

*В.М. ГРИБАНОВ, д.т.н., Н.В. КЛИПАКОВ, асп.,
Ю.В. ГРИБАНОВА, к.т.н., А.Е. ДОСТАЛЬ, асп., Луганск, ВНУ им. В.
Даля*

КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЗУБЧАТЫХ ГИПЕРБОЛОИДНЫХ ПЕРЕДАЧ НОВИКОВА ВНЕШНЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ, НАРЕЗАЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КОСОЗУБЫМИ ДОЛБЯКАМИ

In article analytical expressions of the basic quality indicators of serviceability of considered transfers are received

В машиноведении работоспособность зубчатых передач принято оценивать качественными показателями – критериями, характеризующими локально-кинематические и гидродинамические явления в зоне контакта зубьев, нагрузочную способность передач и их восприимчивость к погрешностям: V^{*2} и η^m – относительная скорость скольжения и удельные скольжения активных поверхностей зубьев ведущего ($m=1$) и ведомого ($m=2$) колеса (рис. 2); $\Omega^{*кач}$, $\Omega^{*верч}$ и V^E – относительные скорости качения (перекатывания), верчения и суммарная скорость перемещения точек контакта в направлении, перпендикулярном большой оси эллиптической площадки мгновенного контакта (рис. 1, 2); ϑ – угол между вектором суммарной скорости и большой осью эллиптической площадки мгновенного контакта (рис. 2); α_I^m , α_{II}^m и σ_{max} – главные кривизны активных поверхностей зубьев и максимальное напряжение в корне зуба; α – коэффициент чувствительности передачи к погрешностям изготовления и монтажа.

Трение, износ и приработка зубьев, КПД передачи находятся в прямой зависимости от V^{*2} , η^m , $\Omega^{*верч}$. Скорости $\Omega^{*кач}$, V^E оказывают существенное влияние на образование масляного клина – с их увеличением улучшаются условия для образования масляного клина, следовательно, создаются более

благоприятные условия контактирования зубьев и наоборот. Угол ϑ , главные кривизны, определяющие приведенную кривизну α_{np} , а также σ_{max} и α оказывают существенное влияние на нагрузочную способность передач – более высокая нагрузочная способность будет у тех передач, у которых угол ϑ больше, а характеристики α_{np} , σ_{max} и α меньше и наоборот.

Общие формулы для вычисления упомянутых качественных показателей (критериев) получим следующим образом. В точках контакта зубьев должны выполняться условия

$$\Omega_1 \vec{r}_1 = \Pi \gamma \Omega_2 \vec{r}_2 + a_w \vec{j}, \quad \Omega_1 \vec{e}_1 = \Pi \gamma \Omega_2 \vec{e}_2, \quad (1)$$

выражающие связь-равенство радиус-векторов

$$\vec{r}_m = x_m \vec{i} + y_m \vec{j} + z_m \vec{k} \quad (2)$$

активных поверхностей зубьев ведущего ($m=1$) и ведомого ($m=2$) колес и совпадение ортов

$$\vec{e}_m = e_{xm} \vec{i} + e_{ym} \vec{j} + e_{zm} \vec{k} \quad (3)$$

их нормалей в неподвижной системе координат рабочего зацепления, где

$$\Omega_m = \begin{vmatrix} \cos \alpha^{m-} & -1^{m-} \sin \alpha^{m-} & 0 \\ 1^{m-} \sin \alpha^{m-} & \cos \alpha^{m-} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Pi \gamma = \begin{vmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{vmatrix}$$

– матрицы, моделирующие вращение зубчатых колес и угол перекрещивания осей вращения, a_w – межосевое расстояние. Координаты векторов (2), (3) имеют вид [1]

$$\vec{r}_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{cases} x_m = A_m \cos \varphi_m - 1^m B_m \sin \varphi_m \\ y_m = -1^m A_m \sin \varphi_m + B_m \cos \varphi_m, \\ z_m = C_m \end{cases}$$

$$\vec{e}_m = \begin{pmatrix} e_{xm} \\ e_{ym} \\ e_{zm} \end{pmatrix} = \begin{cases} e_{xm} = M_m \cos \varphi_m - {}^{-1} P_m \sin \varphi_m \\ e_{ym} = -1 {}^m M_m \sin \varphi_m + P_m \cos \varphi_m \\ e_{zm} = Q_m \end{cases}$$

Обозначено:

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \left[A_{\hat{\varphi}_m} \cos U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \quad -1 {}^m B_{\hat{\varphi}_m} \sin U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \right] \cdot \\ &\quad \cos \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} \quad -1 {}^m C_{\hat{\varphi}_m} \sin \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} \\ B_m &= -1 {}^m A_{\hat{\varphi}_m} \sin U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} + B_{\hat{\varphi}_m} \cos U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \quad - -1 {}^m r_m + r_{\hat{\varphi}_m} \\ C_m &= -1 {}^m \left[A_{\hat{\varphi}_m} \cos U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \quad - -1 {}^m B_{\hat{\varphi}_m} \sin U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \right] \cdot \\ &\quad \sin \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} + C_{\hat{\varphi}_m} \cos \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} M_m &= \left[M_{\hat{\varphi}_m} \cos U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \quad - -1 {}^m P_{\hat{\varphi}_m} \sin U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \right] \cdot \\ &\quad \cos \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} \quad - -1 {}^m Q_{\hat{\varphi}_m} \sin \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} \\ P_m &= -1 {}^m M_{\hat{\varphi}_m} \sin U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} + P_{\hat{\varphi}_m} \cos U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \\ Q_m &= -1 {}^m \left[M_{\hat{\varphi}_m} \cos U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \quad - -1 {}^m P_{\hat{\varphi}_m} \sin U_m - \varphi_{\hat{\varphi}_m} \right] \cdot \\ &\quad \sin \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} + Q_{\hat{\varphi}_m} \cos \beta_m - -1 {}^m \beta_{\hat{\varphi}_m} \end{aligned} \right\},$$

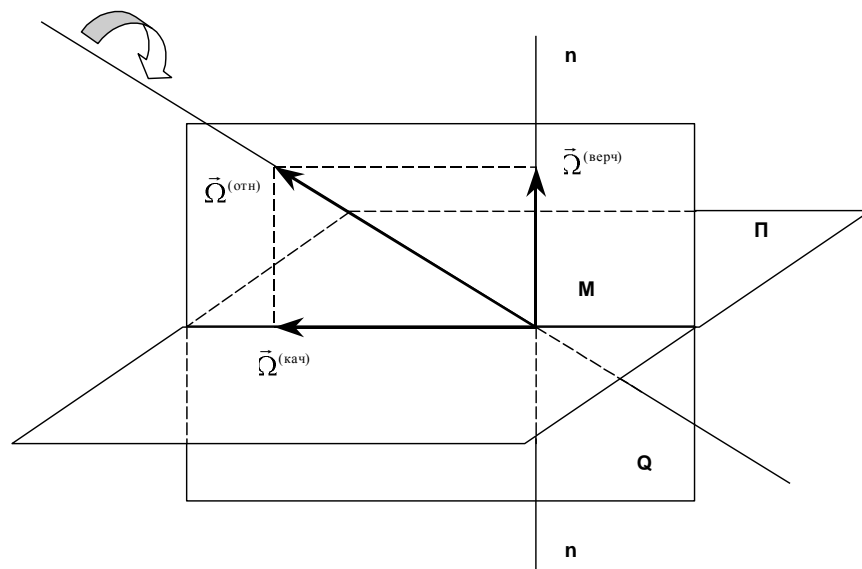


Рис. 1 – К определению относительных скоростей перекатывания и верчения активных поверхностей зубьев: М – точка начального (до упругого сближения зубьев) контакта; П и Q – касательная и нормальная плоскости

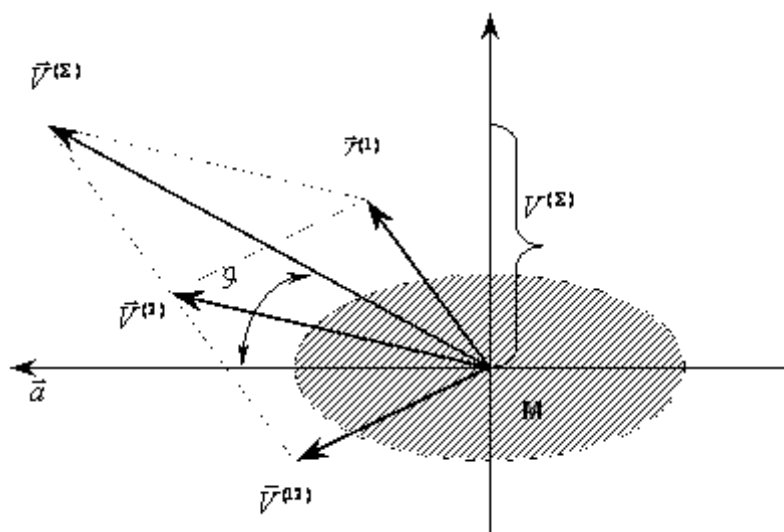


Рис. 2 – К определению g - угла, суммарной скорости и скорости скольжения активных поверхностей зубьев

