

А.П. КАРПОВ, асп., Луганск, ВЛУ

## УСИЛИЯ В ЗАЦЕПЛЕНИИ НЕКРУГЛЫХ ЗУБЧАТЫХ КРУГОВИНТОВЫХ ПЕРЕДАЧ С КОСОСИММЕТРИЧНЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

On basis of the equation of circle-screw surfaces and differential equation of driving of machines in an association from function of transmission relation the accounting dependencies for the determination of normal, radial, environing and axial gains in a grapping by skew-symmetric unround cog-wheels are received .

В последнее время зубчатые передачи с круговинтовым зацеплением (зацепление Новикова) находят широкое распространение. Они обладают более высокой нагрузочной способностью, у них лучшие условия смазки рабочих поверхностей зубьев, меньше потери на трение.

Кососимметричная передача [1] некруглыми зубчатыми колесами может применяться в силовых механизмах для увеличения рабочих и уменьшения холостых циклов исполнительных органов машин и механизмов. Кроме этого, кососимметричный закон изменения функции передаточного отношения этой передачи препятствует сложению колебаний собственных и вынужденных в механизмах.

Рассмотрим усилия в зацеплении некруглых круговинтовых передач применительно к цилиндрическим некруглым зубчатым передачам с кососимметричной функцией передаточного отношения. Пусть известно межосевое расстояние  $a_w$  и радиусы центроид некруглых колес для ведущего и ведомого соответственно [1]:

$$r_{1p} = r + \frac{B \sin \varphi_1}{2 + \cos \varphi_1}, \quad (1)$$

$$r_{2p} = U_n r - \frac{B \sin \varphi_1}{2 + \cos \varphi_1}, \quad (2)$$

где  $r$  – средний радиус центроиды ведущего некруглого колеса,  $B$  – постоянная величина, коэффициент, зависящий от коэффициента неравномерности движения механизма  $\delta$  [2],  $U_n$  – передаточное число передачи некруглыми колесами,  $\varphi_1$  – угол поворота радиуса центроиды ведущего некруглого колеса,  $j_1$  – количество максимальных значений радиуса центроиды ведущего колеса. Передаточное отношение имеет вид:

$$i \varphi_1 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} + B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{U_n r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} - B \sin \vartheta_1 \varphi_1}, \quad (3)$$

Уравнения круговинтовых поверхностей на кососимметричных некруглых колесах запишем в виде: для ведущего колеса

$$\begin{aligned} X_{11} &= \frac{r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} + B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \cos \varphi_{11} + \varphi_1 + \lambda_1, \\ Y_{11} &= -\frac{r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} + B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \sin \varphi_{11} + \varphi_1 - R_1 \sin \varphi_{11} + \varphi_1 + \lambda_1, \end{aligned} \quad (4)$$

для ведомого колеса

$$\begin{aligned} X_{22} &= \frac{U_n r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} - B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \cos \varphi_{22} + \varphi_2 + R_2 \cos \varphi_{22} + \varphi_2 + \lambda_2, \\ Y_{22} &= -\frac{U_n r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} - B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \sin \varphi_{22} + \varphi_2 + R_2 \sin \varphi_{22} + \varphi_2 + \lambda_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{p}{U_n + 1} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sqrt{A_1} d\varphi_1}{\sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1}};$$

здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – угол между текущим положением радиуса окружности с направлением луча, проходящего их начала координат через центр окружности (сферы), для ведущего и ведомого колеса соответственно;  $\varphi_{11}$  и  $\varphi_{22}$  – параметр начальных условий, угол поворота колес ведущего и ведомого соответственно;  $p$  – винтовой параметр  $p = \text{tg } \beta$ ;  $\beta$  – угол наклона винтовых линий к оси  $OZ$ ;

$$A_1 = 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \sqrt{U_n + 1} \left[ r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right]^2 + 4B^2 j_1^2 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right]$$

