

отвори, робити свердловини і т. ін. Багатоелектродні системи типу «стержень-стержень» і «стержень-площина», а також щілинні дають змогу не тільки руйнувати, а й подрібнювати бетон до потрібних розмірів, але не менше 2 мм. Багатоелектродні системи при дії імпульсів напруги наносекундного діапазону сприяють утворенню при пробі кількох паралельних каналів, що збільшує робочу зону руйнування.

Список літератури: 1. *Усов А.Ф., Семкин Б.В., Зиновьев Н.Т.* Переходные процессы в установках электроимпульсной технологии. – Ленинград, «Наука», 1987. – 188 с. 2. *Shipman John D.* Design and performance of the new multichannel oil output switch on the Gamble // Proc. III Intern. Pulsed Power Conf., Albuquerque, 1981. 3. *Johnson D.I., Vandervender I.P., Martin I.H.* High Power Density Water Dielectric Switching // IEEE Trans. And Plasma Science. – Vol. PS-8, № 3. – September, 1980. 4. *Семкин Б.В., Усов А.Ф., Курец В.И.* Основы электроимпульсного разрушения материалов // Апатиты, Изд. КНЦ РАН. – 1995. – 278 с. 5. *Курец В.И., Усов А.Ф., Цукерман В.А.* Электроимпульсная дезинтеграция материалов // Апатиты, Изд. КНЦ РАН. – 2002. – 326 с.

Надійшла до редакції 25.09.2006

УДК 621.315

А.А.НАУМЕНКО, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»;
В.М.ЗОЛОТАРЕВ, канд.техн.наук, ЗАО «Завод «Южкабель»

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЯДРАМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ БЕЗВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

Розроблено метод визначення діагональних елементів матриць, які відповідають ядрам інтегральних рівнянь Фредгольма для плоскопаралельних полів, коли межа між областями де шукають рішення має ділянки з малими радіусами кривизни. Розглянуто застосування методу до рішення таких рівнянь в задачах розрахунку полів різної фізичної природи.

A method for evaluation of diagonal matrix elements which are corresponding to the kernel of Fredholm's integral equations for flat-parallel fields, when the boundary between the areas where solutions are looked for has regions with small curvature radius, has been developed. An application of the method to the solution of such equations in the problems of evaluation of fields of different nature has been considered.

Применение на практике метода интегральных уравнений дает существенные преимущества в использовании вычислительной техники для решения технических задач. за счет значительного сокращения размерности матриц, получаемых в результате дискретизации поверхностей раздела сред вме-

сто дискретизации самих этих, зачастую обширных и не всегда ограниченных областей, где ищется решение. Однако трудности, возникающие при этом, часто сводят на нет преимущества вследствие потери точности решения некорректно-поставленных задач такого типа [1].

Постановка задачи. Во многих случаях расчета различных физических полей широкое распространение получили интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода, которые, соответственно, имеют вид:

$$\int_L \sigma(M)K(Q, M)dM = f(Q), \quad (1)$$

$$\sigma(Q) + \lambda \int_L \sigma(M)K(Q, M)dM = f(Q). \quad (2)$$

где $\sigma(M)$, $\sigma(Q)$ – искомая функция;

$K(Q, M)$, $f(Q)$ – ядро и правая часть уравнения соответственно;

M , Q – точки интегрирования и наблюдения;

λ – числовой параметр, который в общем случае может иметь комплексное значение.

В электротехнических приложениях, (1) и (2) очень часто применяются для расчета двумерных плоскопараллельных полей, описываемых уравнением Лапласа для скалярного потенциала φ при тех или иных граничных условиях на замкнутых или разомкнутых кривых L

$$\Delta\varphi = 0, \quad (3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа

Для иллюстрации приведем некоторые характерные задачи, решения которых сводятся к отысканию гармонической функции φ , удовлетворяющей уравнению (3). К ним можно отнести как внутренние так и внешние задачи расчета безвихревых электрических полей во всевозможных протяженных системах электродов (рис. 1). Существенно здесь то, что реальные электроды такой двумерной геометрии обычно содержат радиусы скругления r_0 , которые сами по себе хотя и являются малыми по сравнению с характерным размером a рассматриваемой системы, но всегда остаются конечными величинами. Это обусловлено различными другими требованиями, например, в случаях а), б), в) – необходимостью уменьшения электрической напряженности \vec{E} до уровней, приемлемых для работы изоляции или сугубо технологическими требованиями изготовления ребер секторных проводов (случай г), условиями их работы в силовых кабелях (случай в) и т.п.

Во всех этих задачах ядро интегрального уравнения имеет вид

$$K(Q, M) = \ln \frac{1}{r_{QM}}, \quad (4)$$

где r_{QM} – величина радиус – вектора из точки наблюдения Q в точку интегрирования M .

