УДК 539.3

А.В. ГРАБОВСКИЙ, Н.А. ТКАЧУК, А.Ю. ТАНЧЕНКО, Н.Н. ТКАЧУК, И.В. МАЗУР

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ К ВАРЬИРОВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В работе предложен новый подход к исследованию чувствительности собственных частот и форм колебаний к варьированию параметров динамической системы. Собственные формы колебаний определяются из условий достижения условных минимумов функции Рэлея. Установлены соотношения для определения изменения собственных частот и форм колебаний при варьировании инерционно-жесткостных характеристик динамической системы. Предложены новые соотношения для определения компонент чувствительности с использованием конечных разностей. При этом определение спектра собственных частот колебаний и собственных форм колебаний осуществляется методом конечных элементов.

Ключевые слова: динамическая система, собственная форма колебаний, функция Рэлея, чувствительность.

Введение. При анализе поведения динамических систем, подвергающихся воздействию нагрузок различного происхождения, важной информацией является спектр собственных частот колебаний (СЧК) [1]. Соотнося собственные частоты колебаний с частотами внешних возбуждающих нагрузок, можно определять возможность установления тех или иных опасных режимов (например, резонансных). Естественно, что при обнаружении таких режимов требуется отстроить спектр собственных частот колебаний системы от них, например, за счет целенаправленного изменения параметров динамической системы. В работах [2-5] установлено, что изменение спектра собственных частот колебаний при варьировании параметров динамической системы можно линеаризовать. В этих же работах содержится описание способа вычисления компонент массива чувствительности за счет применения т.н. "реперных" решений. Эти "реперные" решения соответствуют точным решениям задачи определения собственных колебаний, решаемой, например, при помощи метода конечных элементов [6]. Таким образом, получается достаточно точный инструмент оперативного анализа отклика спектра собственных частот колебаний на варьирование параметров исследуемых динамических систем.

В то же время информация о спектре собственных частот колебаний и его чувствительности к варьированию тех или иных параметров не совсем полно характеризует свойства как исходной, так и системы с проварьированными параметрами. Важное значение, в частности, имеет возбудимость той или иной собственной формы колебаний (СФК), которая определяется соотношением пространственно-временного распределения внешней нагрузки с той или иной формой колебаний. При этом важно, что существенное значение имеет информация и о собственной форме колебаний, и о ее изменение при варьировании тех или иных параметров. В то же время методы определения чувствительности собственных форм колебаний к изменению параметров динамических систем разработаны далеко не в той мере, чтобы оперативно и точно решать задачи анализа и синтеза динамических систем.

В связи с этим разработка методов анализа чувствительности собственных форм колебаний на изменение параметров динамических систем является актуальной и важной научной проблемой. Ее решение применительно к системам с несколькими степенями свободы составляет цель данной работы.

Постановка задачи. Исследуются динамические системы с несколькими степенями свободы. Они используются для моделирования многомассовых колебательных систем, а также – систем с распределенными параметрами, к которым применена процедура дискретизации (например, по методу конечных элементов [6]).

Исходная разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{x}} + \mathrm{Cx} = 0, \qquad (1)$$

где M, C – матрицы масс и жесткости исследуемой системы,

$\mathrm{x(t)}$ – массив переменных, объединяющих обобщенные координаты, однозначно описывающих исследуемую динамическую систему.

Собственные движения [1], удовлетворяющие системе уравнений (1):

$$\mathrm{x} = \lambda \sin \omega \mathrm{t}, \qquad (2)$$

где λ – некоторая собственная форма колебаний,

ω – собственная частота колебаний,

t – время.

Требуется определить степень изменения собственной частоты и собственной формы колебаний системы (1) при варьировании инерционно-жесткостных характеристик, т.е. компонент матриц M и C.

Метод анализа. С одной стороны, для определения λ, ω применимы соотношения [1]

$$(\mathrm{C} - \omega^2 \mathrm{M}) \cdot \lambda = 0; \quad \mathrm{Det}(\mathrm{C} - \omega^2 \mathrm{M}) = 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, для этих целей применима функция Рэлея [1]:

$$\mathrm{R}(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{N}) = \frac{\sum_{ij} c_{ij}\lambda_i\lambda_j}{\sum_{ij} m_{ij}\lambda_i\lambda_j} \to \min, \qquad (4)$$

где c_{ij}, m_{ij} – компоненты матриц C и M соответственно,

λ_i – компоненты собственных форм колебаний.

