УДК 514, 519.6

В.Ф. СОРОКИН, д-р техн. наук, доцент НАУ «ХАИ», Харьков;
А. К. ШАПОШНИКОВ, аспирант ИПМаш НАН Украины, Харьков;

УСЛОВИЯ СШИВКИ СПЛАЙНОВОЙ КРИВОЙ ПО КРИВИЗНЕ И КРУЧЕНИЮ ПРИ АВТОМАТИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ПРОИЗВОДСТВА

Определены условия сшивки сплайновой кривой по кривизне и кручению. Доказано существование и единственность сплайновой кривой с условиями сшивки в узлах по кривизне и кручению. Показано, что данные условия сшивки в узлах сплайновой кривой эквивалентны классическим условиям сшивки по производным.

Ключевые слова: Сплайн, кривизна, кручение, существование и единственность.

Постановка проблемы. В настоящее время в промышленности возросла потребность в повышении эффективности и качества производства сложнофасонных деталей. Проектирование этих деталей осуществляется с помощью систем автоматизированного проектирования, содержащих модуль геометрического моделирования поверхностей сплайн-функциями, а их изготовление так или иначе связано с применением систем ЧПУ, лучшие из которых позволяют задавать траектории движения инструмента с помощью сплайнов. Однако пока каноническая форма представления кривых сплайн-функциями отсутствует. Это свидетельствует об актуальности продолжения исследований в этом направлении.

Анализ литературы. Первые сплайн-функции, предложенные в работе [1] были «склеены» из кусков кубических многочленов. Полиномиальный сплайн $Sp(x)$ был представлен в виде обобщенного многочлена, базисными функциями которого являются финитные сплайны $BSp_k^{(n)}$ порядка n. Эти функции получили название В-сплайнов. С их помощью сплайн-функция представима в виде обобщенного многочлена

$$Sp(x) = \sum_{\mathrm{k}_0 \le k \le k_r} C_k BSp_k^{(n)}(x).$$

Классические условия сшивки по производным в узлах сплайновой кривой хороши для алгебраических сплайнов, которые трактуются как некоторые кусочно-многочленные (включая обобщенные многочлены) функции с однородной структурой [2, 3, 12].

Однако для сплайновых кривых, «склеенных» из дуг окружностей, эвольвент и т.п., классические условия сшивки по производным не в полной мере определяют геометрические характеристики кривой, к которым относятся кривизна и кручение [4 - 7, 10, 11]. В данных работах речь идет о сопряжении дуг окружностей, при котором касательные в узловых точках равны. При таком построении происходит разрыв по кривизне в узловых точках, что приводит к дестабилизации кинематических параметров движения рабочих органов оборудования с ЧПУ.

В работах [8, 9] были рассмотрены эвольвентные сплайновые кривые, «склеенные» из дуг эвольвент к окружности по кривизне.

Следовательно, возникает необходимость в определении условий сшивки дуг кривых по кривизне и кручению, которые обеспечат построение гладкой кусочно-непрерывной аналитической функции.

Цель статьи – определение условий сшивки в узлах сплайновой кривой по кривизне и кручению и доказательство факта существования и единственности кривой с условиями сшивки по кривизне и кручению.

Условия сшивки в узлах можно определить через параметры k_i, которые эквивалентны классическим условиям сшивки по производным. Параметры k_i определяются репером Френе, которые определяют заданную кривую с точностью до движения.

Репер Френе – естественный трехгранник, представляющий собой три полупрямые, исходящие из точки кривой и имеющие направления векторов τ, ν, β. Репер Френе однозначно определяется параметрами системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \tau_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_1 & & & \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \\ & -k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & k_{n-1}\\ & & & -k_{n-1} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \tau_4\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Следовательно, условия сшивки в узлах кривой определяется как

$$\begin{aligned} x^{+}_{i,q}-x^{-}_{i+1,q}&=0;\\ k^{+}_{i,j}-k^{-}_{i+1,j}&=0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $x^{+}_{i,q}$ – координаты конечной точки i-й дуги; $x^{-}_{i+1,q}$ – координаты начальной точки $i+1$-й дуги, $1\le q\le n$; $k^{+}_{i,j}$ – кривизны i-й дуги сплайна в конечной точке; $k^{-}_{i+1,j}$, – кривизна и кручение $i+1$-й дуги сплайна в начальной точке, $1\le j\le n-1$.

