УДК 658.51.012

В. Я. ЗАРУБА, О. М. ПИГНАСТЫЙ, В. Д. ХОДУСОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРЕДМЕТА ТРУДА ПО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМУ МАРШРУТУ В ДВУХКООРДИНАТНОМ ОПИСАНИИ

Рассмотрено движение предметов труда по поточной технологической линии в двухмерном пространстве состояний. Определена метрика пространства. Введено понятие технологического события в пространстве состояния. В пространстве состояний интервал между технологическими событиями определяет необходимое количество ресурсов для перехода предмета труда из одного состояния в другое состояние. Для построения траектории объекта труда в пространстве состояний был использован вариационный принцип. Вариационный принцип позволил записать уравнение Эйлера. Для движения одного предмета труда в двухмерном пространстве состояний записана система уравнений Эйлера. Приведена система уравнений Эйлера для траектории одного предмета труда в многомерном пространстве состояния. Решена система уравнений Эйлера для случая движения предмета труда в двухкоординатном пространстве состояний. Решение системы уравнений позволило получить состояния предмета труда в заданный момент времени. Записано решение для равномерного переноса технологических ресурсов на предмет труда при переходе от одной технологической операции к другой. При построении модели для партии предметов труда были введены ограничения. Эти ограничения определяют порядок обработки предметов труда. Уравнение траектории предмета труда записано с использованием функции Лагранжа. Функция Лагранжа учитывает ограничений, которые наложены на производственную систему. Сделаны выводы о целесообразности использования рассмотренных моделей при расчете производственного цикла обработки партии деталей на поточной линии и прогнозировании использовании требуемых технологических ресурсов.

Ключевые слова: предмет труда, уравнение движения, двухкоординатное описание, уравнения Эйлера, технологический ресурс, производственный цикл.

Введение. Производство представляет собой сложный процесс превращения сырья, материалов и полуфабрикатов в готовую продукцию. Технологический процесс - часть производственного процесса, содержащая целенаправленные действия по изменению и (или) определению состояния предмета труда [1]. Основными элементами технологического процесса являются труд, средства труда и предметы труда. Изготовление продукции с заданными свойствами предприятия обеспечивается средствами труда: оборудованием, инструментом, приспособлениями, оснасткой. С помощью средств труда человек воздействует на предмет труда. Каждый предмет труда характеризуется свойствами [2]. Признак, количественно характеризующий любые свойства или состояния изделия называется параметр изделия [2]. По мере превращения в готовую продукцию предметы труда проходят отдельные, как правило, хорошо различимые во времени и пространстве стадии технологической обработки, что позволяет их рассматривать в качестве объектов планирования и управления. Последовательное изменение состояния или свойств предметов труда происходит в процессе перехода от одной технологической операции к другой может быть представлено траекторией движения предмета труда в пространстве состояний. Известно достаточно большое количество работ, использующих современный подход PDE-моделирования поточного производства, рассматривающих движение предметов труда в одномерном пространстве состояния [3,4]. В частности, в работах Armbruster D, Kempf K состояние предмета труда определяется безразмерным параметром x, $(x \in [0,1])$ характеризующим степень готовности предмета труда, а в работах [4] стоимостью S перенесенных технологических ресурсов на предмет туда $(S \in [0, S_d])$, где S_d - нормативная себестоимость изготовления изделия. Таким образом, в ходе технологической обработки предмет труда переходит из одного состояния в другое состояние. При этом меняются параметры, определяющие свойства предмета труда. Изменение свойств описывается агрегированными переменными x и S. При этом изменение свойств предмета труда тесно связано с воздействием на него технологического оборудования. В ходе такого воздействия на предмет труда переносятся технологические ресурсы, стоимость которых определена. Таким образом, изменение свойств предметов труда определено количеством перенесенных технологических ресурсов определенной стоимости. Если состояние предмета труда может быть описано параметрами, каждый из которых характеризует изменение определенного свойства, то изменение свойств предмета труда при переходе из одного состояния в другое будет соответствовать сумме стоимостей технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда в результате такого перехода. Такой подход позволяет ввести метрической пространство, длина траектории, соединяющая точки, соответствующие переходу предмета труда из одного состояния в другое, будет соответствовать изменению его стоимости. Полная стоимость изготовления предмета труда соответствует длине траектории в пространстве состояния при переходе от начальной точки траектории к конечной точки траектории. Изменение же параметра, характеризующее изменение определенного свойства предмета труда сложно выразить через переменную, определяющую степень готовности предмета труда x. Следует, однако, заметить, что при решении некоторых задач, для которых состояние предмета труда может быть выражено одним параметром, соответствующим изменение состояния предмета труда, возможен переход к безразмерному параметру $x = S/S_d$ [4, стр.208], что является частным случаем.