Условные минимумы функции Рэлея соответствуют квадратам собственных частот колебаний ω_S^2, а наборы параметров λ_S – тем значениям аргументов, которые доставляют $\min R$ (т.е. собственных форм колебаний, соответствующих частоте ω_S).

Таким образом, задачи (3) и (4) являются эквивалентными. Учитывая это, можно для анализа чувствительности ω_S, λ_S к изменению параметров системы на разных этапах использовать любую из этих формулировок.

При этом следует принимать во внимание, что свойства реальных динамических систем формируются из свойств конструктивов, образующих исследуемые машины, узлы, детали. Если при этом обозначить массив этих определяющих величин $p = \{p_q\}$ $(q = 1, \dots, N_p)$, то в соотношениях (1), (3), (4) компоненты матриц жесткостей и масс становятся зависимыми от p. В силу этого уравнение (4) приводится к условиям

$$\frac{\partial R(p,\lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \sum_i \lambda_i^2 = 1. \tag{5}$$

Если в пространстве компонент λ выделять независимый базис Λ размерности $(N-1)$ по соотношениям

$$\lambda = \lambda(\Lambda), \tag{6}$$

то условные экстремумы (5) соответствуют безусловным

$$\frac{\partial R(p,\Lambda)}{\partial \Lambda_m} = 0, \quad m = 1, \dots, (N-1). \tag{7}$$

При этом в условиях (7), начиная с первого глобального минимума, после каждого шага исключается очередной компонент Λ из условия ортогональности собственных форм колебаний всем предыдущим формам колебаний [1].

Тогда условия (7) можно привести к виду

$$\Phi(p,\Lambda) = 0, \tag{8}$$

где Φ – некоторая функциональная зависимость, в которую трансформируется левая часть (7).

Если рассматривать частный случай системы с двумя степенями свободы при одном варьируемом параметре, то собственные формы при учете условия нормировки определяется одним независимым параметром Λ.

Тогда, если исследуется поведение (8), кроме соответствующего нормального (базового) набора значения параметра p_0, еще и в некоторой окрестности точки p_0:

$$p = p_0 + \Delta p : p = p_0(1+\alpha), \; |\alpha_\varepsilon| << 1, \tag{9}$$

то, пренебрегая членами более высокого порядка малости, можно записать:

$$\Phi(p_0,\Lambda_0) + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right|_{p=p_0} \cdot \Delta p + \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda} \cdot \left.\frac{d\Lambda}{dp}\right|_{p=p_0} \cdot \Delta p \approx 0. \tag{10}$$

С учетом равенства $\Phi(p_0,\Lambda_0) = 0$ получаем

$$\frac{d\Lambda}{dp} \approx \left[-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right]_{p=p_0} = \delta. \tag{11}$$

Тогда, переходя к приращениям,

$$\Delta\Lambda \approx \delta \cdot \Delta p \approx \delta \cdot p_0 \cdot \alpha. \tag{12}$$

Из (12) следует приближенная линейная зависимость изменения компонент собственных форм от степени относительного применения параметра α.

Если в соотношении (12) перейти к конечно-разностным аппроксимациям для определения δ, то получаем:

$$\delta \approx \left[\frac{\Phi(p_0 + \alpha^* p_0) - \Phi(p_0)}{\alpha^* p_0} \Big/ \frac{\Lambda(p_0 + \alpha^* p_0) - \Lambda(p_0)}{\Phi(p_0 + \alpha^* p_0) - \Phi(p_0)} \right]. \tag{13}$$

Т.о., если в динамической системе производится варьирование некоторых инерционно-жесткостных параметров, то это приводит к изменению собственных частот и форм колебаний. При этом зависимость этого изменения от степени варьирования тех или иных параметров можно линеаризовать в окрестности номинальных значений этих параметров, в том числе с привлечением "реперных" решений для конечно-разностной аппроксимации величины чувствительности собственных частот и форм колебаний к такому варьированию. Такой подход применим к системам со многими степенями свободы.

Тестовые задачи. Рассмотрим тестовую задачу на примере системы с двумя степенями свободы x_1, x_2 (рис. 1).

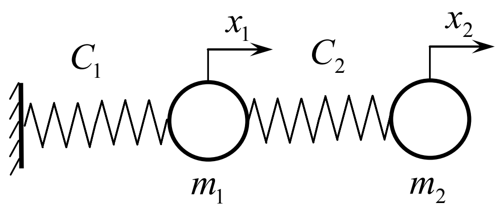

Рис. 1. Тестовая динамическая система

Будем использовать 2 способа.

