УДК 621.833.7(08.8)

А.И. ПОЛЕТУЧИЙ*, к.т.н,* ***С.И. ПШЕНИЧНЫХ****, Харьков, НАКУ«ХАИ»*

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ С ДВУМЯ ГИБКИМИ КОЛЕСАМИ

Creating finite - element model for wave gear with two flexible gears. Determining of radial motions of flexible gears in various sections and on generative lines length under action of pre-founded forces.

В ХАИ предложена [1] волновая зубчатая передача (ВЗП), в которой нагрузку одновременно передают два гибких колеса. Схема ВЗП с двумя гибкими колесами, связанными с одним тихоходным валом, показана на рис. 1. Она содержит два гибких колеса $Z_{1Г}$, $Z_{2Г}$; два жестких колеса $Z_{1Ж}$, $Z_{2Ж}$; кулачковый генератор волн с двумя гибкими подшипниками H_1, H_2; быстроходный и тихоходный валы.

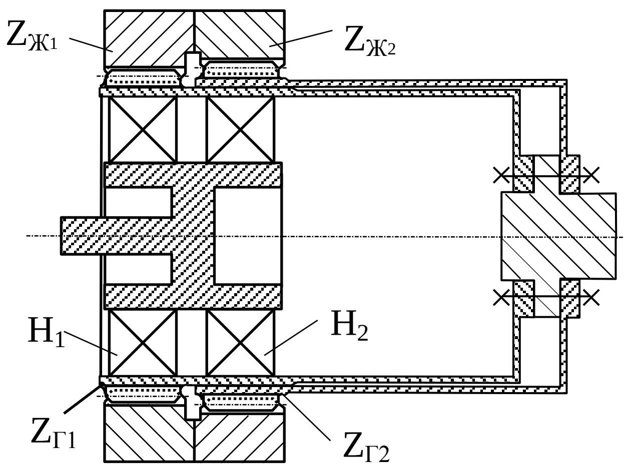

Рис. 1

В работе [2] расчет перемещений гибких колец производился с учетом влияния оболочек, форма которых не определялась. Однако в передаче с двумя гибкими колесами внешнее колесо насажано на оболочку внутреннего колеса (см. рис.1), причем часть этой оболочки совместно деформируется с кольцом внешнего колеса под действием генератора волн. Поэтому исследование их взаимодействия является важным для определения формы гибких колес при совместном деформировании.

На современном этапе развития вычислительной техники и вариационных методов стало возможным применение, с достаточно высокой точностью, метода конечных элементов (МКЭ) для расчета формы гибких колес. Использование МКЄ дает возможность определить перемещения гибких колес передачи в различных сечениях и по длине образующих под действием ранее найденных сил, а также сравнить эти перемещения с результатами эксперимента.

В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ каждая точка упругого тела характеризуется вектором перемещений $u=\{u_1, u_2, u_3\}$ с компонентами u_1, u_2, u_3, направленными по выбранным осям, а также тензором напряжений $T_\sigma = [\sigma_{ik}]$ и деформаций $T_\varepsilon = [\varepsilon_{ik}]$, где i, k=1,2,3.

Гибкие колеса, как и любое упругое тело, описывается общими уравнениями равновесия теории упругости [3]:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0, \quad i=1,2,3, \tag{1}$$

где σ_{ik} – компоненты напряжений, f_i – составляющие вектора объемных сил.

Уравнения (1) дополнены граничными геометрическими и статическими условиями:

$$u = u_0(x_1, x_2, x_3,), \quad (x_1, x_2, x_3,) \in S_{U,}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} \cdot \cos(n, x_k) + F_i = 0, \quad i=1,2,3, \quad (x_1, x_2, x_3,) \in S_F,$$

где S_U и S_F – участок границы, на котором заданы граничные условия в перемещениях и усилиях соответственно; n – внешняя нормаль к S_F; F_i – составляющие вектора поверхностных сил.

Связь между компонентами тензора деформаций и вектора перемещений устанавливается формулами Коши:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad i,k=1,2,3, \tag{2}$$

причем, если i = k, компоненты ε_{ii} характеризуют относительные удлинения в направлении соответствующих осей, а при $i \neq k$ ε_{ik} – относительные сдвиги (изменение углов между осями Ox_i и Ox_k).