Направляющие косинусы нормали к поверхности зубьев: ведущего колеса

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1^v &= \frac{p \sqrt{A_1}}{\sqrt{K_{1N}}} \cos \varphi_{11} + \varphi_1 + \lambda_1, \\ \cos \beta_1^v &= \frac{-p \sqrt{A_1}}{\sqrt{K_{1N}}} \sin \varphi_{11} + \varphi_1 + \lambda_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1^v &= \frac{-a_w}{\sqrt{K_{1N}}} \left[ \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \sqrt{U_n + 1} \left[ r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] \sin \lambda_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2Bj_1 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right] \cos \lambda_1 \right]; \end{aligned}$$

ведомого колеса

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2^v &= \frac{p \sqrt{A_1}}{\sqrt{K_{2N}}} \cos \varphi_{22} + \varphi_2 + \lambda_2, \\ \cos \beta_2^v &= \frac{-p \sqrt{A_1}}{\sqrt{K_{2N}}} \sin \varphi_{22} + \varphi_2 + \lambda_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\cos \gamma_2^v = \frac{-a_w}{\sqrt{K_{2N}}} \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \left( \frac{U}{r} + 1 \right) \right] \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sin \lambda_2 - \right. \\ \left. - 2Bj_1 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right] \cos \lambda_2 \right];$$

здесь  $K_{1N} = \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \left( \frac{U}{r} + 1 \right) \right]^2 \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right]^2 \times$   
 $\times \left[ \rho^2 + \sin^2 \lambda_1 + 4Bj_1 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right] \sin 2\lambda_1 + 4B^2 j_1^2 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right]^2 \left[ \rho^2 + \cos^2 \lambda_1 \right] \right]$   
 $K_{2N} = \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \left( \frac{U}{r} + 1 \right) \right]^2 \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right]^2 \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \left( \frac{U}{r} + 1 \right) \right] \times$   
 $\times \left[ r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] \rho^2 + \sin^2 \lambda_2 + 4Bj_1 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right] \sin \lambda_2 + \right.$   
 $\left. + 4B^2 j_1^2 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right]^2 \left[ \rho^2 + \cos^2 \lambda_2 \right] \right]$ .

Дифференциальное уравнение движения машины с некруглыми зубчатыми колесами [3] имеет вид:

$$\sum P_{об} - \sum P_{н.с} = I_{np.1} \omega_1 \varepsilon_1 + \frac{dI_{np.1}}{d\varphi_1} \frac{\omega_1^3}{2} + I_{np.2} \omega_2 \varepsilon_2 + \frac{dI_{np.2}}{d\varphi_2} \frac{\omega_2^3}{2} = T_{об} \omega_1 - T_{н.с} \omega_2, \quad (8)$$

где  $T_{об}$  – момент (движущий) на валу ведущего некруглого колеса от движущих сил;  $T_{н.с}$  – момент на валу ведомого некруглого колеса от сил полезных сопротивлений;  $P_{об}$ ,  $P_{н.с}$  – соответствующие мгновенные мощности;  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  – угловые скорости и угловые ускорения вращения ведущего и ведомого колес соответственно

$$\omega_2 = \omega_1 i_{\varphi_1} = \frac{\omega_1 \left[ r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] \right]}{U \left[ r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] \right]}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \omega_1 i_{\varphi_1} \right] = \frac{d\omega_1}{dt} i_{\varphi_1} + \omega_1 \frac{d i_{\varphi_1}}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \varepsilon_1 i_{\varphi_1} + \omega_1^2 i'_{\varphi_1}, \quad (11)$$

$i'(\varphi_1)$  – первая производная функции (3)  $i(\varphi_1)$  по параметру  $\varphi_1$ :

$$i'_{\varphi_1} = \frac{Bj_1 r \left[ 1 + U \right] + 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1}{Ur \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right]^2}; \quad (12)$$

таким образом,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] + \frac{\omega_1^2 Bj_1 r \left[ 1 + U \right] + 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1}{Ur \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right]^2}}{U \left[ r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] \right]}; \quad (13)$$

