting agricultural products]. *Shidno- Evropejs'kyj jurnal peredovyh tehnologij – Eastern-European journal of enterprise technologies, 1*, 57–59 [in Ukrainian]. **7.** Kovalchyk, Y., & Govda, O. (2012). Upravlinnya proektamy zbyrannya produktsij iz stochastychnym modelyuvannyam systemy troh obectiv [Project management storage of statistical modeling system of three objects]. *Shidno-Evropejs'kyj jurnal peredovyh tehnologij – Eastern-European journal of enterprise technologies, 1*, 17–24 [in Ukrainian]. **8**. Kovalchyk, Yu., & Govda, O. (2014). Calculation of discrete states probability of the system with four units of harvesting machines. *ECONTECHMOD : an international quarterly journal on economics in technology, new technologies and modeling processes, 3, 4*, 63–68. **9.** Sydorchuk, L. (2008). Identyfikatsiya konfiguratsii parku kombayniv u proektah system tsentralizovanogo zbyrannya rannih zernovyh kultur [Identifying configuration park projects combines centralized collection of early grain crops]. *Avtoreferat dysertatsii na zdobuttya nauk. Stupenya k.t.n. – Thesis candidate. Sc. Sciences*, 18 [in Ukrainian]. **10.** Vasilevsky, O. M., Podzarenko, V. O. (2010). *Normuvannya pokaznykiv nadiynosti tehnichyh zasobiv [Rationing reliability indices of means]*. Vinnytsya : VNTU, 129 [in Ukrainian].

*Надійшла (received) 25.11.2015*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

***Ковальчик Юрій Іванович*** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики ЛНАУ , тел.: 097 43 66 128, e-mail: yurij.kovalchyk@gmail.com

***Kovalchyk Yuriy Ivanovych*** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor , Director of Department of High Mathematic LNAU, тел..: 097 43 66 128, e-mail: yurij.kovalchyk@gmail.com

***Говда Оксана Ігорівна*** – старший викладач кафедри вищої математики ЛНАУ, тел.: 050 430 85 98, e-mail: oksana.govda@gmail.com

***Govda Oksana Igorivna*** – teacher of Department of High Mathematic LNAU, ph.: 050 430 85 98, e-mail: oksana.govda@gmail.com