

Н.Д. ОРЛОВА, канд. техн. наук,
Одесская национальная морская академия

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ В ТЕОРИИ ВИБРАЦИОННОГО УПЛОТНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Розглянуто різні системні підходи до вивчення процесів вібраційного ущільнення матеріалу. Весь процес ущільнення матеріалу формалізований як складна фізико-механічна система. Приведено результати досліджень на оптимізацію параметрів математичної моделі для вібраційного ущільнення матеріалу.

Various approaches to the mathematical description of the compressed powder material have been examined in the article. The results of the investigation of optimal parameters to the mathematical description for the compressed powder material.

Вступление.

Уплотнение смеси состоит в укладке твердых частиц, при которой объём, не занятый твердыми частицами является наименьшим и неизменным в течение длительного промежутка времени. Механизм уплотнения, состоящий из двух фаз, является общепризнанным [3, 4, 5, 6, 7, 8] и имеются лишь различия в толковании процессов, происходящих в каждой фазе. Механизм уплотнения по Е.М. Куприянову [5] и Л.Лермиту [3] состоит в обеспечении вихрей и турбулентного движения в смеси, В.Н. Шмигальский [6] и Д.Д. Баркан [7] считают главными деформационные процессы. Процесс уплотнения по П.В.Михайлову [8] состоит из двух фаз: разрушение структурных связей и самоуплотнение. Механизм уплотнения по О.А. Савинову и Е.В. Лавринович [8, 9] состоит из трех стадий: перегруппировки составляющих, их сближения и компрессионного уплотнения. При вибрационном уплотнении возможны только первые две стадии, которые по содержанию совпадают с соответствующими фазами по Н.В. Михайлову [8].

Встречается уплотнение естественное и принудительное. Процесс естественного уплотнения представляется так: случайные внешние воздействия нарушают равновесие между силами трения, сцепления и весом частиц. Если на некотором временном промежутке сила веса частиц оказывается больше сил трения и сцепления и под действием собственного веса частицы приходят в движение, происходит перегруппировка расположения частиц в более

компактную, объем смеси уменьшается и смесь уплотняет. Аналогично осуществляется и искусственное уплотнение, только в этом случае случайные внешние воздействия заменяются целенаправленными воздействиями для снятия сил трения и сцепления.

Основная часть.

Механизм вибрационного уплотнения. Рассмотрим физическую и математическую модель совместного движения вибратора и смеси. Ввиду сложности такой общей задачи приходится пользоваться упрощенными моделями как физическими, так и математическими. Наиболее общая модель: вибратор – система двух тел (корпус и вал вибратора), смесь – система материальных точек (тел), помещенных в некоторую непрерывную среду. При этом точки системы - это всевозможные составляющие смеси, а среда – реологическое тело, наделенное определенными свойствами. В большинстве задачи же по уплотнению смеси наибольший интерес, представляет именно рассмотрение совместного движения смеси и вибратора. Смесь рассматривают либо как систему физических материальных точек, внутренние силы которой известны (в [4] это силы сухого трения между частицами), либо как идеальное, изотропное, однородное упругое тело [6] либо вязко-упруго-пластическое тело [7, 8, 1]).

Рассмотрим одну из физических моделей принудительного вибрационного уплотнения смесей. Математическая модель процесса уплотнения содержит дифференциальные виброуплотняющих устройств и смеси. В этом случае вибрационная площадка представлена в виде физической материальной точки, на которую действуют упругие и вязкие силы, силы инерции, возмущающая сила и сила веса:

$$(m_p + m_c)\ddot{y} + 6\pi r \eta \dot{y} + cy = F + (m_p + m_c)g$$

где $(m_p + m_c)$ – масса площадки и смеси; η – вязкость смеси, которая является функцией начальной и конечной вязкости (η_0, η_m) смеси; $F + (m_p + m_c)g$ – возмущающая сила и сила веса; r радиус шара, объем которого равен объёму смеси; c – суммарная жесткость упругих опор виброплощадки и смеси.

В безразмерных величинах такая математическая модель может быть представлена в виде [7,1]

$$y'' + 2ny' + k^2 y = u(t)$$

Рекомендации по выбору режима уплотнения в этом случае рассматриваются как одна из задач математического моделирования. Системой в этом случае выступает уплотняемая смесь и вибрационное устройство. Начальная пористость (характеристика смеси) и начальная частота, и амплитуда вибрационной площадки входные характеристики системы. Расчетный процесс время уплотнения. Состояние – истинные характеристики бетонной смеси в процессе уплотнения. Цель управления получить минимальную пористость исходной структуры P_∞ .

Следовательно, требуется найти максимум функционала:

$$\frac{1}{2T} \int_0^T \dot{u}^2(t) dt \rightarrow \max$$

при условиях $y'' + 2ny' + k^2 y = u(t)$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $y(\infty) = y'(\infty) = 0$.

