

С.В. СОРОКІНА, канд. техн. наук, **Н.О. ЖИЛЮК**,
О.О. ЯЦУЦЕНКО, студентка-магістр, ХДУХТ, м. Харків

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕЦЕПТУРНОГО СКЛАДУ СИРНИХ ВИРОБІВ

Розроблена математична модель оптимізації для створення рецептурного складу сирних виробів. У результаті представлених розрахунків по математичній моделі оптимізації складу сирних виробів та комплексу проведених досліджень були встановлені концентрації рецептурних компонентів для сирних виробів з біологічно активною добавкою з моркви.

The mathematical model of optimization is developed for creation of compounding composition of cheeses wares. As a result of the represented calculations on the mathematical model of optimization of composition of cheeses wares and complex of the conducted researches there were the set concentrations of compounding components for cheeses wares with biologically active addition from a carrot.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Одним з напрямків створення продуктів харчування повинно бути забезпечення їхньої високої якості. У даний час все більшого поширення набуває концепція – теорія адекватного харчування. Згідно якої харчові продукти повинні бути адекватні традиційним за органолептичними показниками і структурними формами поживних речовин і харчових волокон; масові частки компонентів цих продуктів підібрані таким чином, що при включенні в раціон харчування забезпечують підтримку умовно оптимального й енергетичного балансу організму споживачів.

Продукти із молока, а також продукти із плодів та овочів користуються великою популярністю у всьому світі. Однак молочні продукти містять мало вітамінів (особливо антиоксидантного ряду – це вітамін С, В-каротин, а-токоферол), мало природних антиоксидантів, геропротекторів таких як низькомолекулярні фенольні сполуки (катехіни, флавонові глікозиди, антоціани та ін.), терпеноїди. А ці речовини містяться у рослинній сировині, зокрема, у овочах [1 – 3]. Тому ідея створення комбінованих молочних продуктів з різними рослинними добавками з високим вмістом речовин для імунопрофілактики населення і зміцнення здоров'я є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема формування виробничого асортименту широко освітлена в публікаціях вітчизняних дослідни-

ків. За підсумками такого аналізу можна зробити висновок, що внутріфірмове планування асортименту сьогодні припускає розробку управлінських рішень за двома взаємообумовлюючими напрямками [4 – 6].

До першого можливо віднести усі ті плановані дії, які у тій або іншій ступені пов'язані з обліком виробничих потужностей вітчизняного виробника молочної продукції.

До другого – визначення різного роду детермінант споживчого попиту на молочну продукцію.

У зв'язку з тим, що до недавнього часу відомі методи проектування рецептур спиралися на емпіричну основу в багатьох випадках подібний підхід був виправданий, оскільки дозволяв випускати продукти достатньо високої харчової цінності. Але, якщо спиратися лише на інтуїцію, практично неможливо створити композиції, які на максимальному ступеню відповідали би потребі організму в енергетичному та пластичному біоматеріалах. При цьому значні зміни умов праці і побуту населення вносять у цю проблему якісно нові аспекти, на фоні яких інтуїтивний спосіб обґрунтування рецептурного складу адекватних харчових композицій виявляється безперспективним.

Все це, свідчить про те, що існує об'єктивна необхідність в більш коректному підході до проектування харчових продуктів, виходячи з нових уявлень про харчування. Сучасні погляди на харчові продукти можуть отримати розвиток лише на базі розробки навчально-теоретичних основ створення математичних моделей складу і якості продуктів з метою управління процесами їх формування на різних етапах їх життєвого циклу [7].

Таким чином, є цілком переконливі підстави вважати, що оптимізація структури харчування населення та приведення її у відповідність з фізіологічними потребами сучасного споживача не можуть бути досягнуті без залучення аналітичних підходів до проектування рецептурного складу харчових продуктів.

Мета та завдання статті. Метою роботи була розробка математичної моделі оптимізації створення рецептурного складу сирних виробів. Для проведення математичного модулювання складу і якості сирних виробів було обране наступне.

По-перше – набір харчових інгредієнтів, які є основою для створення сирних виробів (кожний харчовий інгредієнт має відомий вміст білків, жирів, вуглеводів і мінеральних елементів).

По-друге – потрібні органолептичні показники якості готових сирних

виробів (консистенція однорідна, ніжна, пастоподібна; смак солодкий з при-
смаком наповнювача і ваніліну; запах молочний; колір білий з кремовим від-
тінком).

Крім цього, розроблені сирні вироби повинні бути максимально збалан-
совані за вмістом поживних речовин, а сума мас інгредієнтів повинна відпо-
відати потрібній масі готового продукту (складати 100 грамів для даного за-
вдання).