Моделирование движения предмета труда в двухмерном пространстве состояний. Рассмотрим технологический процесс, состоящий из М различимых друг от друга стадий технологической обработки предмета труда, позволяющих разбить траекторию движения предмета труда на М участков, соответствующих той или иной технологической операции. Будем характеризовать каждую технологическую операцию временем технологической обработки $\Delta\tau_m$ (час), в течение которого технологическое оборудование воздействует на предмет труда, потребляя при этом электроэнергию в размере Δq_{1m} (кВт*час) и сырье весом Δq_{2m} (кг). Стоимость электроэнергии в зависимости от времени суток для m-ой технологической операции составляет Z_{1m} (грн /(кВт*час)) , а цена сырья Z_{2m} (грн /кг) .

Рассмотрим два близких события, зафиксированных нами при движения предмета труда по технологическому маршруту в момент времени t_1 и $t_2 = t_1 + dt$. Пусть первое событие определяется параметрами состояния предмета труда (q_1, q_2), а второе ($q_1 + dq_1, q_2 + dq_2$). За время dt перехода из одного состояния в другое в ходе выполнения технологической операции на предмет труда переносятся технологические ресурсы с интенсивностью $\mu_q(q_1, q_2)$ (грн/час). Будем полагать, что в технологическом пространстве состояний (q_1, q_2) определена метрика, с учетом которой квадрат элемента длины dS^2 представляет выражение

$$dS^2 = a_{11} \cdot dq_1^{\,2} + 2a_{12} \cdot dq_1\, dq_2 + a_{22} \cdot dq_2^{\,2}, \text{ (грн2)} \quad (1)$$

где координатные функции пространства состояний определены как $a_{11} = (Z_1(q_1))^2$,

$$a_{12} = a_{12} = Z_1(q_1) Z_2(q_2),\ a_{22} = (Z_2(q_2))^2. \quad (2)$$

Для интервала $d\Re$ между двумя событиями, произошедшими с одним и тем же предметом труда в технологическом пространстве состояний (q_1, q_2)справедливо неравенство

$$(d\Re)^2 = (\mu_q(q_1, q_2) \cdot dt)^2 - dS^2 \ge 0. \quad (3)$$

Неравенство (3) означает, что предмет труд в ходе технологической обработки потребляет технологические ресурсы в количестве не большем, чем ему может быть передано от технологического оборудования. Уравнение (3) представляет собой уравнение неудерживающей связи для рассматриваемого пространства состояний, будет использовано ниже для построения целевой функции производственной системы.

Выберем для дальнейшего рассмотрения изменения состояния предмета труда в результате его технологической обработки координаты (S_1, S_2), такие, что $dS_1 = Z_1(q_1) \cdot dq_1$, $dS_2 = Z_2(q_2) \cdot dq_2$. Выбор координат в стоимостном представлении позволяет более наглядно представить процесс сложения технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда. Изменении количества технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда, приводит к изменению стоимости предмета труда, состоящей из стоимости отдельных технологических ресурсов, определяющих состояние предмета труда. Правило сложения технологических ресурсов в пространстве состояний определено метрикой пространства. Тогда в новых координатах (S_1, S_2) (1) – (3) примет вид

$$(d\Re)^2 = (\mu_\psi(S_1, S_2) dt)^2 - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\, dS_i dS_j \ge 0,$$

$$b_{11} = 1,\ b_{21} = b_{12} = 1,\ b_{22} = 1\ . \quad (4)$$

При исследовании движения предмета труда по технологическому маршруту будем исходить из того, что за время dt технологические ресурсы в количестве $\mu_\psi(S_1, S_2) dt$ (грн), переносятся на предмет труда с минимальными потерями, в результате чего происходит изменение параметров состояния предмета труда на величину, эквивалентную стоимости ресурсов $\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\, dS_i dS_j}$.

Потребуем, чтобы технологический процесс обработки предмета труда выполнялся согласно нормативным конструкторским и технологическим параметрам, что определяется функционалом

$$\Re = \int_0^{Td} \sqrt{(\mu_\psi(S_1, S_2) \cdot dt)^2 - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\, dS_i dS_j} =$$

$$= \int_0^{Td} J(S_1, S_2, \mu_1, \mu_2) dt,$$

$$J(S_1, S_2, \mu_1, \mu_2) = \sqrt{\left((\mu_\psi(S_1, S_2))^2 - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \mu_i \cdot \mu_j\right)}, \quad (5)$$

где Td - время движения предмета труда по технологическому маршруту, начиная с момента поступления на поточную линию и заканчивая выходом готового изделия.