Способ 1. Исходим из системы уравнений движения свободной системы

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Вводя обозначения $p_1^2 = c_1/m_1$, $p_2^2 = c_2/m_2$, $p_3^2 = c_2/m_1$, $p_4^2 = p_1^2 + p_2^2$, получаем для квадратов собственных частот выражение:

$$\omega_{1,2}^2 = \left[p_2^2 + p_4^2 \pm \sqrt{p_1^4 + 4p_2^2 p_3^2}\right]/2. \quad (15)$$

Если в исследуемой системе проварьировать только жесткость

$$C_2 = C_{20}(1-\alpha), \quad (16)$$

где α - некоторый коэффициент, то при малых $|\alpha| << 1$ с удержанием только линейных членов получаем:

$$\omega_{(1,2)}^2 \approx \left(\omega_{1,2}^0\right)^2 \left[1 + \Pi_{(1,2)}\alpha\right], \quad (17)$$

где $\Pi_{(1,2)}$ - некоторые коэффициенты чувствительности.

При этом, если собственные формы искать в частном виде

$$\lambda_1 = \{\lambda_{1,1} = 1;\ \lambda_{2,1}\}^T,\ \lambda_2 = \{\lambda_{2,1} = 1;\ \lambda_{2,2}\}^T, \quad (18)$$

получаем:

$$\lambda_{2,1} = \frac{p_2^2(\alpha)}{p_2^2(\alpha) - \omega_1^2(\alpha)},\ \lambda_{2,2} = \frac{p_2^2(\alpha)}{p_2^2(\alpha) - \omega_2^2(\alpha)}. \quad (19)$$

Линеаризация (19) по α дает:

$$\lambda_{2,1}(\alpha) = \lambda_{2,1}^0[1 + A_1\alpha],\ \lambda_{2,2}(\alpha) = \lambda_{2,2}^0[1 + A_2\alpha], \quad (20)$$

где $A_{(1,2)}$ - коэффициенты чувствительности.

Для определения коэффициентов чувствительности Π, A можно провести аналитические преобразования (15) и (19), а можно применить конечно-разностные соотношения:

$$\Pi_{(1,2)} \approx \left[\omega_{(1,2)}^2(\alpha^*) - \left(\omega_{(1,2)}^0\right)^2\right]/\alpha^*, \quad (21)$$

$$\mathrm{A}_{(1,2)} \approx \left[\lambda_{2,(1,2)}(\alpha^*) - \lambda_{2,(1,2)}^0\right]/\alpha^*. \quad (22)$$

В (21), (22) присутствуют точные значения собственных частот и форм колебаний, вычисляемые при варьировании параметра C_2 по (16) на величину α^* по соотношениям (15), (19).

Т.о., с помощью этих "реперных" решений можно определить чувствительности A и Π. Для систем с большим количеством степеней свободы можно применить не аналитические, а численные методы вычисления собственных частот и собственных форм колебаний, соответствующих изменению C_2, задаваемом α^*.

Естественно, что все описанные подходы применимы и для варьирования любых иных параметров исследуемых систем (т.е. компонентов матриц M и C).

Т.о., получаем возможность прогнозирования изменения собственных частот и собственных форм колебаний, основываясь на конечно-разностной аппроксимации их чувствительности к варьированию инерционно-жесткостных характеристик исследуемой динамической системы посредством использования точных, так называемых "реперных" решений, соответствующих некоторым заранее задаваемым степеням изменения варьируемых параметров.

Способ 2. Основывается на использовании функции Рэлея. Вводя в рассмотрение базисную переменную φ, определяющую угловые положения точки на единичной окружности в системе координат (x_1, λ_2):

$$\lambda_1 = \cos\varphi,\ \lambda_2 = \sin\varphi, \quad (23)$$

в данном конкретном случае выражение (4) можно привести к виду:

$$R(\varphi) = \frac{C_1\cos^2\varphi + C_2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{m_1\cos^2\varphi + m_2\sin^2\varphi}. \quad (24)$$

Условие экстремальности:

$$R'(p,\varphi) = 0 \quad (25)$$

дает два значения угла φ в интервале $[0,\pi[$, соответствующих двум собственным частотам и собственным формам колебаний.