В данном случае объектом управления является система материальных точек (уплотняемая смесь), $y(t)$ - фазовая координата, $u(t)$ управление, при котором кинетическая энергия вибрационной площадки достигала бы максимума за минимальное время T .

Таким образом, имеем задачу на условный экстремум функционала при дифференциальных связях.

Запишем уравнение связи в виде:

$$y'' + 2ny' + k^2 y - u(t) = 0.$$

Построим функцию Лагранжа $L(t) = \dot{u}^2 + \lambda(t)(y'' + 2ny' + k^2 y - u(t))$ и составим уравнения Эйлера-Пуассона для двух неизвестных функций $u(t)$, $y(t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial y''} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0$$

Вычисляя, соответствующие производные и присоединяя к ним уравнения связи, получим:

$$\lambda''(t) - 2n\lambda'(t) + k^2\lambda(t) = 0 \quad (1)$$

$$2\ddot{u} = -\lambda(t) \quad (2)$$

$$y'' + 2ny' + k^2y - u(t) = 0 \quad (3)$$

Определим функцию $\lambda(t)$ из дифференциального уравнения (1), рассмотрев два случая:

1. Равнодействующая сил, осуществляющих уплотнение, меньше сил препятствующих уплотнению $n > k$ (случай большого сопротивления, смесь не уплотняется) решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$\lambda(t) = c_1 e^{(n+\sqrt{n^2-k^2})t} + c_2 e^{(n-\sqrt{n^2-k^2})t}$$

и при подстановки его в уравнения (2) и (3) получаем, что экстремума у заданного функционала не существует;

2. Равнодействующая сил, осуществляющих уплотнение больше сил препятствующих уплотнению $n < k$ (упругие характеристики смеси больше характеристик вязкости, случай малого сопротивления и уплотнения смеси).

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$\lambda(t) = Ae^{nt} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $A = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}$, $\varphi_0 = \arctg \frac{c_3}{c_4}$, $c_3, c_4 - const$, $\omega^2 = k^2 - n^2$.

Из уравнения (2) находим управление $u(t)$:

$$u(t) = -\frac{A}{2k^2} \sin(\omega t + \psi_1) + \frac{At}{2} \sin(\varphi_0 - \psi) + \frac{A}{2k^2} \sin \psi_1 \quad (4)$$

где $\psi = \arctg \frac{\omega}{n}$; $\psi_1 = \varphi_0 - \arctg \frac{2n\omega}{n^2 - \omega^2}$;

Таким образом, оптимальное управление $u(t)$ будет носить периодический характер, начиная с момента времени:

$$t_0 = \frac{\sin \psi_1}{k^2 \sin(\psi - \varphi_0)}$$

Выводы.

Анализ теоретических результатов исследования на экстремум функционала подтверждает известный экспериментальный факт, что для уменьшения времени уплотнения смеси возмущающее воздействие должно носить периодический характер.

Минимальное время уплотнения смеси T можно определить из уравнения:

$$\int_0^T \dot{u}^2(t) dt = 2T$$

при управление $u(t)$ определенным формулой (4).

Предложенная математическая модель процесса вибрационного уплотнения материалов позволяет найти структуру и параметры оптимального управления уплотнения материалов.

Список литературы: 1. Овчинников П.Ф., Орлова Н.Д. Влияние характера движения на укладку шаров во вращающейся емкости // Доклады АН УССР. – 1979. – Серия А, № 1. – С. 31 – 36. 2. Б.Г. Скрамтаев, П.Ф. Шубенкин, Ю.М.Баженов. Способы определения состава бетона различных видов. – М.: Строительство, 1966. – 109 с. 3. Л. Лермит. Проблемы технологии бетона. – М.: Стройиздат, 1959. – 165 с. 4. П.М. Миклошевский. Вибрирование бетонной смеси. – Волгостройиздат, 1937. – 127 с. 5. Е.М. Куприянов Уплотнение насыпных грунтов. – М.: Стройиздат, 1966. – 175 с. 6. В.Н. Шмигальский Проблемы интенсификации повышения качества виброуплотнения бетонных смесей: Автореф. Докт ... дис. – Новосибирск, 1968. – 350 с. 7. Д.Д. Баркан. Виброметод в строительстве. – М.: Стройиздат, 1966. – 194 с. 8. Н.В. Михайлов. Основные принципы новой технологии бетона и железобетона. – М., Госстройиздат, 1961. – 208 с. 9. Овчинников П.Ф., Верещагин В.Н., Орлова Н.Д. Расчет основных конструктивных параметров вибратора с переменным амплитудно-частотным режимом вибрирования. // Вибротехника. – 1973. – № 3(20). – С. 123 – 129. 10. Овчинников П.Ф., Кропивянский П.С., Орлова Н.Д. Реология виброуплотнения смеси выбор параметров её уплотнения. // ИВУЗ. Строительство и архитектура. – 1976. – № 9. – С. 103 – 107.

Поступила в редколлегию 16.10.08.