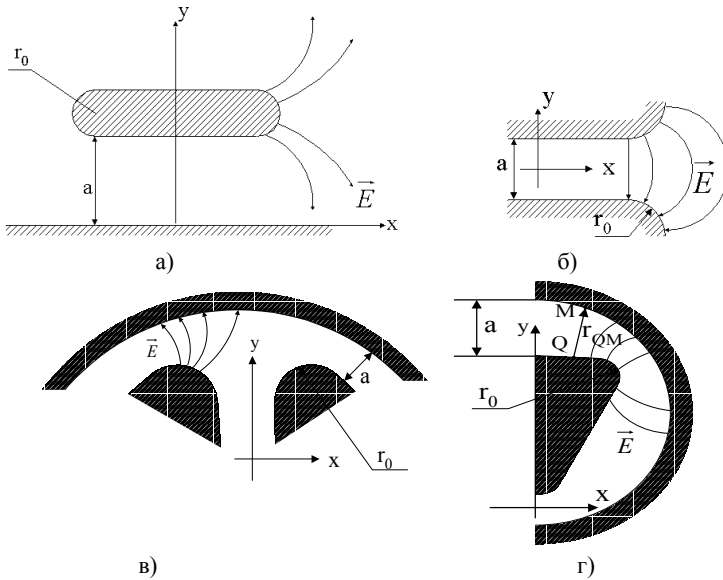


Рисунок 1 – Характерные двумерные конфигурации поперечного сечения систем протяженных электродов в различных задачах расчета безвихревых полей:

а) – полосковой линии; б) – плоского конденсатора с конечными радиусами скругления краев электродов; в) – многожильного силового кабеля с фасонными жилами в металлической оболочке; г) – определения контрольных профилей при волочении секторного провода с круглой заготовки. Во всех случаях имеет место концентрация силовых линий поля на участках малого радиуса r_0 скругления электродов

Для применяемых на практике систем электродов аналитические решения задач в виде уравнений Фредгольма (1), (2) отыскать обычно не удастся и такие решения находят вычислительными методами линейной алгебры на ЭВМ, когда одно или несколько упомянутых уравнений путем дискретизации на границах областей сводятся к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\|A_{ij}\| \cdot \|G_j\| = \|\varphi_i\|,$$

где $\|A_{ij}\|$ – матрица, соответствующая ядру интегрального уравнения;

$\|G_j\|$ – вектор столбец неизвестных;

$\|\varphi_i\|$ – вектор столбец правой части уравнения.

Тогда диагональный элемент матрицы A_{ii} можно найти так

$$A_{ii} = \int_L \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M = \int_L \ln \frac{1}{r} dl_M . \quad (6)$$

Однако аналитически вычислить определенный интеграл (6) не удастся, поэтому вычислим его приближенное значение, которое лежит в пределах (см. рис. 2)

$$A_{ii \min} < \int_L \ln \frac{1}{r} dl_M < A_{ii \max} , \quad (7)$$

где упомянутые пределы можно определить как

$$A_{ii \max} = \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{r_2} dx = \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{|x|} dx , \quad (8)$$

$$A_{ii \min} = \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{r_1} dx = \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{\sqrt{X^2 + A^2}} dx , \quad (9)$$

в силу того, что

$$A = r_0(1 - \cos \beta_0) ; \quad r_{1x} = x ; \quad r_1 = \sqrt{X^2 + A^2} ; \quad r_2 = x ; \quad h = 2r_0 \sin \beta_0 . \quad (10)$$

Интеграл в правой части (9) также не поддается аналитическому определению. Вычислим его приблизительно, для чего разложим подынтегральную функцию $f(x)$ равную

$$f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{X^2 + A^2}} \quad (11)$$

в ряд Маклорена окрестности точки $x = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (12)$$

Громоздкие вычисления, которые для краткости мы здесь опускаем, показывают, что в полученном разложении все нечетные производные $f^{(1)}(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(5)}(0)$, ..., в точке $x = 0$ обращаются в ноль, а четные производные равны

$$f(0) = \ln \sqrt{X^2 + A^2} \Big|_{x=0} = \ln A ; \quad (13)$$

$$f^{(2)}(0) = \frac{A^2 - X^2}{(A^2 + X^2)^2} \Big|_{x=0} = \ln \frac{1}{A^2} \quad (14)$$

и т.д.