Соотношение (25) можно трактовать как параметрическую зависимость переменной φ от параметров p:

$$\frac{\partial R}{\partial\alpha} \approx \frac{R(\alpha^*) - R(0)}{\alpha^*};\ \varphi = \varphi(p) = \varphi(p_0(1+\alpha^*)) \Rightarrow$$

$$B = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \approx \frac{\varphi(\alpha^*) - \varphi(0)}{\alpha^*}. \quad (26)$$

Т.о., в (26) можно для вычисления чувствительности φ к варьированию p (или α) применить тот же подход с использованием "реперных" решений $\varphi(\alpha^*)$. Однако здесь они будут вычисляться как аргумент из условия достижения экстремума (25). Тогда

$$\varphi(\alpha) \approx \varphi_0(1 + B\alpha);\ \omega_{(\alpha)}^2 = R(\alpha) \approx \omega_0^2(1 + \Gamma\cdot\alpha). \quad (27)$$

где Γ – некоторый коэффициент чувствительности ω^2 к изменению α.

В результате получаем аналогичные линеаризованные соотношения, что и для способа 1. Для полного соответствия со способом 1 собственные формы колебаний можно брать в виде:

$$\lambda = \{1;\ tg\varphi\}^T. \quad (28)$$

Численные иллюстрации. Предложенные в работе подходы и модели реализованы в виде некоторого кода в среде Maple. На рис. 2, 3 представлены характерные графики для собственных частот колебаний и собственных форм колебаний для системы с параметрами: $m_1 = 1$ кг, $C_1 = 1000$ $H/м$.

При этом варьировалась масса m_2 в пределах $\pm 30\%$, т.е. $\alpha^* = 0.3$. Результаты получены по способу 1.

На рис. 4 - 6 представлены данные для той же модели, но с применением способа 2.

Видно, что полученные соотношения, как по способу 1, так и по способу 2, соответствуют друг

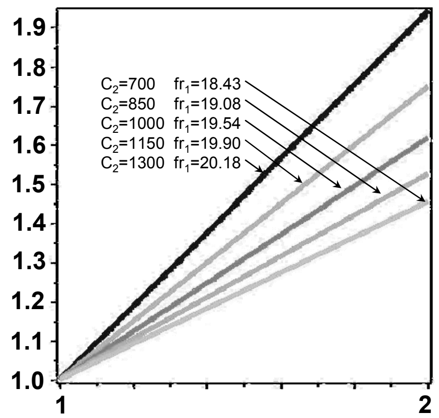

Рис. 2 Графики изменения первой собственной формы от параметра α до 0.3

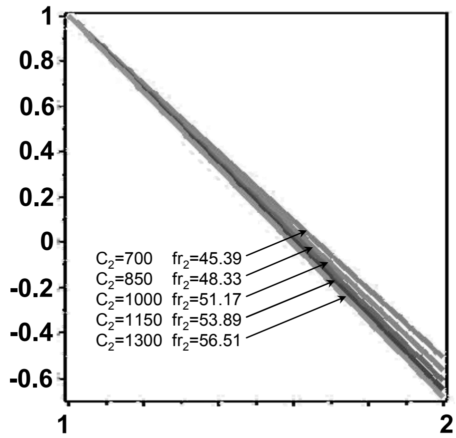

Рис. 3 Графики изменения второй собственной формы от параметра α до 0.3

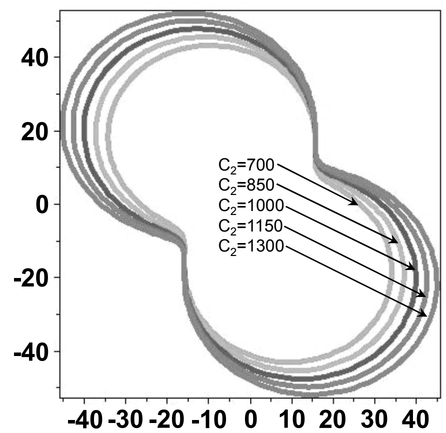

Рис. 4 Графики функции Релея в параметрическом пространстве при варьировании параметра α до 0.3

другу. Более того, сравнением получаемых аппроксимационных (линейных) зависимостей с точными кривыми (рис. 7) дает основание для вывода о применимости линейной аппроксимации поверхностей отклика (собственных частот и собственных форм колебаний) в довольно большом интервале изменения параметров p, т.е. не только при $|\alpha| << 1$, но и при малых, но конечных их значени

