

А.Ф. КИРИЧЕНКО, д.т.н., А.В. ФЕДЧЕНКО, к.т.н., Харьков, НТУ «ХПИ»

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПЕРЕДАЧУ НОВИКОВА ДЛЗ

В настоящее время инженерные методы решения ориентированы на исследования технической устойчивости движения, учитывающей свойства движения реальных систем на конечном промежутке времени при конечных начальных, последующих и постоянно действующих возмущениях.

Для задачи об устойчивости движения в постановке Ляпунова А.М. характерно следующее:

- а) рассматривается устойчивость невозмущенного движения только по отношению к возмущениям начальных условий;
- б) предполагается, что начальные возмущения, а следовательно, и последующие возмущения - достаточно малые величины;
- в) рассматривается неограниченный интервал времени.

Рабочим состоянием многих машин и агрегатов является колебательное движение их звеньев, не является исключением и зубчатая передача. Будем считать ее голономной механической системой, которая в общем случае описывается системой дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \dots, x_n) \quad s=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

и в которой функции  $X_s$  удовлетворяют условиям Липшица по переменным  $x_s$  в каждой замкнутой области  $\bar{G}_s \subset G$  и  $t \in J_t^+$ , где  $J_t^+ = \{0 \leq t < \infty\}$ :

$$G = \{x: x \in E_n; \|x\| < H, H = \text{const или } H = \infty, \\ \|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \text{ или } \|x\|_2 = \max_s |x_s| \quad (2)$$

При этом из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [1], что по каждому набору вещественных чисел  $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0\}$  из области  $\bar{G}_s \times J_t^+$  определяется  $n$  непрерывно дифференцируемых функций

$$x_s(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0) = x_s \quad s=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

удовлетворяющих системе (1) и принимающих значения

$$x_s = x_s^0 \quad \text{при } t = t_0.$$

Следует заметить, что функции  $X_s$  ( $s=1,2,\dots,n$ ) должны, естественно, зависеть от некоторых конструктивных параметров передачи  $\gamma_1 \dots \gamma_m \in \Omega$ .

Наряду с системой (1) имеет место другая система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \dots, x_n) + R_s(x_1, \dots, x_n) \quad s=1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

в которой функции  $R_s(x_1, \dots, x_n)$  учитывают непрерывно действующие возмущения на систему (1). В этом случае можно предположить, что в области  $\bar{G}_s \times J_t^+$  существует решение системы (4) и оно единственно для заданных начальных условий. Однако в [1] показано, что функции  $R_s(x_1, \dots, x_n)$  на практике не определимы, что существенно усложняет задачу, но, как правило, известны верхние границы, которые эти функции не превосходят.

Для упрощения дальнейшего исследования перепишем системы (1) и (4) в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (5)$$

$$\text{и } \frac{dx}{dt} = X(x) + R(x), \quad (6)$$

где  $x$ ,  $X$  и  $R$  -  $n$ -мерные векторы в пространстве  $E_n$ .

Решением систем (5) и (6) следует считать вектор-функцию  $x(t)$  с компонентами  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ . Введя далее обозначение  $J = t: t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , где  $T > 0$ , будем считать, что системы (5) и (6) определены в области

$$D = \bar{G}_s \times J \subset G \times J_t^+ \quad (7)$$

Установив понятие предельного перехода в нормированном фазовом пространстве, можно далее предположить, что последовательность векторов  $x_m^0$  сходится при  $m \rightarrow \infty$  к вектору  $x^0$ . Обозначим через  $x=f(t)$  решение системы (5), определенное в области  $D$  начальным вектором  $x_m^0$ , т.е.  $f_m(t_0) = x_m^0$ . Тогда, если  $x=f(t)$  - решение системы (5), определенное на том же отрезке и соответствующее начальному вектору  $x^0$ , то будем иметь  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t) = f(t)$ , при  $m \rightarrow \infty$ , причем стремление к пределу на  $J$  равномерно по  $t$ . Содержание этого утверждения состоит в следующем. Если выполнены приведенные выше условия, то для любого положительного  $\varepsilon$  можно указать положительное  $\delta$  такое, что неравенство  $\|f_m - f\| < \varepsilon$  имеет место при  $t \in J$ , лишь только при  $\|x_m^0 - x^0\| < \delta$ . Это утверждение, носящее название теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных [1], использовано нами ниже.