Виклад основного матеріалу досліджень. Математична модель задачі
оптимізації в загальному вигляді являє собою три основних елементи: цільо-
ва функція, обмеження та граничні умови. Цільова функція показує, у якому
змісті рішення повинне бути найкращим, обмеження показують залежності
між значеннями шуканих перемінних, граничні умови відбивають гранично
допустимі значення перемінних. Записується математична модель оптиміза-
ційної задачі в наступній формі:

$$F = f(\bar{x}) \rightarrow \max(\min)$$

$$g_i(x_j) = 0$$

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}$$

$$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

де $f(x)$ – цільова функція; x – вектор змінних величин: $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
 m – число обмежень; n – число перемінних; g_i – функції залежностей між
шуканими перемінними; x_j^{\min}, x_j^{\max} – константи.

У даній задачі в якості перемінних моделі виступають маси інгредієнтів,
що складають харчову суміш: x_1 – сир з коров'ячого молока, x_2 – масло се-
лянське, x_3 – цукор, x_4 – овочевий наповнювач, x_5 – ванілін. Граничними
умовами є вимоги по органолептичним показникам, які залежать від вмісту у
суміші лише одного інгредієнту. Обмеженнями виступають вимоги по орга-
нолептичним показникам, на які впливає декілька інгредієнтів комплексно.

$$10,0 \leq X_1 \leq 20,0 \text{ (колір за вмістом масла)}$$

$$4,0 \leq X_2 \leq 5,0 \text{ (смак за вмістом цукру)}$$

$$0,4 \leq X_3 \leq 0,5 \text{ (смак за вмістом овочевого наповнювача)}$$

$$40 \leq X_4 \leq 50 \text{ (консистенція за вмістом сиру)}$$

$$23 \leq (11,5 X_1 + 99,86 X_2 + 92,0 X_4) \leq 35$$

$$X_1 + X_2 + X_4 = 100$$

Мета даної задачі – прагнення досягти балансу визначення харчових речовин суміші (тобто вміст нутрієнтів повинний наближатися до норми. Векторна оптимізація являє собою справу знайти деякий компроміс між тими параметрами, за якими потрібно оптимізувати рішення. По кожній харчовій речовині, яка нас цікавить, необхідно мінімізувати квадрат відносного відхилення від еталона:

$$\frac{B_j - E_j}{E_j}$$

де B_j – показник фактичного вмісту в суміші j -ї харчової речовини; E_j – показник еталонного вмісту в суміші j -ї харчової речовини.

Оскільки важливе не абсолютне значення того чи іншого показника, а їхнє співвідношення в суміші, то перед порівнянням проєктованої рецептури й еталона відповідні показники нормуються. Таким чином, нормований показник фактичного вмісту j -ї харчової речовини в суміші щодо вмісту в ній усіх харчових речовин:

$$B_j = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i}$$

де a_{ij} – значення j -го показника в i -м компоненті.

Математична постановка задачі оптимізації харчових сумішей, таким чином, має вид:

$$F = \sum_{j=1}^m \left(\frac{B_j - E_j}{E_j} \right)^2 \rightarrow \max$$

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \right) - 100 = 0$$

$$a \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{100 - W_j}{100} x_j \right) \leq b$$

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = \overline{1, n}$$

$$B_j = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i}, \quad E_j = \frac{l_j}{\sum_{j=1}^m l_j}, \quad j = \overline{1, m}$$

де W_j – процентний вміст води в i -му інгредієнті; a, b – межі вмісту сухих речовин у суміші (вимоги до консистенції); x_j^{\min}, x_j^{\max} – межі зміни мас інгредієнтів (вимоги до смаку, консистенції та кольору); l_j – еталонний вміст j -ї харчової речовини на 1000 ккал суміші; a_{ij} – вміст j -ї харчової речовини в i -му інгредієнті; n – кількість інгредієнтів суміші; m – кількість розглянутих харчових речовин.

У такій постановці маємо задачу умовної (тому що присутні обмеження) нелінійної (тому що функція нелінійна) оптимізації з нелінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями і граничними умовами. Таким чином, після нескладних математичних операцій, які було проведено відповідно до вище зазначених, загальна цільова функція приймає наступний вид:

$$\begin{aligned} Z_{\text{загальна}} = & (0,14 X1 - V1 \times 3,4)^2 + (0,028 X1 - V1 \times 5,1)^2 + (0,041 X1 + 0,002 \\ & X2 + 0,001 X3 - V1 \times 1,785)^2 + (1,12 X1 + 0,01 X2 + 0,003 X3 - V1 \times 1,3385)^2 + \\ & (1,5 X1 + 0,025 X2 + 0,002 X3 - V1 \times 0,321)^2 + (0,023 X1 + 0,003 X2 - \\ & V1 \times 0,1425)^2 + (2,16 X1 + 1 X2 - V1 \times 0,446)^2 + (0,005 X1 + 0,003 X2 + \\ & 0,003 X3 - V1 \times 0,0053)^2 + (0,0006 X1 + 0,0001 X2 - V1 \times 0,0018)^2 + \\ & (0,0005 X1 + 0,0002 X2 - V1 \times 0,0007)^2 + (0,003 X1 + 0,002 X2 - V1 \times 0,0008)^2 \\ & + (0,003 X1 + 0,001 X2 - V1 \times 0,006)^2 + (0,005 X1 + 0,003 X2 - V1 \times 0,02)^2, \end{aligned}$$

де $V1 = (0,632 X1 + 0,468 X2 + 0,121 X3) / 1000$.