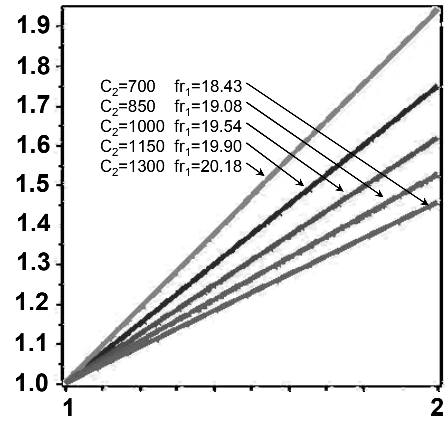

Рис. 5 Графики изменения первой собственной формы от параметра α до 0.3

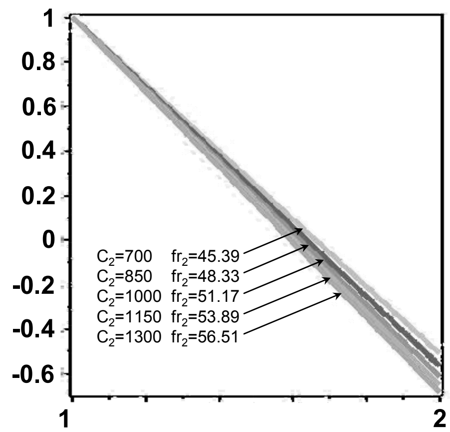

Рис. 6 Графики изменения второй собственной формы от параметра α до 0.3

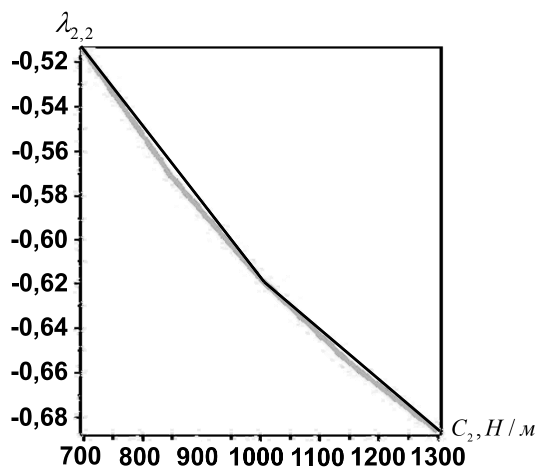

Рис. 7. - Сравнение аппроксимационной линеаризованной зависимости второй компоненты собственной формы колебаний системы (см. рис. 1) с точной кривой (для второй формы колебаний)

ях (в данном случае - до $|\alpha| \approx 0.3$).

Примечание. Аналогичные по характеру результаты получаются и для систем с большим, чем 2, количеством степеней свободы. Здесь получаем из (8) путем дифференцирования и перехода затем к приращениям

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial p}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial p}, \qquad (29)$$

где $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda}\right)^{-1}$ представляет собой оператор, обратный к оператору $\frac{\partial P}{\partial\Lambda}$.

Тогда, вводя в рассмотрение массив "реперных" точек

$$\alpha_j^{\wedge}=\{0;0;...0;\alpha_j^*;0;...0\}^T, \qquad (30)$$

приращения параметров $\Delta\Lambda_i$ можно представить в виде

$$\Delta\Lambda_i\approx\sum_j B_{ij}\alpha_j;\; B_{ij}=\frac{\Lambda_i^{\sim}(\alpha_j^*)-\Lambda_i^{\sim}(0)}{\alpha_j^*}. \qquad (31)$$

Здесь $\Lambda^{\sim}(\alpha_j^*)$ - точные ("реперные") решения (3) или (4), полученные каким-либо способом.

Важно отметить, что линеаризованные зависимости (31) нужно формировать с учетом знаков приращения того или иного параметра (т.е. для положительных α_j применять положительные приращения α_j^*, и наоборот). В итоге функция отклика линеаризуется, т.е.

$$\Lambda(P_0+\Delta P)\approx\Lambda_0(0)+B\cdot\alpha, \qquad (32)$$

где B - матрицы коэффициентов чувствительности B_{ij}.

Кусочно-линейное представление (32) может быть применимо как для задач параметрического анализа, так и синтеза. При этом сочетаются требования сохранения приемлемой точности и высокой оперативности, что особенно важно для сложных собственных колебаний сложных механических систем.