Из равенства нулю вариации $\delta\Re = 0$ следуют уравнения Эйлера для вариационной задачи с функционалом (5), описывающие изменение состояния предмета труда, описываемого параметрами S_1, S_2:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial J(S_1, S_2, \mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} = \dfrac{\partial J(S_1, S_2, \mu_1, \mu_2)}{\partial S_1} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial J(S_1, S_2, \mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} = \dfrac{\partial J(S_1, S_2, \mu_1, \mu_2)}{\partial S_2} \end{cases}, \quad (6)$$

Если положить, что интенсивность переноса технологических ресурсов $\mu_\psi(S_1, S_2)$ может быть представлена в виде сумме интенсивностей $\mu_{\psi_j}(S_j)$

$$\mu_\psi(S_1, S_2) = \sum_{j=1}^{2} \mu_{\psi_j}(S_j), \quad (7)$$

то система уравнений (6) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = \mu_{\psi_1}(S_1)\cdot\dfrac{\partial\mu_{\psi_1}(S_1)}{\partial S_1}; \\ \dfrac{d\mu_2}{dt} = \mu_{\psi_2}(S_2)\cdot\dfrac{\partial\mu_{\psi_2}(S_2)}{\partial S_2}. \end{cases} \qquad (8)$$

В общем случае z-мерного пространства система уравнений (8) может быть записана в общем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = \mu_{\psi_1}(S_1)\cdot\dfrac{\partial\mu_{\psi_1}(S_1)}{\partial S_1}; \quad \mu_{\psi}(S_1,S_2,..,S_z) = \sum_{j=1}^{z}\mu_{\psi_j}(S_j); \\ \dfrac{d\mu_2}{dt} = \mu_{\psi_2}(S_2)\cdot\dfrac{\partial\mu_{\psi_2}(S_2)}{\partial S_2}; \\ \dfrac{d\mu_j}{dt} = \mu_{\psi_j}(S_j)\cdot\dfrac{\partial\mu_{\psi_j}(S_j)}{\partial S_j}; \quad \dfrac{d\mu_z}{dt} = \mu_{\psi_z}(S_z)\cdot\dfrac{\partial\mu_{\psi_z}(S_z)}{\partial S_z}. \end{cases} \qquad (9)$$

Следует заметить, что система уравнений (8) может быть получена, если подынтегральная функция представлена в виде

$$J = \frac{1}{W}\left(\mu_{\psi}(S_1,S_2,..,S_z) - \sum_{j=1}^{z}\mu_j\right)^W,$$

$$\mu_{\psi}(S_1,S_2,..,S_z) = \sum_{j=1}^{z}\mu_{\psi_j}(S_j). \qquad (10)$$

где целевая функции содержит выражение, определяемое удерживающей связью вида (3) со строгим равенством. Действительно, выполнив дифференцирование

$$\frac{\partial J}{\partial\mu_j} = -\left(\mu_{\psi}(S_1,S_2,..,S_z) - \sum_{j=1}^{z}\mu_j\right)^{W-1};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial\mu_j} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_{\psi} - \sum_{j=1}^{z}\mu_j\right)^{W-1} =$$

$$= -(W-1)\left(\mu_{\psi} - \sum_{j=1}^{z}\mu_j\right)^{W-2}\cdot\sum_{j=1}^{z}\frac{\partial\mu_{\psi}}{\partial S_j}\mu_j +$$

$$+ (W-1)\left(\mu_{\psi} - \sum_{j=1}^{z}\mu_j\right)^{W-2}\cdot\sum_{j=1}^{z}\frac{d\mu_j}{dt} =$$

$$= -(W-1)\left(\mu_{\psi} - \sum_{j=1}^{z}\mu_j\right)^{W-2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{z}\frac{\partial\mu_{\psi}}{\partial S_j}\mu_j - \sum_{j=1}^{z}\frac{d\mu_j}{dt}\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial S_j} = \left(\mu_{\psi} - \sum_{j=1}^{z}\mu_j\right)^{W-1}\frac{\partial\mu_{\psi}}{\partial S_j}\mu_j,$$