$$\left. \begin{aligned} A_{\hat{c}m} &= \rho_m \cos v_m \cos \beta_{\hat{c}m} - b_m \operatorname{ctg} v_m \cos \beta_{\hat{c}m}, \\ B_{\hat{c}m} &= \rho_m \sin v_m - b_m + -1^m r_{\hat{c}m}, \\ C_{\hat{c}m} &= \rho_m \cos v_m \sin \beta_{\hat{c}m} + b_m \operatorname{ctg} v_m \operatorname{ctg} \beta_{\hat{c}m} \cos \beta_{\hat{c}m} + \\ &\quad r_m \varphi_m \cos \beta_m - a_m \operatorname{cosec} \beta_{\hat{c}m} \end{aligned} \right\};$$

$$M_{\hat{c}m} = -\cos v_m \cos \beta_{\hat{c}m}, P_{\hat{c}m} = -\sin v_m, Q_{\hat{c}m} = -\cos v_m \sin \beta_{\hat{c}m};$$

φ^m , v^m – криволинейные координаты на активных поверхностях зубьев;
 r_m – радиусы горлового сечения аксоидов гиперboloидных колес;
 $r_{\hat{c}m}$ – радиусы начальных цилиндров зуборезного инструмента; β_m – угол наклона образующей аксоида колеса передачи; $\beta_{\hat{c}m}$ – номинальный угол наклона зубьев зуборезного инструмента; $\rho_1 = \rho_a$, $\rho_2 = \rho_f$, $a_1 = x_a$, $a_2 = x_f$,
 $b_1 = y_a$, $b_2 = y_f$ – геометрические параметры исходного инструментального контура.

Продифференцируем первое уравнение (1) по времени t

$$\vec{W}^{\hat{c}m} + \vec{V}^{\hat{c}m} = \vec{W}^e + \vec{V}^e.$$

Здесь $\vec{W}^1 = \omega^1 \Omega_1^{\alpha} \vec{r}_1$, $\vec{W}^2 = \omega^2 \Pi \gamma \Omega_2^{\alpha} \vec{r}_2$, $\omega^m = d\alpha^m / dt$ – линейные скорости переносных (вращательных) движений; $\vec{V}^1 = \omega^1 \Omega_1 \vec{r}_1^{\varphi} \dot{\varphi}^1 + \vec{r}_1^v \dot{v}^1$, $\vec{V}^2 = \omega^2 \Pi \gamma \Omega_2 \vec{r}_2^{\varphi} \dot{\varphi}^2 + \vec{r}_2^v \dot{v}^2$ – скорости перемещения точек контакта по активным поверхностям зубьев.

Верхние индексы α , φ , v обозначают частные производные по углам поворота колес и по криволинейным координатам, а точки над функциями – производные по α^1 . Тогда $\vec{V}^{12} = \vec{V}^2 - \vec{V}^1$ – вектор относительной скорости. Его величина

$$V^{12} = \omega^1 \sqrt{D^{11} - 2D^{12} + D^{22}}. \quad (4)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} D^{mm} &= E^{mm} \dot{\varphi}^{m2} + 2F^{mm} \dot{\varphi}^m \dot{v}^m + G^{mm} \dot{v}^{m2} \\ D^{12} &= E^{12} \dot{\varphi}^1 \dot{\varphi}^2 + F^{12} \dot{\varphi}^1 \dot{v}^2 + F^{21} \dot{\varphi}^2 \dot{v}^1 + G^{12} \dot{v}^1 \dot{v}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