Приведем согласно [1] определение технической устойчивости движения системы (5). При заданных оценках величин  $(\lambda, A)$  систему (5) на заданном интервале  $J$  назовем технически устойчивой, если для ее решения выполняется неравенство

$$\|x\| < A \quad \forall t \in J,$$

лишь только  $\|x \mathbb{A}_0\| < \lambda$ . Такая устойчивость носит название « $(\lambda, A, J)$  - устойчивости».

Определим техническую неустойчивость. При заданных оценках величин  $(\lambda, A)$ ,  $(A \geq \lambda)$  систему (5) на заданном интервале  $J$  назовем технически неустойчивой, если существует решение  $x(t)$ , начинающееся в области

$$\|x \mathbb{A}_0\| < \lambda,$$

и момент времени  $t_1 \in J$ , в которой

$$\|x \mathbb{A}_1, x^0, t_0\| = A.$$

И последнее определение. При заданных оценках величин  $(\lambda, A, R^0, J)$ ,  $(\lambda \leq A)$  систему (6) назовем технически устойчивой при постоянно действующих возмущениях, если для ее решения выполняется неравенство

$$\|x \mathbb{A}\| < A \quad \forall t \in J,$$

лишь только  $\|x \mathbb{A}_0\| < \lambda$  и  $\|R \mathbb{A}, x\| < R^0$ .

Автор [1] останавливается на содержании приведенных определений.

Задачи динамики машин и другие прикладные задачи требуют, как правило, учета следующих условий:

а) рассматриваемая система находится под постоянным воздействием небольших по величине, но конечных возмущающих сил;

б) начальные возмущения, а следовательно, и последующие являются конечными величинами;

в) движение механической системы происходит в течение некоторого конечного промежутка времени.

Основным методом исследования технической устойчивости движения является метод функций Ляпунова, опирающийся на исследование поведения вспомогательной функции на траектории рассматриваемой системы.

Таким образом, опираясь на вышеизложенное, оценить устойчивость системы [2]

$$I_1 \ddot{\phi}_1 + c_1 \dot{\phi}_1 - \phi_{1u} = M_1;$$

$$I_{uu} \ddot{\phi}_{uu} - c_1 \dot{\phi}_1 - \phi_{uu} + F_1 \mathbb{R}_{uu} + F_2 \mathbb{R}_{uu} = -M_1 - h'_3 \dot{\phi}_{uu};$$

$$m_{uu} \ddot{x}_{uu} + c'_{uu} \dot{x}_{uu} - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu} + c''_{uu} \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu} + x_{uu} + F_1 \mathbb{A} + F_2 \mathbb{A} =$$

$$P_{1uu} - P_{2uu} - h_{1uu} \mathbb{A}_{uu} - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu} - h_{2uu} \mathbb{A}_{uu} + \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu};$$

$$I'_{uu} \ddot{\psi}_{uu} - c'_{uu} \mathbb{A} + b_w/2 \bar{x}_{uu} - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu} + c''_{uu} \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu} + x_{uu} +$$

$$\mathbb{A} \pm \mathbb{A} - 1 p_x F_1 \mathbb{A} + \mathbb{A} \pm \mathbb{A} - 1 p_x + q_{21} F_2 \mathbb{A} = -P_{1uu} \mathbb{A} + b_w/2 - P_{2uu} \mathbb{A} + b_w/2 +$$

$$h_{1uu} \mathbb{A} + b_w/2 \bar{x}_{uu} - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu} - h_{2uu} \mathbb{A} + b_w/2 \bar{x}_{uu} + \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_{uu};$$

$$I_k \ddot{\phi}_k + c_2 \dot{\phi}_k - \phi_k + F_1 \mathbb{R}_k + F_2 \mathbb{R}_k = M_4 - h'_3 \dot{\phi}_k;$$