и используя (6), получим

$$\frac{d\mu_j}{dt} = \mu_{\psi_j}(S_j)\cdot\frac{\partial\mu_{\psi_j}(S_j)}{\partial S_j}, \qquad j = 1..z \qquad (11)$$

$$\mu_{\psi}(S_1,S_2,..,S_z) = \sum_{j=1}^{z}\mu_{\psi_j}(S_j),$$

Решим систему уравнений (9). Зависимость $\mu_{\psi_j}(S_j)$ определим из технологической документации, которая характеризует заданный технологический процесс на предприятии в виде норм расходов сырья и материалов, а также сменных норм, утвержденных для каждой технологической операции. Используя значения таблицы №1 для m-ой технологической операции, вычислим значения в таблице №2, определим функцию $\mu_{\psi_j}(S_1)$. Табличное значение $\mu_{\psi_j}(S_{m1})$ представим аналитической функцией (рис.1)

$$\mu_{\psi_j}(S_1) = 15 \text{ (грн/час)} \qquad (12)$$

Аналогично, используя значения таблицы №3 для m-ой технологической операции, определим функцию $\mu_{\psi_2}(S_2)$. Табличное значение $\mu_{\psi_2}(S_{2m})$ представим аналитической функцией (рис.2)

$$\mu_{\psi_2}(S_2) = \sqrt{40\cdot S_2} \qquad (13)$$

Действительно, подставив в (13) табличные значения S_{m2}, получим табличные значения $\mu_{\psi_2}(S_{m2})$. График функции $\mu_{\psi_2}(S_2)$ представлен на рисунке 2.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = 0; \\ \dfrac{d\mu_2}{dt} = \mu_{\psi_2}\cdot\dfrac{20}{2\cdot\sqrt{40\cdot S_2}} = \mu_{\psi_2}\cdot\dfrac{20}{\mu_{\psi_2}} = 20. \end{cases} \qquad (14)$$

Решение системы (14) может быть представлено в следующем виде

$$\begin{cases} S_1 = C_2\cdot t + C_1; \\ S_2 = 10\cdot t^2 + B_2\cdot t + B_1 \end{cases} \qquad (15)$$

Подставим выражения для интенсивностей $\mu_{\psi_j}(S_1)$, $\mu_{\psi_2}(S_2)$ (12), (13) в систему уравнений (8), получим тождественное равенство.

Коэффициенты C_j и B_j определим из начальных условий

$$S_1(0) = 0; \quad S_2(0) = 0, \qquad (16)$$

$$\mu_1(0) = \mu_{\psi_1}(0) = 15; \quad \mu_2(0) = \mu_{\psi_2}(0) = 0.$$

Откуда

$$\begin{cases} S_1 = 15\cdot t; \\ S_2 = 10\cdot t^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_1 = 15; \\ \mu_2 = 20\cdot t. \end{cases} \qquad (17)$$

Если из (17) выразить $t = \sqrt{\dfrac{S_2}{10}}$ и подставить в выражение для μ_2, получим

$$\begin{cases} \mu_1 = 15 = \mu_{\psi_1}(S_1); \\ \mu_2 = 20\cdot t = 20\cdot\sqrt{\dfrac{S_2}{10}} = \sqrt{40\cdot S_2} = \mu_{\psi_2}(S_2) \end{cases} \qquad (18)$$

Исключив параметр t, установим взаимосвязь между перенесенными технологическими ресурсами на предмет труда $S_1(t)$, $S_2(t)$:

$$S_2 = \frac{10}{225}S_1^2 \qquad (20)$$

Выражение (20) полезно использовать при построении системы управления запасами предприятия. В момент времени t предмет труда находится в точке с координатами $S_1(t)$, $S_2(t)$, в которой на предмет труда переносятся технологические ресурсы с интенсивностью

$\mu_1 = \mu_{\psi 1}(S_1(t))$, $\mu_2 = \mu_{\psi 2}(S_2(t))$. В случае обработки на технологической линии только одного предмета труда, его траектория совпадает с нормативной траекторией для технологического процесса, определяемой функциями $\mu_{\psi 1}(S_1(t))$, $\mu_{\psi 2}(S_2(t))$:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_{\psi 1}}{dt} = \mu_{\psi 1}\left(S_{\psi 1}\right); \\ \dfrac{dS_{\psi 2}}{dt} = \mu_{\psi 2}\left(S_{\psi 2}\right). \end{cases} \quad (21)$$

В заключении заметим, что система (8) позволяет перейти от двух координатного описания движения предмета труда в координатном пространстве к пространству состояний одной координаты. Если воспользоваться правилом сложения состояний в заданной метрике (1) пространства состояний и ввести обозначения:

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t),$$
$$\mu_\psi(S(t)) = \mu_{\psi 1}(S_1(t)) + \mu_{\psi 2}(S_2(t)), \quad (22)$$

то система уравнений (8) примет вид

$$\frac{d\mu_1}{dt} + \frac{d\mu_2}{dt} = \mu_{\psi_1} \cdot \frac{\partial \mu_{\psi_1}(S_1)}{\partial S_1} + \mu_{\psi_1} \cdot \frac{\partial \mu_{\psi_2}(S_2)}{\partial S_2}$$