– первые квадратичные и совместная квадратичная формы активных поверхностей зубьев, коэффициенты которых

$$\left. \begin{aligned} E^m &= \vec{r}_m^{\varphi} \vec{r}_m^{\varphi}, \quad F^m = \vec{r}_m^{\varphi} \vec{r}_m^v, \quad G^m = \vec{r}_m^v \vec{r}_m^v \\ E^{12} &= \Omega_1 \vec{r}_1^{\varphi}, \Pi \gamma \Omega_2 \vec{r}_2^{\varphi}, \quad F^{12} = \Omega_1 \vec{r}_1^{\varphi}, \Pi \gamma \Omega_2 \vec{r}_2^v \\ G^{12} &= \Omega_1 \vec{r}_1^v, \Pi \gamma \Omega_2 \vec{r}_2^v, \quad F^{21} = \Omega_1 \vec{r}_1^v, \Pi \gamma \Omega_2 \vec{r}_2^{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

посчитаны в общих точках контакта зубьев $\varphi^m = \alpha^m$, $v^m = \alpha_k$ (α_k – угол профиля в номинальной точке контакта).

Кривизна поверхности в сечении нормальной плоскостью, содержащей касательный к поверхности (2) единичный вектор

$$\vec{\tau}^m = \mathbf{D}^{m-1/2} \vec{r}_m^{\varphi} d\varphi^m + \vec{r}_m^v dv^m, \quad (7)$$

вычисляется по формуле [2]

$$\kappa^m = D^{m-1} / d^m, \quad m=1,2, \quad (8)$$

где

$$d^{m\bar{}} = L^{m\bar{}} \dot{\phi}^{m\bar{2}} + 2M^{m\bar{}} \dot{\phi}^{m\bar{}} \dot{\nu}^{m\bar{}} + N^{m\bar{}} \dot{\nu}^{m\bar{2}} \quad (9)$$

– ее вторая квадратичная форма. Коэффициенты

$$L^{m\bar{}} = -\bar{r}_m^\varphi \bar{e}_m^\varphi, \quad M^{m\bar{}} = -\bar{r}_m^\varphi \bar{e}_m^\nu, \quad N^{m\bar{}} = -\bar{r}_m^\nu \bar{e}_m^\nu. \quad (10)$$

Формула (8) соответствует произвольно выбранному направлению (7).

Главные же кривизны $\varkappa_i^{m\bar{}}$, $\varkappa_{II}^{m\bar{}}$ вычисляются по формулам [2]

$$\left. \begin{aligned} \varkappa_{I,II}^{m\bar{}} &= H^{m\bar{}} \pm \sqrt{H^{m\bar{2}} - K^{m\bar{}}} \\ H^{m\bar{}} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}^{m\bar{}} N^{m\bar{}} + L^{m\bar{}} G^{m\bar{}} - 2M^{m\bar{}} F^{m\bar{}} - \mathfrak{E}^{m\bar{}} G^{m\bar{}} - F^{m\bar{2}} \right\}^{-1} \\ K^{m\bar{}} &= \mathfrak{E}^{m\bar{}} N^{m\bar{}} - M^{m\bar{2}} - \mathfrak{E}^{m\bar{}} G^{m\bar{}} - F^{m\bar{2}} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

В этом случае главные направления определяются из (7) для $d\phi^{m\bar{}}$, $d\nu^{m\bar{}}$, удовлетворяющих уравнениям

$$d\bar{e}_m = -\varkappa_i^{m\bar{}} d\bar{r}_m, \quad d\bar{e}_m = -\varkappa_{II}^{m\bar{}} d\bar{r}_m. \quad (12)$$

В силу выше сказанного $\dot{\phi}^{1\bar{}} = 1, \dot{\phi}^{2\bar{}} = r_1 \cos \beta_1 / r_2 \cos \beta_2, \dot{\nu}^{1\bar{}} = \dot{\nu}^{2\bar{}} = 0$ и квадратичные формы (5), (9) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} D^1 &= E^1, \quad D^{12} = \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} E^{12}, \quad D^2 = \left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \right)^2 E^2 \\ d^1 &= L^1, \quad d^2 = \left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \right)^2 L^2 \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Тогда относительная скорость скольжения (4) –

$$V^{12} = \omega^1 \sqrt{E^1 - 2 \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} E^{12} + \left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \right)^2 E^2}; \quad (14)$$

нормальная кривизна (8) –

$$\varkappa^m = E^m / L^m \quad m=1,2. \quad (15)$$

Главные же кривизны и главные направления определяются, как и ранее, формулами (11) и (12).