$$m_k \ddot{x}_k + c'_k \dot{x}_k - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k + c''_k \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k + x_k - F_1 \mathbb{A} - F_2 \mathbb{A} =$$

$$P_{1k} - P_{2k} - h_{1k} \mathbb{A}_k - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k - h_{2k} \mathbb{A}_k + \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k;$$

$$I'_k \ddot{\psi}_k - c'_k \mathbb{A} + b_w/2 \bar{x}_k - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k + c''_k \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k + b_w/2 \bar{\psi}_k + x_k -$$

$$\mathbb{A} \pm \mathbb{A} - 1 p_x F_1 \mathbb{A} - \mathbb{A} \pm \mathbb{A} - 1 p_x + q_{21} F_2 \mathbb{A} = -P_{1k} \mathbb{A} + b_w/2 - P_{2k} \mathbb{A} + b_w/2 +$$

$$h_{1k} \mathbb{A} + b_w/2 \bar{x}_k - \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k - h_{2k} \mathbb{A} + b_w/2 \bar{x}_k + \mathbb{A} + b_w/2 \bar{\psi}_k;$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 - c_2 \varphi_k - \varphi_4 = -M_4,$$

где

$$F_1 = A_{1j} c_3 \pm 1 p_x \varphi_{ш} R_{ш} - \varphi_k R_k + \Delta \beta \pm 1 p_x \pm x_{ш} - x_k + \pm 1 p_x \varphi_{ш} - \varphi_k$$

$$F_2 = A_{2j} c_3 \pm 1 p_x + q_{21} \times$$

$$\varphi_{ш} R_{ш} - \varphi_k R_k + \Delta \beta \pm 1 p_x + q_{21} \pm x_{ш} - x_k + \pm 1 p_x + q_{21} \varphi_{ш} - \varphi_k$$

можно следующим образом. Имея некоторый набор начальных условий, в нашем случае  $\varphi_1^0, \varphi_{ш}^0, \varphi_k^0, x_{ш}^0, x_k^0, \psi_{ш}^0, \psi_k^0, \varphi_4^0$  согласно (3) должны существовать в нашем случае 8 функций, удовлетворяющих (1). Эти функции  $\varphi_1, \varphi_{ш}, \varphi_k, x_{ш}, x_k, \psi_{ш}, \psi_k, \varphi_4$  у нас заданы таблично, т.к. получены численным интегрированием. На рис.1 в качестве примера представлены только некоторые из функций, а именно -  $\varphi_1, \varphi_{ш}, \varphi_k, x_{ш}, x_k, \varphi_4$ . Для получения этих решений в качестве начальных условий были определены

$$\varphi_1^0 = 0,00188, \varphi_{ш}^0 = -0,000187, \varphi_k^0 = 0,000122,$$

$$x_{ш}^0 = -6,29 \cdot 10^{-6}, x_k^0 = 1,18 \cdot 10^{-5}, \varphi_4^0 = 0,0012$$

На рис.2 приведены те же функции, что и на рис.1, но при изменении одного из начальных условий, а именно  $\varphi_1 = 0,00188 + 1\%$ .

Если проанализировать графики, взяв одну произвольную точку, например,  $t = 0,04$  и оценить значения, то из приведенных функций нетрудно заметить, что изменения составляют для  $\varphi_{ш}(0,04) = -0,00205$ , что на 10,8% отличается от исходного значения в соответствующей точке.