Оскільки нормативні значення задані із розрахунку на 1000 ккал, для складання загальної мети необхідно перерахувати норму із розрахунку на фактичне число ккал.

Для даного вектору x число ккал дорівнює:

$$0,632 X_1 + 0,468 X_2 + 0,121 X_3.$$

Позначимо відношення V_1 наступним чином:

$$V_1 = (0,632 X_1 + 0,468 X_2 + 0,121 X_3) / 1000.$$

Тоді для сирних виробів:

$$Z_{\text{додаток}} = V_1 \times K_j$$

де: K_j – нормативне значення j -го критерію.

Звичайно наближене рішення задачі нелінійного програмування шукають за допомогою релаксаційного процесу.

Релаксаційний процес – це процес побудови послідовних наближень M_1, M_2, \dots, M_K , таких, що $M_k \in \Omega (k=1, 2, \dots, K)$ і $f(M_{k+1}) > f(M_k)$. При цьому релаксаційний процес називається таким, що сходиться, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} f(M_k) = f(M_0)$.

Релаксаційний процес, що сходиться, дозволяє знайти наближене рішення задачі нелінійного програмування з будь-якою заданою точністю.

Ідеал пошуку екстремуму полягає в наступному:

1. задати початкову крапку x_j , $j = \overline{1, n}$;
2. у заданій крапці x_j визначити напрямок руху на першому кроці β_1 ;
3. прийняти величину кроку t_1 ;
4. визначити координати кінця першого кроку x_{j1} ;
5. обчислити значення ознаки екстремуму на першому кроці;
6. перевірити виконання ознаки екстремуму.

Питання визначення напрямку і довжини кроку є винятково значимим, оскільки саме він визначає точність отриманих результатів і швидкість збіжності, тобто число ітерацій, за котре буде досягнутий екстремум.

Чим вище порядок методів, тим більше обчислень на кожній ітерації, але тим менше потрібно ітерацій. І, природно, навпаки. Вибір методу рішення

отриманих математичних рівнянь роблять у залежності від задачі і рівня дослідження, від типу нелінійності.

При рішенні даної задачі був обраний метод Ньютона, у якому використовуються другі похідні, що вимагає великих обчислень на кожній ітерації, але оптимальне рішення знаходиться за менше число ітерацій, ніж у градієнтних методах, у яких використовуються перші похідні. Рішення реалізовано за допомогою мови програмування Паскаль 7.1.

У результаті представлених розрахунків по математичній моделі оптимізації складу сирних виробів та комплексу проведених досліджень були встановлені концентрації рецептурних компонентів для сирних виробів:

- сир з коров'ячого молока – 61 ... 65 %;
- вершки – 11 ... 14 %;
- цукор – 10 ... 12 %;
- ванілін – 0,004 ... 0,006 %;
- овочевий наповнювач – 18 ... 20 %.

Висновки.

З проведених досліджень можемо зробити висновок, що є цілком переконливі підстави вважати, що оптимізація структури харчування населення і приведення її у відповідності з фізіологічними потребами сучасного споживача не можуть бути досягнуті без залучення аналітичних підходів до проектування рецептурного складу харчових продуктів.

Список літератури: 1. *Степанова Л.И.* Справочник технолога молочного производства. Технологии и рецептуры: В 3 т. Цельномолочные продукты / *Л.И. Степанова.* – СПб.: ГИОРД, 1999. – Т. 1. – 503 с. 2. *Маршалл К.Р.* Тенденции развития технологии в молочной промышленности / *К.Р. Маршалл, Р.М. Фонвик* // Молочная промышленность. – 2000. – № 2. – С. 14. 3. *Покровский А.А.* Химический состав пищевых продуктов / *А.А. Покровский.* – М.: Пищевая промышленность. – 1977. – 200 с. 4. *Фирсанов О.В.* Планирование ассортимента молочной продукции на основе изучения взаимосвязей потребителя и производителя / *О.В. Фирсанов, Э.Г. Жукова.* // Молочная промышленность. – 2002. – № 6. – С. 18 – 23. 5. *Лисицын А.Б.* Формализация представлений о пищевой адекватности сырья и готовых изделий / *А.Б. Лисицын, Н.Н. Липатов, И.И. Косырев.*: Тез. докл. IV Межд. Симпозиума «Экология человека: пищевые технологии и продукты». – 1995. – С. 201 – 204. 6. *Barbieri Mendez J.A.* Modelaje matematiko para la prediction de nutrientes en el procesamiento termico de alimentos: ura revision / *J.A. Barbieri Mendez.* // Rev. Latinoamer. Franst. Col. Mat. – 2003. – Vol. 7, № 1. – P. 3 – 14. 7. *McDougall D.B.* Mathematical Modeling in Meat Processing / *D.B. McDougall, R.A. Allen.* – N.-Y. – 2004. – P. 298 – 300.

Надійшла до редколегії 21.04.09