Для упругих тел связь между компонентами тензора деформаций и напряжения выражается обобщенным законом Гука:

$$\sigma_{ik} = \sum_{n,m=1}^{3} c_{nm} \varepsilon_{nm}, \quad i,k=1,2,3, \tag{3}$$

где c_{nm} – константы, зависящие от физических свойств материала.

В вариационной постановке для получения уравнений статики в перемещениях гибких колес, представленных в виде системы конечных элементов, используем принцип Лагранжа [4]:

$$\delta Э = \delta П - \delta A = 0. \tag{4}$$

Здесь Э – полная энергия деформации упругого тела; П – потенциальная энергия деформации; А – работа внешних сил, действующих на тело, определяемые формулами:

$$П = \frac{1}{2}\iiint_V \sum_{i,k=1}^{3} \sigma_{ik}\varepsilon_{ik} dV, \quad A = \iiint_V \sum_{i=1}^{3} f_i u_i dV + \iint_{S_F} \sum_{i=1}^{3} F_i u_i dS,$$

где $dV=dx_1dx_2dx_3$; V - объём тела.

В матричной форме для упругого тела выражение (4) можно представить следующим образом:

$$\iiint_V \delta\varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V \delta u^T f dV + \iint_{S_F} \delta u^T F dS, \tag{5}$$

где верхний индекс «Т» обозначает операцию транспонирования.

МКЭ предполагает, что упругое тело с объемом V, в котором ищется решение, разбивается на некоторое конечное число элементов, жесткостные свойства каждого из которых рассматриваются затем независимо от остальных. За основные неизвестные принимаем перемещения в узловых точках, расположение которых зависит от формы выбранного элемента, вида аппроксимирующей функции и точек приложения внешних нагрузок. Поле перемещения $\bar{u}$ в пределах элемента задается в виде степенных полиномов от координат: $\bar{u} = [M]\bar{\alpha}$, где [M] – матрица, зависящая от координат элементов; α – вектор коэффициентов полиномиального разложения функций перемещений. Количество коэффициентов соответствует числу степеней свободы элемента, а сами коэффициенты связаны с узловыми перемещениями. Если использовать вектор узловых перемещений u_e элемента *е*, поле перемещений $\bar{u}$ определяется зависимостью

$$\bar{u} = [A]\bar{u}_e, \tag{6}$$

где [A] – прямоугольная матрица, в которой количество строк равно числу компонент матрицы $\bar{u}$, а количество столбцов соответствует числу степеней свободы элемента *e*.

Для линейно-упругого тела, имеющего начальные деформации, напряжения выразим через деформации на основании закона Гука (3), а деформации – через перемещения на основании формул Коши (2). В результате, используя матричную форму записи, будем иметь

$$\sigma = [C](\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (7) \quad \text{и} \quad \varepsilon = [B]u_e, \quad (8)$$

где [C] – матрица упругих констант; [B] – линейный дифференциальный оператор (матрица).

С учетом (6), (7) условие равновесия (5) получим в виде

$$\iiint_{v_e} \left(\delta\varepsilon^T [C]\bar{\varepsilon} - \delta\varepsilon^T [C]\bar{\varepsilon}_0\right) dV = \delta u_e^T \iiint_{v_e} [A]^T f dV + \delta u_e^T \iint_{S_e} [A]^T F dS,$$

где v_e – объем элемента, s_e – поверхность граничного элемента.

Используя выражение (8), после сокращения получим

$$\left\{\iiint_{v_e} [B]^T [C][B] dV\right\} u_e = \iiint_{v_e} [B]^T [C]\bar{\varepsilon}_0 dV + \iiint_{v_e} [A]^T f dV + \iint_{S_e} [A]^T F dS, \qquad (9)$$

Выражение, заключенное здесь в фигурные скобки, является квадратной симметричной матрицей жесткости конечного элемента:

$$[K]_e = \iiint_{v_e} [B]^T [C][B] dV. \qquad (10)$$

Соотношениями в правой части уравнения (9) определяется вектор обобщенных сил F_e, действующих на элемент *e*.

Для каждого элемента условие равновесия узлов принимает вид

$$[K]_e u_e = F_e.$$

Выполнение условий равновесия в узлах всех элементов приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых точек упругого тела

$$[K]\, u = F, \qquad (11)$$

с симметричной разреженной матрицей [K], называемой глобальной матрицей жесткости. Так как заданы условия закрепления, сдерживающие перемещения тела как целого, эта матрица - положительно определенная.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (11) даст нам перемещение в узловых точках исследуемой задачи. Имея перемещения, можно определить деформации и напряжения в любой точке тела.