или

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial \mu_\psi(S)}{\partial S} \mu_\psi(S), \quad (23)$$

где

$$\frac{d\mu_1}{dt} + \frac{d\mu_2}{dt} = \frac{d\mu_1 + d\mu_2}{dt} = \frac{d\mu}{dt},$$

$$\mu_1 \frac{\partial \mu_{\psi_1}(S_1)}{\partial S_1} + \mu_2 \frac{\partial \mu_{\psi_2}(S_2)}{\partial S_2} = \frac{\partial \mu_{\psi_1}(S_1)}{\partial S_1} \frac{dS_1}{dt} + \frac{\partial \mu_{\psi_2}(S_2)}{\partial S_2} \frac{dS_2}{dt} =$$

$$= \frac{d\mu_{\psi_1}(S_1)}{dt} + \frac{d\mu_{\psi 2}(S_2)}{dt} = \frac{d\mu_{\psi_1}(S_1) + \mu_{\psi 2}(S_2)}{dt} = \frac{d\mu_\psi(S)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \mu_\psi(S)}{\partial S} \cdot \mu(S) = \mu_\psi(S) \frac{\partial \mu_\psi(S)}{\partial S}$$

Решение системы уравнений (8) позволяет получить состояния предмета труда в заданный момент времени. Если по поточной линии движется партия N предметов труда, то решение системы N-уравнений дает возможность определить состояние N предметов труда в момент времени t, а следовательно построить модель обеспечения производства технологическими ресурсами, необходимыми для бесперебойной работы поточной линии. Однако, задача о движении большого количества предметов труда по поточной линии содержит большое количество ограничений. Технологическая траектория предмета труда является ограничением для следующего за ним предмета труда. Для линейной системы технологических операций предмет труда не может быть подан на технологическую обработку, пока не будет выполнена технологическая обработка предмета труда, находящегося пред ним. Таким образом, данное ограничение не позволяет пересекаться технологическим траекториям. Это пример технологического ограничения на последовательность обработки предметов труда. Важную группу ограничений образуют дифференциальные связи на размер межоперационных накопителей. Эти связи отсутствуют при построении нормативной траектории движения предмета труда в пространстве состояний и появляются при решении задач, связанных с обработкой партии предметов труда.

Рис. 1 –Интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда $\mu_{\psi_j}(S_1)$