Заключение. В работе предложен подход к линейной аппроксимации динамических характеристик (собственных частот и собственных форм колебаний) систем с несколькими степенями свободы на изменение их инерционно-жесткостных параметров. Показана применимость подходов, основанных на использовании точных решений при конечном варьировании инерционно-жесткостных параметров (т.н. "реперных" решений), для прогнозирования изменения и собственных частот, и собственных форм колебаний. Т.о., в дальнейшем данные аппроксимации можно применять для решения задач синтеза, поскольку, таким образом, функция отклика в некоторой окрестности номинального набора параметров линеаризуется, и при наличии линейных (или линеаризованных) ограничений (например, по массе) получаем задачу линейного программирования взамен исходной задачи нелинейного программирования.

Список литературы: 1. *Бабаков И. М.* Теория колебаний: учеб. Пособие / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с. **2.** *Танченко А. Ю.* Связанная задача утонения и напряженно-деформированного состояния шарнирно опертого стержня / А. Ю. Танченко // Вісник Національного технічного університету ”Харківський політехнічний інститут”. – Харків : НТУ ”ХПІ”, 2010. – № 38. – С. 140-151.
3. *Танченко А. Ю.* Напряженно-деформированное состояние пространственных тонкостенных конструкций с учетом утонения стенок несущих элементов / А. Ю. Танченко, Н. А. Ткачук, Ю. Б. Гусев // Вісник СевНТУ: Механіка, енергетика, екологія: зб. наук. праць. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – Вип. 120. – С.35-40. **4.** *Танченко А. Ю.* Анализ чувствительности прочностных и динамических характеристик машиностроительных конструкций на основе прямого возмущения конечно-элементных моделей / Н. А. Ткачук, А. Ю. Танченко, А. Н. Ткачук, П. В.Чурбанов, И. Я. Храмцова, О. А. Ищенко // Вісник Національного технічного університету ”Харківський політехнічний інститут”. – Харків : НТУ ”ХПІ”, 2012. – №22. – С. 147-169. **5.** *Танченко А. Ю.* Влияние толщины панелей на спектр собственных частот колебаний корпусов транспортных средств специального назначения / А. Ю. Танченко // Вісник Національного технічного університету ”Харківський політехнічний інститут”. – Харків : НТУ ”ХПІ”, 2013. – №23. – С. 138-145. **6.** *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

Bibliography (transliterated): 1. *Babakov I. M.* Teoriya kolebaniy: ucheb. Posobie / *I. M. Babakov*. – Moscow: Drofa, 2004. – 591 p. **2.** *Tanchenko A. Yu.* Svyazannaya zadacha utoneniya i napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sharnirno opertogo sterzhnya / *A. Yu. Tanchenko* // Visnik Natsionalnogo tehnichnogo universitetu ”Harkivskiy politehnichniy Institut”. – Kharkiv : NTU ”KhPI”, 2010. – No 38. – P. 140-151. **3.** *Tanchenko A. Yu.* Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie prostranstvennyih tonkostennyih konstruktsiy s uchetom utoneniya stenok nesuschih elementov / *A. Yu. Tanchenko, N. A. Tkachuk, Yu. B. Gusev* // Visnik SevNTU: Mehanika, energetika, ekologiya: zb. nauk. prats. – Sevastopol: SevNTU, 2011. – No 120. – P. 35-40. **4.** *Tanchenko A.Yu.* Analiz chuvstvitelnosti prochnostnyih i dinamicheskih harakteristik mashinostroitelnyih konstruktsiy na osnove pryamogo vozmuscheniya konechno-elementnyih modeley / *N. A. Tkachuk, A. Yu. Tanchenko, A. N. Tkachuk, P. V. Churbanov, I. Ya. Hramtsova, O. A. Ischenko* // Visnik Natsionalnogo tehnichnogo universitetu ”Harkivskiy politehnichniy Institut”. – Kharkiv : NTU ”KhPI”, 2012. – No22. – P. 147-169. **5.** *Tanchenko A. Yu.* Vliyanie tolschinyi paneley na spektr sobstvennyih chastot kolebaniy korpusov transportnyih sredstv spetsialnogo naznacheniya / *A. Yu. Tanchenko* // Visnik Natsionalnogo tehnichnogo universitetu ”Kharkivskiy politehnichniy Institut”. – Kharkiv : NTU ”KhPI”, 2013. – No23. – P. 138-145. **6.** *Zinkevich O.* Metod konechnyih elementov v tehnike / *O. Zinkevich*. – Moscow: Mir, 1975. – 541 p.

Поступила (received) 10.08.2015 г.