УДК 621.833

***А.Ф. КИРИЧЕНКО А.Ф.**, д.т.н., **АРХИПОВ А.В.**, к.т.н, Харьков, Украина*

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ВАРИАЦИОННО-СТРУКТУРНОГО МЕТОДА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НДС ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Численный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) зубчатых колес с применением разработанного В.Л. Рвачевым вариационно-структурного метода [1] (международная аббревиатура RFM), становится предметом все большего числа научных исследований. Этапы применения RFM к расчету НДС зубчатых колес различной конфигурации достаточно подробно изложены в работе [2]. Вместе с тем, влияние скорости сходимости RFM на качество получаемых результатов расчетов исследовано не до конца. Это связано с тем, что при решении трехмерной задачи существенное увеличение числа координатных функций, т.е. членов разложения неопределенной компоненты структуры решения, требует применения самой современной вычислительной техники.

Известно, что применение методов Ритца и Бубнова-Галеркина обеспечивает сходимость в среднем, а в некоторых случаях – равномерную сходимость к решению краевой задачи [1]. Вопрос о сходимости приближений, получаемых по указанным методам, к искомому решению вариационной задачи, а также теоретическая оценка точности этих приближений являются весьма сложными [3]. Условия сходимости минимизирующей последовательности $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_n}$, полученной методом Ритца, к решению вариационной задачи и оценка быстроты сходимости для некоторых, часто встречающихся функционалов были разработаны в трудах Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова. Однако, даже для сравнительно простых случаев, полученные ими теоретические оценки погрешности очень сложны. Поэтому для оценки точности результатов, полученных методом Ритца и другими прямыми методами на практике используют следующий достаточно надежный прием: вычислив $\boldsymbol{u}_n$ и $\boldsymbol{u}_{n+1}$, сравнивают их между собой в нескольких точках. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно $\boldsymbol{u}_n$. Если же значения $\boldsymbol{u}_n$ и $\boldsymbol{u}_{n+1}$ хотя бы в некоторых из выбранных точек не совпадают, то процесс продолжается до тех пор, пока значения $\boldsymbol{u}_{n+k}$ и $\boldsymbol{u}_{n+k+1}$ не совпадут в пределах заданной точности.

В работе [2] для расчета НДС зубчатого колеса авторами предлагалось минимизировать функционал вида

$$J = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\lambda\theta^2 + 2G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) d\Omega - \iiint\limits_{\Omega} \rho f_i u_i \, d\Omega - \iint\limits_{\partial\Omega_3} t_i u_i \, d\left(\partial\Omega_3\right), \quad (1)$$

Дискретизация указанного функционала осуществляется на множестве координатных функций, построенных с помощью RFM. При этом неопределенная компоненты Φ может быть представлена в виде

$$\vec{\Phi}\left(x_1, x_2, x_3\right) \approx \vec{\Phi}_N\left(x_1, x_2, x_3\right) = \sum_{i+j+k=0}^{N} \vec{C}_{ijk}\,\varphi_{ijk}\left(x_1, x_2, x_3\right), \quad (2)$$

где $\vec{C}_{ijk} = C^1_{ijk}\vec{i} + C^2_{ijk}\vec{j} + C^3_{ijk}\vec{k}$, φ_{ijk} - элементы некоторого функционального пространства М, содержащего Φ, образующие в нем полную последовательность. В качестве $\{\varphi_{ijk}\}$ выберем степенные полиномы. Тогда приближенное решение задачи рассматриваемой задачи примет вид [2]

$$\vec{U}_n = \vec{U}_0 + \sum_{i+j+k=0}^{N} \left(C^1_{ijk}\vec{U}^1_{ijk} + C^2_{ijk}\vec{U}^2_{ijk} + C^3_{ijk}\vec{U}^3_{ijk}\right), \quad (3)$$

При этом число членов ряда разложения (координатных функций) определится максимальной степенью аппроксимирующего полинома.

В каких же пределах целесообразно выбирать количество координатных функций при численной реализации изложенного алгоритма? Малое число координатных функций не позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать неопределенную компоненту структуры решения. При значительном же их увеличении их числа ухудшается сходимость методов Ритца и Бубнова-Галеркина [4]. Опыт решения двумерных краевых задач с помощью RFM в рамках специализированной программирующей системы ПОЛЕ показывает, что увеличение числа координатных функций до 300 единиц в большинстве случаев приводит к нарушению сходимости процесса Ритца. Однако, если для двумерной задачи 300 координатных функций соответствует 23 степени полинома, то для трехмерной задачи уже 10 степень полинома соответствует 286 координатным функциям.

Достаточно ли ограничиться 10 степенью полинома для получения достоверного решения поставленной краевой задачи? Для ответа на этот вопрос авторами был минимизирован функционал, аналогичный (1), в котором третья компонента отсутствует. То есть решалась двумерная краевая задача. Для исследования сходимости численных результатов варьировались число координатных функций, определяемых максимальной степенью аппроксимирующего полинома N, и число узлов интегрирования m, используемых при вычислении элементов матрицы Ритца. В таблице приведены результаты значений безразмерной деформации в самой деформированной точке рассматриваемой области при нагрузке, близкой к критической, полученные для различного количества координатных функций и числа узлов интегрирования.

Таблица.

Исследование сходимости приближенного значения решения

в зависимости от числа узлов интегрирования и степени аппроксимирующего полинома.

N \ *m*	256	400	576	1024	1600
6	0,408	0,420	0,438	0,450	0,444
8	0,499	0,430	0,498	0,446	0,454
10	0,512	0,448	0,452	0,461	0,475
12	0,502	0,446	0,460	0,458	0,469
14	—	0,457	0,473	0,468	0,461

Приведенные результаты свидетельствуют о достаточной стабилизации результатов при достижении максимальной степени аппроксимирующего полинома N=10 (66 координатных функций) и m=1024. Естественно, для получения аналогичной точности при решении задачи в трехмерной постановке необходимо взять 286 координатных функций и 32768 (32^3) узлов интегрирования.

Отметим, что к дальнейшему повышению достоверности результатов расчета НДС зубчатых колес в рамках предлагаемого подхода приводит использование при вычислении элементов матрицы Ритца алгоритма адаптивного дробления области интегрирования. Также заслуживает внимания аппроксимация неопределенной компоненты структуры решения сплайнами.

Список литературы: 1. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. - Киев: Наук. думка, 1982. - 552 с. 2. Вісник Національного Технічного університету “ХПІ”. Тематичний збірник наукових праць ”Технології в машинобудуванні”. Харків: НТУ “ХПІ”.- 2001. №12. С.105-110. 3. *Єльсгольц Л.Є.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: изд. Наука, 1969. – 424 с. 4. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970.- 512 с.