Используя пакет программ ANSYS, который обладает возможностями конечно-элементного анализа, произведем определение формы гибких колес передачи в различных сечениях и по длине образующих. Процедура расчета может быть разбита на три основных части: 1) построение модели; 2) приложение нагрузок (включая и граничные условия) и получение решения; 3) просмотр и анализ результатов.

На стадии построения модели задаем необходимые для решения исходные данные. Выбираем координатные системы и типы конечных элементов, указывая физико-механические свойства материала, строим твердотельную модель и сетку конечных элементов, выполняя необходимые действия с узлами и элементами сетки, задавая уравнения связи и ограничения.

Основной целью на этапе разработки геометрической модели является создание адекватной конечноэлементной модели, состоящей из узлов и элементов. Использование метода твердотельного моделирования, для построения упорядоченной сетки предполагает предварительное разбиение модели на отдельные составные части с простой геометрией и описанием геометрических границ. Затем генерируем пространственную сетку с узлами и элементами всей модели, используя конечные элементы с различной формой. Разобьем каждое колесо на кольцо, цилиндрическую оболочку, торцевую диафрагму и фланец. Для построения сетки колец и диафрагм воспользуемся шестигранными 8-узловыми элементами, а для оболочек и фланцев - четырехгранными тетраэдальными 10-узловыми элементами, которые позволят моделировать геометрию на стыке составных частей и местах крепления.

Используем более плотную тетраэдальную сетку элементов (рис. 2) для наилучшего отображения геометрии фланцев. Для цилиндрических оболочек в зонах соприкосновения с кольцами, на которые приложены внешние нагрузки от генератора волн и зацепления, производим измельчение и улучшение формы тетраэдальных элементов.

Приведенные к срединной поверхности гибких колес, силы F, действующие во внешнем и внутреннем зацеплениях, разложены на нормальные FR и касательные FT составляющие к профилю зубьев. Распределены эти нагрузки вдоль зубчатого венца равномерно между узлами сетки элементов для каждой пары контактирующих зубьев гибкого и жесткого колес. Нормальная сила PR, действующая от шариков генератора волн, и касательная сила трения PT приведены к срединной поверхности зубчатых венцов гибких колес внутреннего и внешнего зацеплений. Распределены эти нагрузки равномерно между узлами сетки элементов по ширине гибких подшипников.

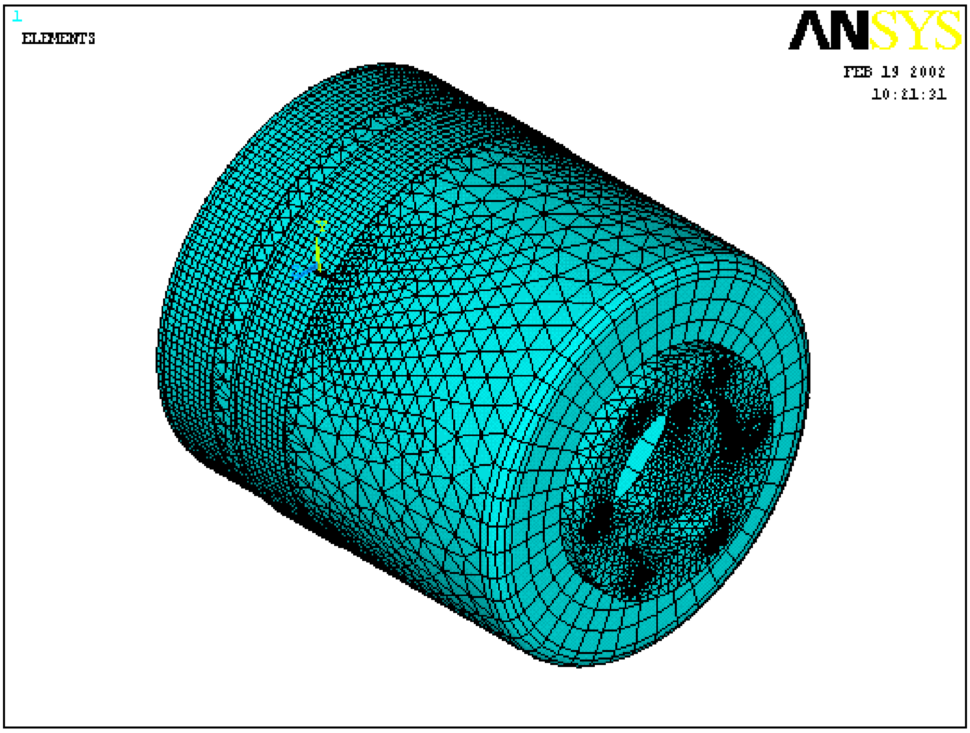

Рис. 2. Конечноэлементная модель гибких колес волновой передачи

Для определения формы гибких колес воспользуемся статическим анализом. Разрешающее уравнение статического анализа записывается в виде