$I_{np.1}$  и  $I_{np.2}$  – моменты инерции приведенных масс относительно осей вращения ведущего и ведомого некруглых колес соответственно. Для передач кососимметричными колесами

$$I_{np.1} = m_1 r_1^2 = \frac{m_1 \left[ r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] \right]^2}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1}, \quad (14)$$

$$I_{np.2} = m_2 r_2^2 = \frac{m_2 \left[ U \left[ r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \right] \right] \right]^2}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1},$$

$m_1$  и  $m_2$  – приведенные массы на ведущем и ведомом валах некруглых колес,  $dI_{np.1}/d\varphi_1$  и  $dI_{np.2}/d\varphi_2$  – дифференциалы от моментов инерции, приведенных к осям вращения ведущего и ведомого колес соответственно:

$$\frac{dI_{np.1}}{d\varphi_1} = 2m_1 j_1 \sin \varphi_1 \frac{-r \sqrt{2 + \cos \varphi_1} + B \sin \varphi_1}{2 + \cos \varphi_1} \times \left\{ -r + \frac{B \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} + \frac{r \sqrt{2 + \cos \varphi_1} + B \sin \varphi_1}{2 + \cos \varphi_1} \right\}, \quad (15)$$

$$\frac{dI_{np.2}}{d\varphi_1} = 2m_2 j_1 \sin \varphi_1 \frac{-ur \sqrt{2 + \cos \varphi_1} - B \sin \varphi_1}{2 + \cos \varphi_1} \times \left\{ -ur - \frac{B \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} + \frac{ur \sqrt{2 + \cos \varphi_1} - B \sin \varphi_1}{2 + \cos \varphi_1} \right\}. \quad (16)$$

В уравнении (8) применительно к некруглым колесам принято, что вращение колес совершается вокруг осей, на которых располагаются центры тяжести колес. Пренебрегая силами тяжести некруглых колес и других звеньев машины, принимаем  $\Sigma P_G = 0$  (мгновенная мощность сил тяжести). Не учитывая пока работу сил трения, принимаем  $\Sigma P_{mp} = 0$  (мгновенная мощность сил трения).