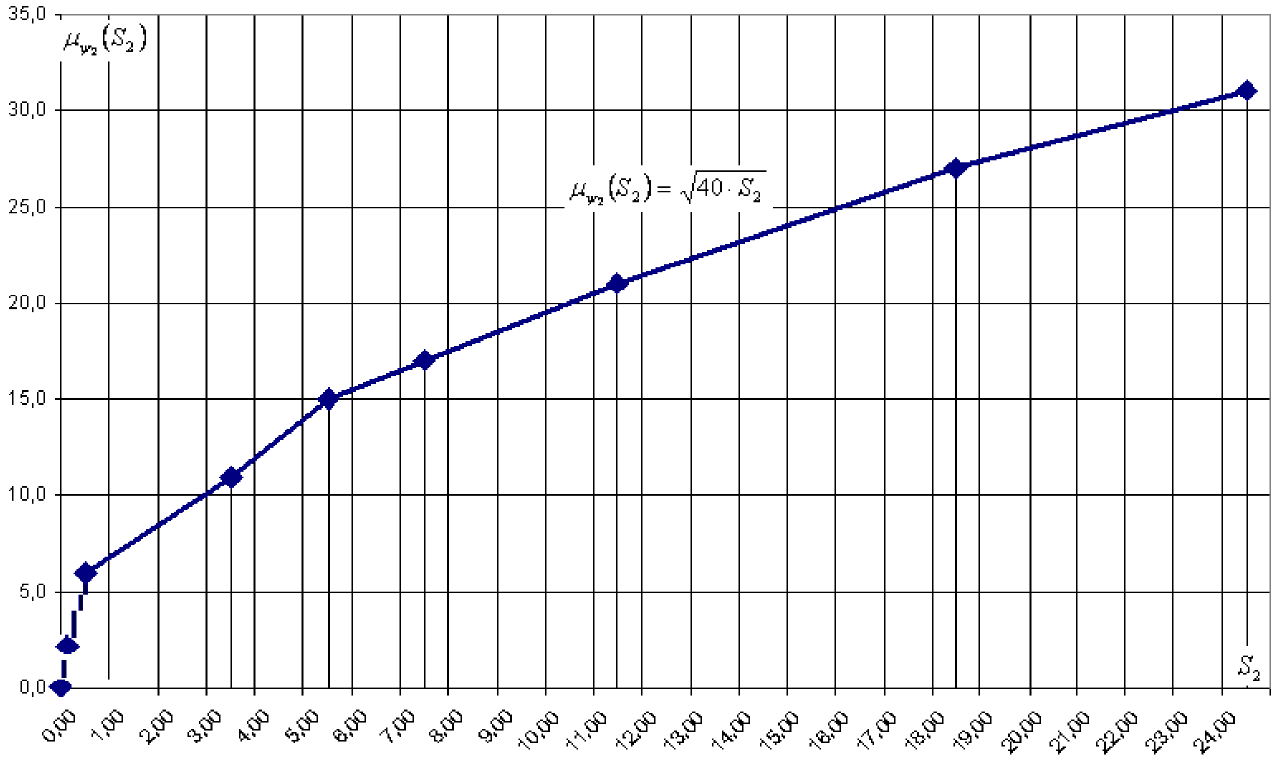

Рис. 2 –Интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда $\mu_{\psi_2}(S_2)$

Таблица 1 – Параметры технологических операций. Потребление электроэнергии (технологический ресурс q_1)

Наименование параметров	Обозначение	Номер технологической операции								
		0-я	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я
Время выполнения технологической операции, час	$\Delta\tau_m$		0,1	0,2	0,25	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2
Потребление электроэнергии за время выполнения технологической операции, кВт*час	Δq_{1m}		1,0	2,0	2,5	2,0	1,0	2,0	3,0	2,0
Цена электроэнергии, грн/(кВт*час)	z_{1m}		1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5

Таблица2 – Расчет интенсивности переноса технологических ресурсов $\mu_{\psi_j}(S_{m1})$

Наименование параметров	Обозначение	Номер технологической операции								
		0-я	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я
Стоимость потребенных ресурсов за время выполнения технологической операции, грн	$\Delta S_{1m} = Z_{1m} \cdot \Delta q_{1m}$		1,5	3	3,75	3	1,5	3	4,5	3
Общая стоимость технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда на момент окончания технологической операции, грн	$S_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \Delta S_{1i}$	0	1,5	4,5	8,25	11,3	12,8	15,8	20,3	23,3
Средняя интенсивность передачи технологических ресурсов от технологического оборудования, грн/час	$\mu_{\psi_j}(S_{1m}) = \dfrac{\Delta S_{1m}}{\Delta\tau_m}$	15,0	15,0	15,0	15,0	15,0	15,0	15,0	15,0	15,0

Моделирование движения партии предметов труда в одномерном пространстве состояний. Рассмотрим движение партии N-предметов труда по поточной линии. Будет полагать, что в момент поступления предметов труда на поточную линию, на каждом М-ой технологической операции межоперационные заделы отсутствуют. Такую поточную линию будем называть свободной. При описании изменении состояния j-го предмета труда воспользуемся уравнением (23). Тогда партия предметов труда может быть описана системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = \dfrac{\partial \mu_\psi(S_1)}{\partial S}\mu_\psi(S_1); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\mu_j}{dt} = \dfrac{\partial \mu_\psi(S_j)}{\partial S}\mu_\psi(S_j); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\mu_N}{dt} = \dfrac{\partial \mu_\psi(S_N)}{\partial S}\mu_\psi(S_N). \end{cases}, \qquad (24)$$

где $\mu_\psi(S)$ - известная функция. Используя (22) решение системы уравнений (24) для детерминированного случая, может быть обеспечен переход от однокоординатного описания к многокоординатному.

Систему уравнений (24) дополним ограничениями на последовательность обработки предметов труда и на размер межоперационных накопителей. Движение предмета труда по технологической линии ограничено состоянием обработки предыдущих предметов труда. Первое ограничение заключается в том, что приступить к технологической обработки j-ого предмета труда на m-ой технологической операции возможно только после окончания технологической обработки $(j-1)$-ого предмета труда. В произвольный момент времени t_1 для двух точек $S_{j-1}(t_1)$ и $S_j(t_1)$ траекторий, следующих друг за другом предметов труда справедливо соотношение

$$S_{j-1}\left(t - \Delta\tau_m(S_j)\right) \ge S_j(t). \qquad (25)$$

Второе ограничение заключается в том, что технологическая обработка j-ого предмета труда на m-ой технологической операции должна быть закончена позднее, чем начата технологическая обработка $(j-N_{m,\psi})$-ого предмета труда на $(m+1)$-ой технологической операции с емкостью входного накопителя $N_{(m+1),\psi\ Max}$. При начале обработки $(j-N_{m,\psi\ Max})$-ого предмета труда на $(m+1)$-ой технологической операции во входном накопителе емкостью $N_{(m+1),\psi\ Max}$ освобождается место для j-ого предмета труда, находящемся в обработке на m-ой технологической операции. Ограничение, связанное с конечной емкостью накопителя, может быть записано в виде неравенства

$$S_{j\text{-}N_{m,\psi\ Max}}(t) \ge S_j(t), \qquad j - N_{m,\psi\ Max} > 0. \qquad (26)$$