(11)

$$[K]\cdot u = F,$$

где [K] - матрица жесткости; u - вектор перемещений. Компоненты вектора сил F представляют собой сосредоточенные силы.

Для определения перемещений колес под действием сил в зацеплении и на генераторе волн была разработана программа с использованием процедур, входящих в пакет ANSYS 5.7. Структурно весь вычислительный процесс разделён на четыре этапа. На первом этапе определяются геометрические параметры и нагрузки при определенном вращающем моменте. Второй этап - предпроцессорная обработка, на котором осуществляется дискретизация модели и создание конечноэлементной сетки с учетом физико-механических свойств материала. На третьем этапе происходят обработка информации и расчет результатов с учетом действующих нагрузок и граничных условий на основе предложенной в этой статье модели расчета. Четвертый этап - постпроцессорная обработка результатов решения задачи, вывод значений в виде графиков и таблиц.

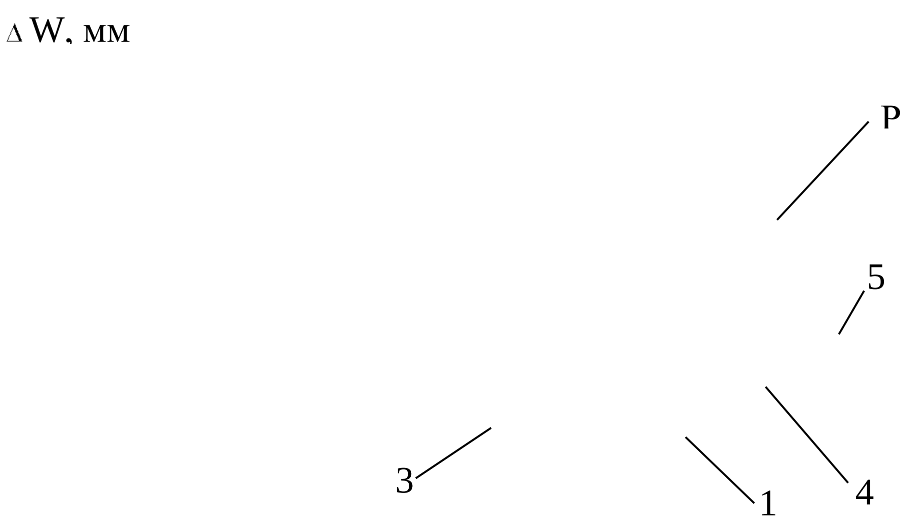

Рис. 3. Отклонения гибких колес от расчетной формы в пяти сечениях

На рис. 3 представлен расчётно-экспериментальный график отклонений радиальных перемещений W гибких колес от расчетной формы относительно ненагруженных колес в пяти контрольных сечениях (рис. 4). Исследования ВЗП проводились для гибких колес с внутренними диаметрами D_1=120 мм, D_2=122 мм, передаточное отношение передачи i=86, модуль m=0.7, W_0/m=1.1 при нагрузке выходного вала передачи T=400 Нм. На рис. 3 сплошными линиями обозначены расчётные значения, а значками - экспериментальные. Нулевая линия посредине рисунка показывает форму гибкого колеса перед нагружением передачи.

Из рис. 3 видно, что в области зацепления ВЗП имеют место зоны вогнутости и выпуклости. Прогиб в зоне зацепления максимален и при переходе в зону натяжения постепенно уменьшается. Он в значительной степени определяется величиной зазоров в размерной цепи генератор волн – гибкое колесо и податливостью всех контактирующих элементов. Сразу же после зоны зацепления образуется зона максимальной выпуклости гибких колёс вследствие отсутствия внешних воздействий на них.