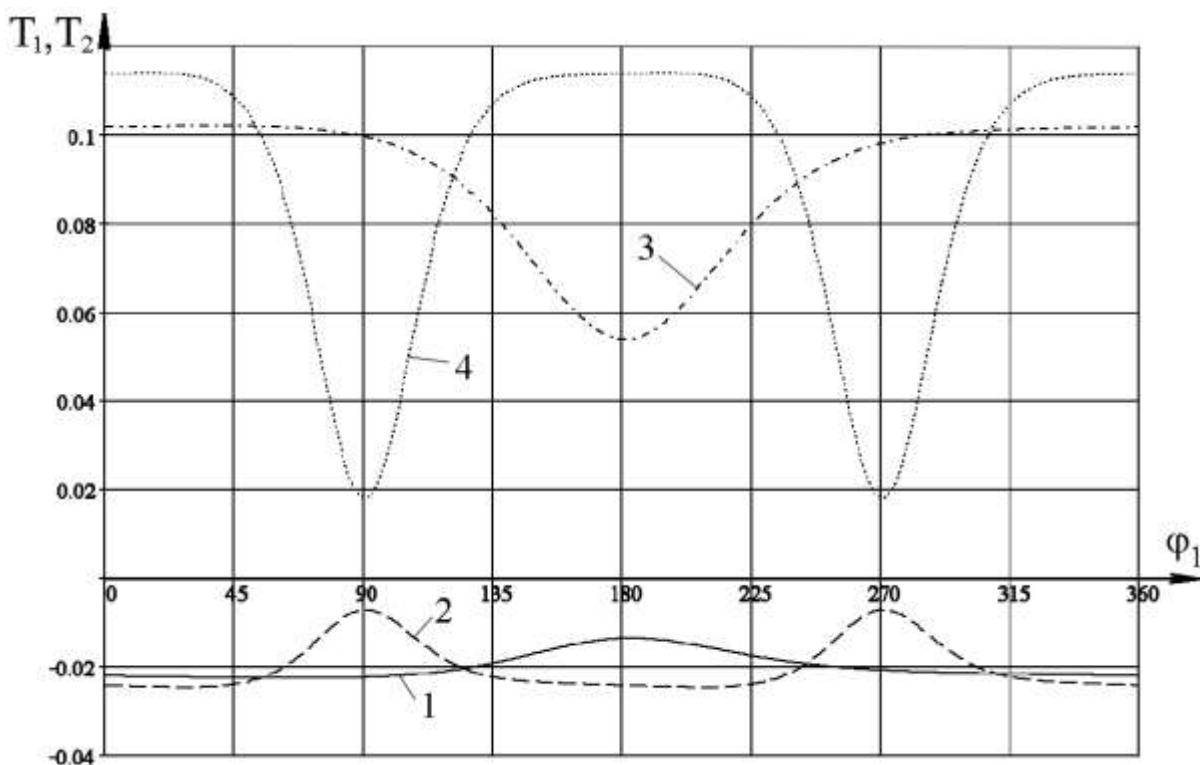


Рис. 1. График изменения моментов крутящих

при  $\varphi_1 = 0 \dots 360^\circ$ ,  $j_1 = 1$  и  $j_1 = 2$ :

1 –  $T_1$  при  $j_1 = 1$ ; 2 –  $T_1$  при  $j_1 = 2$ ; 3 –  $T_2$  при  $j_1 = 1$ ; 4 –  $T_2$  при  $j_1 = 2$

В уравнении (8) слагаемые для передач кососимметричными колесами с учетом (3) запишем

$$T_1 = -I_{np.1} \varepsilon_1 - \frac{dI_{np.1}}{d\varphi_1} \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{m_1 r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \varepsilon_1 r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 - \omega_1^2 j_1 \sin \vartheta_1 \varphi_1 \left[ -r + \frac{B \cos \vartheta_1 \varphi_1}{\sin \vartheta_1 \varphi_1} + \frac{r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \right], \quad (17)$$

$$T_2 = I_{np.2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np.2}}{d\varphi_1} \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{m_2 U_n r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \varepsilon_1 r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 + \frac{\omega_1^2 B j_1 r^2 + U_n^2 + 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1}{U_n r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1} + \frac{r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{U_n r^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1} \times \times \frac{\omega_1^2 m_2 j_1 \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \left[ -r U_n - \frac{B \cos \vartheta_1 \varphi_1}{\sin \vartheta_1 \varphi_1} + \frac{r U_n^2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 - B \sin \vartheta_1 \varphi_1}{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \right]. \quad (18)$$

Уравнения (17) и (18) выражают добавочный момент, определяемый неравномерным вращением ведущего и ведомого колес соответственно и переменностью приведенного момента инерции. На рис. 1 построены графики зависимости этих моментов от угла поворота ведущего колеса  $\varphi_1$  при значениях  $j_1 = 1$  и 2.

Из (14) видно, что приведенные моменты инерции в передачах кососимметричными колесами – величины переменные, переменность которых зависит от радиусов центровид.

Уравнение (8) выражает результирующий крутящий момент относительно осей вращения колес, то есть осей  $O_1Z_{11}$  и  $O_2Z_{22}$  в принятых системах осей координат. Тогда из уравнения (8) с использованием значений (17) и (18) соответственно для ведущего и ведомого колес можно записать

$$T_{Z_{11}} = T_{о\epsilon} + T_1, \quad (19)$$

$$T_{Z_{22}} = T_{n.c} + T_2, \quad (20)$$

Из уравнения (8) видно, что выражения (19) и (20) равны, поэтому в дальнейших расчетах можно пользоваться одним из них.