Коэффициенты удельных скольжений в направлении \vec{V}^{12} экстремального износа активных поверхностей зубьев, характеризующие интенсивность износа шестерни $n=1$ и колеса $n=2$ –

$$\eta^m = \vec{V}^{12} \vec{V}^{12} / \vec{V}^m \vec{V}^{12},$$

или

$$\eta^1 = -1 - \frac{D^2 - D^{12}}{D^1 - D^{12}}, \quad \eta^2 = 1 + \frac{D^1 - D^{12}}{D^2 - D^{12}}.$$

И окончательно, с учетом (13), –

$$\left. \begin{aligned} \eta^1 &= \left[\left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \right)^2 E^2 - 2 \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} E^{12} + E^1 \right] \left[\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} E^{12} - E^1 \right]^{-1} \\ \eta^2 &= \left[\left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \right)^2 E^2 - 2 \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} E^{12} + E^1 \right] \times \\ &\quad \times \left[\left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \right)^2 E^2 - \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} E^{12} \right]^{-1} \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Абсолютная величина $\Omega^{\text{верч}}$ вектора $\vec{\Omega}^{\text{верч}}$ угловой скорости верчения, направленного по нормали nn к активной поверхности зуба, является проекцией вектора $\vec{\Omega}^{\text{отн}} = \left\{ \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \sin \gamma; 0; 1 + \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \cos \gamma \right\}$ скорости относительного вращения колеса и шестерни на нормаль:

$$\Omega^{\text{верч}} = \omega^1 \left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} \sin \gamma \cos \beta_1 \cos \alpha_k + \frac{r_2 \cos \beta_2 + r_1 \cos \beta_1 \cos \gamma \sin \beta_1 \cos \alpha_k}{r_2 \cos \beta_2} \right) \quad (17)$$

Вектор относительной угловой скорости перекатывания (качения) активных поверхностей зубьев $\vec{\Omega}^{\text{кач}}$ является проекцией вектора $\vec{\Omega}^{\text{отн}}$ на касательную плоскость Π (рис. 1) и направлен по линии пересечения

плоскости Π с плоскостью Q , проходящей через общую нормаль nn и вектор $\vec{\Omega}^{отн}$. Следовательно, абсолютная величина скорости качения

$$\Omega^{кач} = \sqrt{\Omega^{верч}^2 - \Omega^{отн}^2}. \quad (18)$$

Пусть \vec{a} , \vec{b} – единичные векторы, определяющие направления большой и малой полуосей эллиптической площадки мгновенного контакта (рис. 2). В этом случае проекция V^{Σ} вектора $\vec{V}^{\Sigma} = \vec{V}^{1'} + \vec{V}^{2'}$ суммарной скорости на малую полуось –

$$V^{\Sigma} = \left(F^1 + \frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} F^{21} \right) / \sqrt{G^1}. \quad (19)$$

Аналогично, угол ϑ (рис. 2) между вектором суммарной скорости и направлением большой полуоси площадки мгновенного контакта вычисляется по формуле

$$\vartheta = \arccos \left[\left(\frac{r_1 \cos \beta_1}{r_2 \cos \beta_2} E^{12} + E^1 \right) / V^{\Sigma} \sqrt{E^1} \right]. \quad (20)$$

Максимальному напряжению в корне зуба и коэффициенту чувствительности придадим удобную в исследованиях форму записи

$$\sigma_{\max} = 6P_u h_0 / B_n S_0^2, \quad (21)$$

$$\varkappa = 1/m_n \left(\rho_f^* - \rho_a^* \right) \cos \alpha_k. \quad (22)$$

Здесь h_0 – плечо приложения равнодействующей P_u нагрузки на зуб; S_0 – толщина зуба в опасном сечении; B_n – длина зуба в направлении контактной линии; $\rho_f^* m_n = \rho_f$, $\rho_a^* m_n = \rho_a$ (m_n – модуль нормальный).

Вывод. Получены аналитические выражения, позволяющие численно оценивать качественные показатели работоспособности зубчатых гиперболоидных (начальные поверхности зубьев – однополостные гиперболоиды вращения) передач Новикова.

Список литературы: 1. *Грибанов В.М.* Зубчатые гиперboloидные передачи внешнего зацепления, генерируемые цилиндрическими косозубыми долбяками // Вісник Східноукраїнського національного університету.- 2001.- №11(45).- с.11-29; 2. *Выгодский М.Я.* Дифференциальная геометрия. – М.-Л.: Гос. изд-во техн. – теоретич. литературы. – 1949. – 511с.