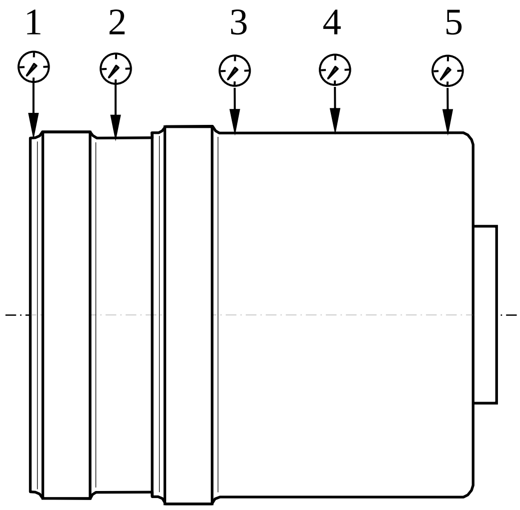

Рис. 4

На рис. 5 изображены линии, соответствующие величинам радиальных перемещений гибких колес в сечениях 1-5 (см. рис. 4) вдоль большой и малой осей генератора волн под нагрузкой и без неё. Указанные значения величин W приведены к линии недеформированных колёс.

Анализируя график, можно отметить, что при нагружении передачи происходит уменьшение величины радиальных перемещений гибкого колеса и, соответственно, глубины захода его зубьев в зацепление, потому что происходит выборка зазоров в передаче, а также увеличение перегиба внутреннего гибкого колеса по длине его образующей в области второго сечения за счет увеличения жесткости конструкции, так как после этого сечения насажено внешнее колесо.

Список использованных источников: 1. Волновая зубчатая передача: А.с. 1409803 СССР, кл F16H 1/00./ *А. И. Полетучий* - Опубл. 1986, Бюл. № 40. – 134 с. 2. *Полетучий А. И., Пшеничных С.И.* Определение

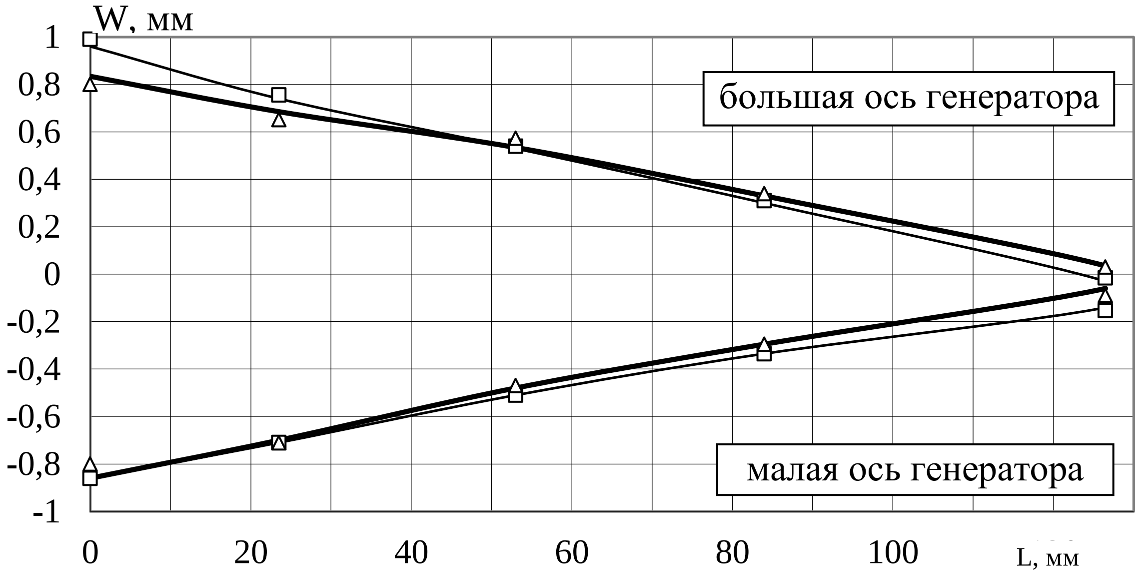

Рис. 5. Радиальные перемещения W вдоль гибких колес:

- 0 Нм расчет; □ - 0 Нм эксперимент;

- 400 Нм расчет; △ - 400 Нм эксперимент.

перемещений гибких колес волновой передачи// Труды ХАИ. “Авиационно-космическая техника и технология”. – Вып. 8. –Харьков. 1998.-С. 149-153. 3.

Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа ,1979. - 432 с. 4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. -541с.