Проинтегрировав теперь почленно разложение (12) имеем

$$\int f(x) dx = f(0)x + R(x) , \quad (15)$$

где $R(x)$ – остаток ряда Маклорена, полученный после почленного интегрирования разложения подынтегральной функции $f(x)$.

$$R(x) = \frac{f^{(2)}(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{(n+1)} + \dots \quad (16)$$

Из (13), (14), (15), (16), видно, что с точностью до величин по крайней мере третьего порядка малости значение интеграла (9) можно принять равным

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{\sqrt{X^2 + A^2}} dx &= 2 \int_0^{+\frac{h}{2}} \frac{1}{\sqrt{X^2 + A^2}} dx \approx 2f(0)x \Big|_0^{+\frac{h}{2}} = \\ &= 2x \ln A \Big|_0^{+\frac{h}{2}} = h \ln A = 2r_0 \sin \beta_0 \ln[r_0(1 - \cos \beta_0)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдем далее интеграл (8)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{|x|} dx &= 2 \int_0^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{x} dx = -2 \int_0^{+\frac{h}{2}} \ln x dx = -2F(x) \Big|_0^{+\frac{h}{2}} = \\ &= -2 \left[F\left(\frac{h}{2}\right) - F(0) \right] = 2 \left[F(0) - F\left(\frac{h}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

где $F(x)$ – первообразная функция, имеющая вид $F(x) = x \ln x - x$.

На нижнем пределе интегрирования при $x = 0$ в значении первообразной функции $f(0)$ имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Для того, чтобы раскрыть ее применим правило Лопиталья

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Значение первообразной функции на верхнем пределе интегрирования равно

$$-F\left(\frac{h}{2}\right) = x(1 - \ln x) = x(\ln e - \ln x) = x \ln \frac{e}{x} \Big|_{x=\frac{h}{2}} = \frac{h}{2} \ln \frac{2e}{h}$$

где $e = 2,71\dots$ – основание натуральных логарифмов.

Таким образом

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \ln \frac{1}{|x|} dx = \frac{h}{2} \ln \frac{2e}{h}. \quad (18)$$

После чего приближенное значение диагонального элемента матриц, со-

ответствующих интегральным уравнениям (1), (2) можно определить как среднее арифметическое значений интегралов (8), (9). Опуская промежуточные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} \overline{A_{ii}} &\approx \frac{A_{ii_{\max}} - A_{ii_{\min}}}{2} = \frac{h \ln A - \frac{h}{2} \ln \frac{2e}{h}}{2} \approx \\ &\approx r_0 \sin \beta_0 \left[1,5 \ln r_0 + \ln(1 - \cos \beta_0) + \frac{1}{2} \ln \sin \beta_0 - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Анализ полученных результатов. Оценку вида (19) удается получить благодаря тому, что функция $\ln(1/r_1)$ мажорирует функции $\ln(1/r)$, являющуюся в свою очередь мажорантой функции $\ln(1/r_2)$. При неограниченном увеличении количества разбиений n участка окружности L и ограниченном r_0 , угол β_0 стремится к нулю, а вместе с ним стремится к нулю и $\overline{A_{ii}}$. В самом деле в (19) в произведениях $\sin \beta_0 \cdot \ln(1 - \cos \beta_0)$ и $\sin \beta_0 \cdot \ln(\sin \beta_0)$ переменная $\sin \beta_0$ стремится к нулю, так как стремится к нулю сама бесконечно малая β_0 , то есть быстрее, чем $\ln(1 - \cos \beta_0)$ и $\ln(\sin \beta_0)$ стремятся к бесконечности, поэтому в целом $\overline{A_{ii}}$ также стремится к нулю. С другой стороны при r_0 стремящемся к нулю и ограниченном β_0 , в силу упомянутого, произведение $r_0 \ln r_0$ также стремится к нулю, а вместе с этим стремится к нулю и среднее значение диагонального элемента $\overline{A_{ii}}$.

Таким образом при неограниченном уменьшении β_0 и r_0 диагональный элемент $\overline{A_{ii}}$ матриц, соответствующих уравнениям (1) и (2) также неограниченно уменьшается, что не нарушает условие квадратичной интегрируемости ядра, то есть условие существования интеграла Лебега

$$\int_L K^2(Q, M) dM dQ < \infty$$

и подтверждает правильность полученных результатов для рассмотренных ядер $K(Q, M)$, имеющих слабую особенность при $Q = M$.

Выводы. Предложен метод определения диагональных элементов матриц, соответствующих интегральным уравнениям Фредгольма первого и второго рода для плоскопараллельных полей различной физической природы, когда граница между областями, в которых ищется решение, имеет участки с малыми радиусами скругления.

Список литературы. 1. Тозони О.В., Майергойз И.Д. Расчет трехмерных электродинамических полей. – Киев, Техніка, 1974. – 352 с.

Поступила в редколлегию 20.10.2006