Докажем существование и единственность сплайновой кривой, полученной при сшивке регулярных кривых класса C^n с условиями сшивки в узлах (2).

Теорема. Существует единственная сплайновая кривая дефекта *n*, состоящая из *m* регулярных класса C^n кривых с условиями сшивки в узлах (2).

Доказательство теоремы. Докажем, что в каждой узловой точке сплайновой кривой, существует ортонормированный репер и причем единственный.

Воспользуемся утверждением, что для каждой узловой точки сплайновой кривой дефекта n заданы $n-1$ непрерывная положительная функция $k_{\text{i}}^{+}\left(l\right)$ и $n-1$ непрерывная положительная функция $k_{i+1}^{-}\left(l\right)$.

Существование репера Френе доказывается теоремой: кривизна и кручение, как функции от натурального параметра s, определяют кривую с точностью до положения в пространстве. Для доказательства единственности сплайновой кривой с условиями сшивки в узлах (2) применим к системе Френе (1) стандартную теорему о существовании и единственности для линейной системы, по которой единственным образом найдем функции, удовлетворяющие данной системе. Найденные функции будут определять кривую $r\left(l\right)$. Точнее эта кривая однозначно определяется векторной функцией $\tau\left(l\right)$ интегрированием:

$$r\left(l\right)=r_0+\int_{t_1}^{t}\tau\left(l\right)dl\ .$$

Покажем, что решения системы векторных линейных дифференциальных уравнений (1) в каждой узловой точке определяет репер Френе сплайновой кривой $r\left(l\right)$.

Обозначим через τ_i векторы репера Френе, а через $\hat{k}_i$ – кривизны. Поскольку $\dot{r}=u_1$ и дано, что $\left|u_1\right|=1$, мы получаем, что u_1 – касательный орт нашей кривой, то есть он совпадает с τ_1. В таком случае, сравнивая первое уравнение $\dot{u}=k_1 u_2$ данной системы с первым уравнением Френе $\dot{\tau}=\hat{k}_1\cdot\tau_2$ для полученной кривой, имеем

$$k_1\cdot u_2=\hat{k}_1\cdot\tau_2\ .$$

Взяв модули $-k_1=\hat{k}_1$, получим $u_2=\tau_2$.

Далее рассуждаем по индукции. Производная вектора, для которого на предыдущем шаге было установлено его тождество с соответствующим вектором репера Френе, одинаково выражаются через репер Френе кривой и репер-решение системы:

$$\dot{u}_i = -k_{i-1} \cdot u_{i-1} + k_i \cdot u_{i+1} = \dot{\tau}_i = -\tilde{k}_i \cdot \tau_{i+1}.$$

Вычитая одно выражение из другого, мы получим $k_i u_{i+1} = \tilde{k}_i \cdot \tau_{i+1}$. Так как эти векторы – орты, получаем равенство модулей коэффициентов $|k_i| = |\tilde{k}_i|$. Направление ортов также совпадает, поскольку они были выбраны так, чтобы все коэффициенты были положительными. Значит, $u_{i+1} = \tau_{i+1}$.

Таким образом, доказано, что полученная система решений единственным образом определяет репер Френе сплайновой кривой в заданной узловой точке. Следовательно, существует единственная сплайновая кривая дефекта n, состоящая из m регулярных класса C^n кривых с условиями сшивки в узлах (2). ***Теорема доказана.***

Замечание 1. Условия сшивки по кривизне является эквивалентным условию сшивки сплайновых кривых по производным, которые более универсальны и более информативны с точки зрения дифференциальной геометрии.

Замечание 2. Условия сшивки в узлах пространственной сплайновой кривой определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_i^+ - x_{i+1}^- = 0; \\ &y_i^+ - y_{i+1}^- = 0; \\ &z_i^+ - z_{i+1}^- = 0; \\ &k_{i,1}^+ - k_{i+1,1}^- = 0; \\ &k_{i,2}^+ - k_{i+1,2}^- = 0, \end{aligned}$$

где $\left(x_i^+, y_i^+, z_i^+\right)$ – координаты конечной точки i - й дуги; $\left(x_{i+1}^-, y_{i+1}^-, z_{i+1}^-\right)$ – координаты начальной точки $i+1$-й дуги; $k_{i,1}^+$, $k_{i,2}^+$ – кривизна и кручение i-й дуги сплайна в конечной точке; $k_{i+1,1}^-$, $k_{i+1,2}^-$ – кривизна и кручение $i+1$-й дуги сплайна в начальной точке.