При этом предполагается, что допустим случай, когда j-ый предмет труда в ожидании окончания обработки $(j-N_{m,\psi\ Max})$-ого предмета труда на $(m+1)$-ой технологической операции может находится в технологическом модуле на m-ой технологической операции. Если такой случай недопустим, то будем предполагать, что емкость накопителя меньше на единицу.

При наличие ограничений в виде (25), (26) траектория движения j-ого предмета труда в фазового технологического пространства (t,S,μ) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mu_{j_i}} = \frac{\partial L}{\partial S_j}, \qquad \frac{dS_j}{dt} = \mu_j, \qquad (j = 1..N) \qquad (27)$$

$$L = J(S_j, \mu_j) + \lambda_{1j}\left\{S_{j-1}\left(t-\tau_m(S_j)\right) - S_j(t)\right\} + \\ + \lambda_{2j}\left\{S_{j\text{-}N_{m,\psi\ Max}}(t) - S_j(t)\right\},$$

с начальными условиями

$$S_j(t_{нj}) = 0, \qquad \mu_j(t_{нj}) = \mu_{нj}, \qquad (28)$$

и ограничениями, накладываемыми на технологические траектории

$$S_{j-1}\left(t-\tau_m(S_j)\right) \ge S_j(t), \; S_{j\text{-}N_{m,\psi\ Max}}(t) \ge S_j(t). \qquad (29)$$

Уравнения, описывающие движение j-ого предмета труда в фазовом технологическом пространстве (t, S, μ) могут быть записаны как

$$\frac{d\mu_j}{dt} = \mu_\psi(S_j)\frac{\partial \mu_\psi(S_j)}{\partial S} + \\ + \lambda_{1j}\cdot\left\{\mu_{j-1}\left(t-\tau_m(S_j)\right)\cdot\frac{d\left(t-\tau_m(S_j)\right)}{dS_j} - 1\right\} - \lambda_{2j}, \qquad (30)$$

$$S_j(t_{нj}) = 0, \quad \mu_j(t_{нj}) = \mu_{нj}, \quad (j = 1..N)$$

$$S_{j-1}\left(t-\tau_m(S_j)\right) \ge S_j(t), \quad \lambda_{1j} \ge 0,$$
$$\lambda_{1j}\left\{S_{j-1}\left(t-\tau_m(S_j)\right) - S_j(t)\right\} = 0,$$
$$S_{j\text{-}N_{m,\psi\ Max}}(t) \ge S_j(t), \qquad \lambda_{2j} \ge 0,$$
$$\lambda_{2j}\cdot\left\{S_{j\text{-}N_{m,\psi\ Max}}(t) - S_j(t)\right\} = 0,$$
$$\lambda_{1j} \equiv 0 \quad \text{при } j-1 \le 0 \text{ и } \lambda_{2j} \equiv 0 \text{ при } j - N_{m,\psi\ Max} \le 0. \qquad (31)$$

Из условий Куна-Таккера вытекают условия дополнительной нежесткости, состоящие в том, что множитель Лагранжа λ_{kj} равен нулю, если ограничение выполняется как строгое неравенство, и соответствующий множитель Лагранжа положителен, если ограничение выполняется как равенство.

Если начальные условия системы уравнений таковы, что запуск изделия на обработку осуществляется через интервал времени τ_{max}, превышающий максимальное время обработки предметов труда на технологических операциях поточной линии или равный этому времени

$$S_j(\tau_{max}\cdot j) = 0, \quad \mu_j(\tau_{max}\cdot j) = \mu_{нj}, \quad (j = 1..N) \qquad (32)$$

то ограничения (25),(26) выполняются для каждого предмета труда в любой момент времени t, и система уравнений (30) принимает вид

$$\frac{d\mu_j}{dt} = \mu_\psi(S_j)\frac{\partial \mu_\psi(S_j)}{\partial S}, \; S_j(\tau_{max} j) = 0, \; \mu_j(\tau_{max} j) = \mu_{нj} \qquad (33)$$