Используя (4), (6) и (19) в системе  $O_1X_{11}Y_{11}Z_{11}$ , а также (5), (7) и (20) в системе  $O_2X_{22}Y_{22}Z_{22}$  по [4] после преобразований получим нормальное усилие в зацеплении соответственно ведущего и ведомого кососимметричных колес

$$F_{N1} = \frac{T_{Z_{11}}}{X_{11} \cos \beta_1^v - Y_{11} \cos \alpha_1^v} = \frac{T_{Z_{11}} \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \sqrt{K_{1N}}}{p r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sqrt{A_1} \sin \lambda_1}, \quad (21)$$

$$F_{N2} = \frac{T_{Z_{22}}}{X_{22} \cos \beta_2^v - Y_{22} \cos \alpha_2^v} = \frac{T_{Z_{22}} \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} \sqrt{K_{2N}}}{p r \sqrt{2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1} + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sqrt{A_1} \sin \lambda_2}. \quad (22)$$

Уравнения (21) и (22) дают возможность точно определить и исследовать нормальные усилия на пятно контакта в круговинтовых передачах кососимметричными зубчатыми колесами в зависимости от параметров центровид передачи, функции передаточного отношения и углов поворота ведущего колеса.

Тогда окружное  $F_X$ , радиальное  $F_Y$  и осевое  $F_Z$  усилия в зацеплении будут равны соответственно в системах координат ведущего и ведомого колес: в системе  $O_1X_{11}Y_{11}Z_{11}$

$$F_{X11} = F_{N1} \cos \alpha_1^v = \frac{T_{Z11} \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \cos \varphi_{11} + \varphi_1 + \lambda_1 \right]}{r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sin \lambda_1 \right]},$$

$$F_{Y11} = F_{N1} \cos \beta_1^v = \frac{-T_{Z11} \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \sin \varphi_{11} + \varphi_1 + \lambda_1 \right]}{r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sin \lambda_1 \right]}, \quad (23)$$

$$F_{Z11} = F_{N1} \cos \gamma_1^v = \frac{-T_{Z11} r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \frac{U_h + 1}{\sqrt{A_1}} \sin \lambda_1 \right]}{p r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sin \lambda_1 \right]} \times$$

$$\times \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \frac{U_h + 1}{\sqrt{A_1}} \sin \lambda_1 + 2Bj_1 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right] \cos \lambda_1 \right]$$

в системе  $O_2X_{22}Y_{22}Z_{22}$

$$F_{X22} = F_{N2} \cos \alpha_2^v = \frac{T_{Z22} \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \cos \varphi_{22} + \varphi_2 + \lambda_2 \right]}{r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sin \lambda_2 \right]},$$

$$F_{Y22} = F_{N2} \cos \beta_2^v = \frac{-T_{Z22} \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \sin \varphi_{22} + \varphi_2 + \lambda_2 \right]}{r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sin \lambda_2 \right]}, \quad (24)$$

$$F_{Z22} = F_{N2} \cos \gamma_2^v = \frac{-T_{Z22} r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \frac{U_h + 1}{\sqrt{A_1}} \sin \lambda_2 \right]}{p r \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 + B \sin \vartheta_1 \varphi_1 \sin \lambda_2 \right]} \times$$

$$\times \left[ 2 + \cos \vartheta_1 \varphi_1 \frac{U_h + 1}{\sqrt{A_1}} \sin \lambda_2 - 2Bj_1 \left[ 2 \cos \vartheta_1 \varphi_1 + 1 \right] \cos \lambda_2 \right]$$

Как видно из(19), (20), (23) и (24), усилия на пятно контакта при  $T_{обс}=const$  и  $T_{н.с}=const$  имеют переменные значения.

Приведенные уравнения для расчета моментов и усилий, действующих в зацеплении некруглыми колесами, распространяются, естественно, и на случай круглых колес. Применительно к такому случаю в (3) следует положить  $i(\varphi_1) = const$ , т.е. во всех уравнениях положить коэффициент  $B = 0$ .

**Список литературы:** 1. А. с. 815352 СССР Мкл. F16H 1/02. Зубчатая передача. // *Н.Л.Утутов*. – Оpubл. в Б.И., 1981. №11. 2. *Артоболевский И.М.* Теория механизмов и машин. – М.: Наука. 1975. – 639с. 3. *Литвин Ф.Л.* Некруглые зубчатые колеса. Проектирование, теория зацепления и производство. М-Л., Машгиз, 1956. 312с. 4. *Севрюк В.Н.* Конические передачи с зацеплением Новикова. – Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1969.