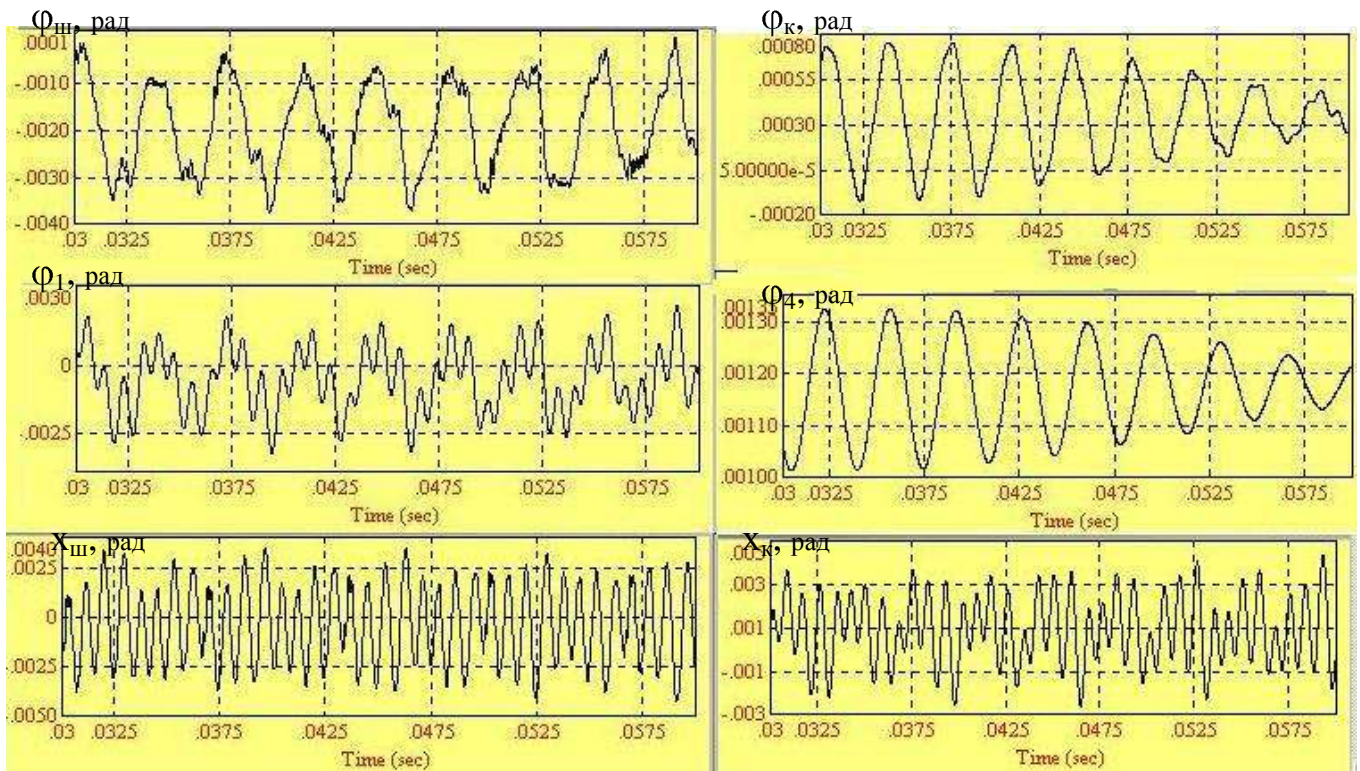


Рис.1

$\varphi_{ш}, \text{ рад}$

$\varphi_k, \text{ рад}$

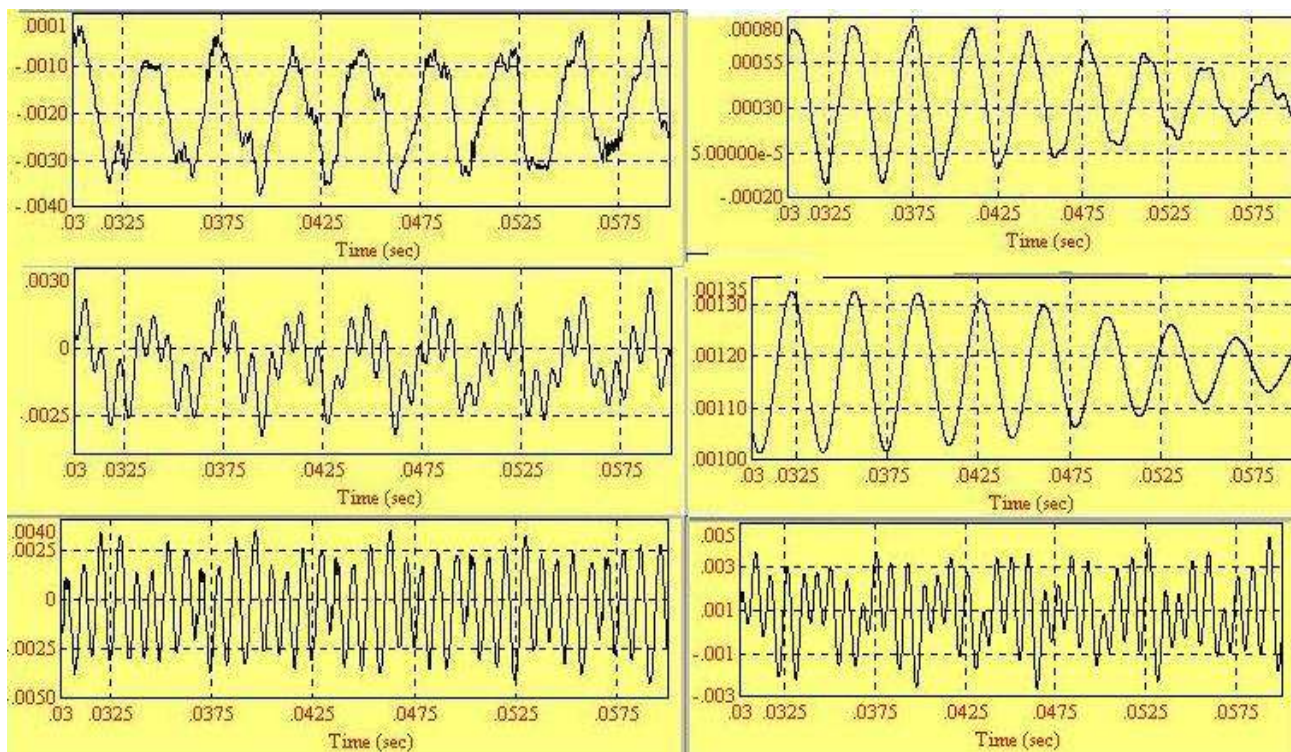


Рис.2

Для  $\varphi_1$  расхождения составили 12%, для  $\varphi_k$  - 8,2%, для  $x_{ш}$ ,  $x_k$ ,  $\varphi_4$  изменения составили 0%. Изменяя начальные условия, согласно теореме о непрерывности зависимости решения от начальных условий, на +1% по каждой из координат отдельно, получаем искомые функции, которые отличаются от первоначальных на 0-14%, что является достаточным признаком технической устойчивости решения. Расчеты по всем координатам сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Изменяемый параметр+1%	Изменения по обобщенным координатам, %							
	$\varphi_{ш}$	$\varphi_1$	$\varphi_k$	$\varphi_4$	$x_{ш}$	$x_k$	$\psi_{ш}$	$\psi_k$
$\varphi_{ш}+1\%$	5	11,8	0,8	0,4	0,1	0,1	0	3
$\varphi_1+1\%$	10,8	12	8,2	0	0	0	0	0
$\varphi_k+1\%$	5	13	0,8	0,2	11	3,5	0	3
$\varphi_4+1\%$	5	4	0	0,6	14	3,5	0	0
$x_{ш}+1\%$	5	4,2	0,8	0,4	0,1	7	0	3
$x_k+1\%$	14	1	0,8	0,1	2	3,5	0	0
$\psi_{ш}+1\%$	5	9	1,3	0	11	7	1,5	3

$\psi_k+1\%$	5	12,6	0	0,4	0,1	11	1,5	3
--------------	---	------	---	-----	-----	----	-----	---

**Список литературы:** 1. *Мартынюк А.А.* Техническая устойчивость в динамике. - Киев: издательство «Техніка», 1973.- 188с., 2. *Кириченко А.Ф., Федченко А.В.* Математическая модель внутренней динамики цилиндрических передач Новикова ДЛЗ // Проблемы качества и долговечности зубчатых передач и редукторов // Труды международной научно-технической конференции. - Харьков, 1997.- С.102-108.