Вывод. Таким образом, показано, что при построении сплайновых кривых можно применять сшивку по кривизне. Такой подход в построении сплайновых
кривых целесообразно применять в случае, когда сплайн состоит из кривых, описанных уравнениями в терминах радиусов кривизны.

Перспективой дальнейших исследований в этом направлении является разработка математической модели кривой, состоящей из участков эвольвент, сшитых в узлах стыковки по кривизне и кручению, а также разработка алгоритма аппроксимации произвольной таблично-заданной кривой эвольвентной сплайновой кривой.

Список литературы: 1. *Schoenberg I. J.* Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions / *I. J. Schoenberg* // Quart. Appl. Math., 1946. – № 4. – Parts A and B. – P. 45 – 99, 112 – 141. **2.** *Завьялов Ю. С.* Сплайны в инженерной геометрии / *Ю.С. Завьялов, В.А. Леус, В.А. Скороспелов*. – М.: Машиностроение, 1985. – 221 с. **3.** *Piegle L.* The NURBS book / *L. Piegle, W. Tiller*. – Berlin: Springer, 1997. – 578 p. **4.** *Marciniak K.* Approximation of spirals by piecewise curves of fewest circular arc segments / *K. Marciniak, B. Putz //* Computer Aided-Design 16 (1984), 87-90. **5.** *Jakubczyk K.* The Applications of Circular Spline F unctions in Computer Computations [in Polish] / *K. Jakubczyk //* Doctoral thesis, Silesian Technical University, Gliwice 1978. **6.** *Sir Z,* Approximating Curves and Their O-sets using Biarcs and Pythagorean Hodograph Quintics / *Z. Sir, R. Feichtinger, B. Juttler //* Computer Aided-Design 38 (2006), 608-617. **7.** *Quin Z.* Circular Arcs as Primitives for Vector Textures / *Z. Quin, C. Kaplan, M. Mc Cool //* Technical report CS-2007-41, School of Computer Science, University of Waterloo, http://www.cgl.uwaterloo.ca /~zqin/jgt2007/ submittedcr.pdf. **8.** *Бут Е. Н.* Компьютерная геометрия в САПР и АСТПП / *Бут Е.Н.* // Автоматизация проектирования средств технологического оснащения в машиностроении и приборостроении. – Рига: РПИ, 1988. – С. 17 – 19. **9.** *Бут Е.Н.* Компьютерная сплайновая планиметрия. Определения и проблемы / Е.Н. Бут // Авиационно–космическая техника и технология. – Х.: НАУ «ХАИ». – 2001. – № 24. – С. 236 – 246. **10.** *Huper K.* Geometric Splines and Interpolation on S2: Numerical experiments / *K. Huper, Y. Shen, F. Silva Leite* // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006 P. 403-407 **11**. *Farin G.* Curves and surfaces for CAGD / G. *Farin //* A practical guide, 5th ed. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002. **12.** *Schumaker, L. L.* Spline functions. Basic theory: Third edition / L. L. Schumaker. – New York: Cambridge University Press, 2007. – 582 p.

Поступила в редколлегию 20.06.2012

УДК 514, 519.6

Умови зшивки сплайнової кривої по кривизні та крутінню при автоматизації технологічної підготовки виробництва / В.А. Сорокин, А.К. Шапошников // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Технології в машинобудуванні. – Х. : НТУ «ХПІ», 2012. – № 53(959). – С.140-144. – Бібліогр.: 12 назв.

Отримані умови зшивки сплайновоЇ кривої по кривизні та крутінню. Доведене існування та одиничність сплайнової кривої з умовами зшивки у вузлах по кривизні та крутінню. Показане, що дані умови зшивки у вузлах сплайнової кривої еквівалентні класичним умовам зшивки по похідних.

Ключові слова: Сплайн, кривизна, крутіння, існування та одиничність.

In this paper was shown the conditions for joining spline curve which is defined by the curvature and torsion. We proved the existence and uniqueness of the spline curve with the terms of joining the nodes in the curvature and torsion. It is shown that these conditions at the nodes of spline curve are equivalent to the classical conditions for linking derivative.

Key words: Spline curve, curvature, torsion, existence and uniqueness.