Система (33) является системой из N-независимых уравнений. В частном случае, уравнения (33) соответствуют движению предметов труда по синхронизированной поточной линии с временем выполнения технологической каждой операции τ_{max}. Решение системы уравнений (33) может быть представлено в виде

$$S_1(t)= f(t), \qquad S_j(t)=S_1(t+\tau_{max}(j-1)), \quad j>1. \quad (34)$$

Решение системы уравнений (27) позволяет определить в пространстве состояний положение каждого предмета труда в любой момент времени. Если мы получим информацию о состоянии каждого предмета труда, то следовательно, мы будем иметь информацию параметрах состояния поточной линии, а именно сколько и на какой технологической операции в момент времени t будут находится предмета труда, что позволит прогнозировать потребление технологических ресурсов в зависимости от времени, точно определить время выполнения заказа из N предметов труда, поступившего в производство.

Выводы. Расчет производственного цикла изготовления изделия является одной из самых важных и трудоемких задач проектирования поточных линий [3,4,6]. В статье представлен современный подход, позволяющий определить состояние предмета труда в требуемый момент времени, а следовательно определить длительность производственного цикла, которое является временем изготовления изделия или, если обрабатывается партия, то временем изготовлением изделий партии. Зависимость длительности изготовления партии изделий в зависимости от незавершенного производства является одной из актуальных задач расчета современных поточных линий [3]. Описание предмета труда в многокоординатном пространстве состояний и определение положения предмета труда в этом пространстве в любой момент времени позволяет построить прогнозную модель обеспечения предприятия технологическими ресурсами. Показан переход от однокоординатного описания к многокоординатному описанию движения предметов труда по поточной линии для детерминированного случая. Рассмотрена взаимосвязь многокоординатного и однокоординатного описания. Изучен и проанализирован случай движения партии предметов труда по свободной поточной линии. Полученные результаты подтверждают адекватность модели и могут быть использованы при анализе и расчете поточных линий

Список литературы: **1.** ГОСТ 3.1109.82 Термины и определения основных понятий. – М.: Госстандарт России, 2003. – 15 с. **2.** ГОСТ 15467.79 Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения. – М.: Госстандарт России, 2001. – 25 с. **3.** *Armbruster D* The production planning problem: clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations / *D Armbruster, K Kempf* // Decision policies for production systems. Springer. 2012, P 289–302. **4.** *Пигнастый О. М.* Статистическая теория производственных систем / *О. М. Пигнастый.* – Харьков: ХНУ, 2007. – 388 с. **5.** *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ / *П. К. Рашевский.* – М.: Высшая школа, 1967. – 664 с. **6.** *Летенко* В. А. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. / *В. А. Летенко, Б. Н. Радионов.* – М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.

Bibliography (transliterated): **1.** *GOST 3.1109.82 Terminy i opredelenija osnovnyh ponjatij.* – Moscow: Gosstandart Rossii, 2003. Print. **2.** *GOST 15467.79 Upravlenie kachestvom produkcii. Osnovnye ponjatija. Terminy i opredelenija.* – Moscow: Gosstandart Rossii, 2001. Print. **3.** Armbruster D *The production planning problem: clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations* / D Armbruster, K Kempf // *Decision policies for production systems*. Springer, 2012, 289–302.. Print. **4.** Pignastyj O.M. *Statisticheskaja teorija proizvodstvennyh sistem* / O.M. Pignastyj. – Har'kov: HNU, 2007. Print. **5.** Rashevskij P. K. *Rimanova geometrija i tenzornyj analiz* / P. K. Rashevskij. – Moscow: Vysshaja shkola, 1967. Print. **6.** Letenko V. A. *Organizacija, planirovanie i upravlenie mashinostroitel'nym predprijatiem. Chast' 2, Vnutrizavodskoe planirovanie.* / V. A. Letenko, B. N. Radionov. – Moscow: Vysshaja shkola. Print.

Поступила (received) 03.06.2015

Заруба Віктор Якович – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики та маркетингового менеджменту, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Zaruba Viktor Yakovlevich– Doctor of Economic Sciences, Full Professor, head of the Department of Economic Cybernetics and Marketing Management, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

Пигнастый Олег Михайлович – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики; тел.: (067) 572-50-29; e mail: pom7@bk.ru.

Pignasty Oleg Michalovich – Doctor of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of computer monitoring and logistics; tel.: (067) 572-50-29; e-mail: pom7@bk.ru

Ходусов Валерій Дмитрович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та теоретичної ядерної фізики ФТФ ХНУ ім. В. Н.Каразіна

Khodusov Valery Dmitrievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and Theoretical Nuclear Physics FTF KhNU them. V.N.Karazin