УДК 658.51.012

Диффузионное описание производственного процесса

О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье основное внимание уделяется построению стохастического уравнения для расчета производственного цикла изготовления партии изделий на предприятиях с поточным типом организации производства. В качестве базового подхода рассмотрен процесс движения предметов труда по синхронизованной поточной линии. Выполнена оценка размеров межоперационных заделов технологических операций, обеспечивающая бесперебойный режим функционирования поточной линии. Записано в канонической форме стохастическое уравнение и получено определение коэффициента диффузии.

Ключевые слова: *Поточная линия, стохастическое уравнение, PDE-модель, предмет труда, технологический процесс, полупроводниковое производство, межоперационные запасы, уравнение Ито, диффузионное приближение, коэффициент диффузии, производственный цикл, основное время обработки*

У статті основну увагу приділяється побудові стохастичного рівняння для розрахунку виробничого циклу виготовлення партії виробів на підприємствах з потоковим типом організації виробництва. В якості базового підходу розглянуто процес руху предметів праці по синхронизованной потокової лінії. Виконано оцінку розмірів міжопераційних заділів технологічних операцій, що забезпечує безперебійний режим функціонування потокової лінії. Записано в канонічній формі стохастическое рівняння і отримано визначення коефіцієнта дифузії.

Ключові слова: *Поточная линия, Конвеєр, стохастичне рівняння, PDE-модель, предмет праці, технологічний процес, напівпровідниковий виробництво, між операційні запаси, рівняння Іто, диффузионное наближення, коефіцієнт дифузії, виробничий цикл, основний час обробки*

In the article, the main attention is paid to the construction of a stochastic equation for the calculating the production cycle of manufacturing a part of products at enterprises with a flow type of production organization. As the basic approximation, the process of the movement of subjects of labor along the synchronized production line is considered. The estimation of the sizes of operational reserves of technological operations, providing an uninterrupted mode of a functioning of a production line is executed. The stochastic equation is written in the canonical form and the definition of the diffusion coefficient is obtained.

Key words: *Production line, flow line, stochastic equation, PDE-model, subject of labor, technological process, semiconductor production, production cycle, operational stocks, Ito equation, diffusion approximation, diffusion coefficient, processing time*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При моделировании движении предмета труда по технологическому маршруту поточной линии выделяют три характерные величины технологического процесса [1-4]:

$-\Delta\tau_{0\,\mathrm{m}}$–основное технологическое время выполнения m-ой технологической операции (промежуток времени, в течение которого предмет труда находится в непосредственной обработки), m=1..M, где M–количество технологических операций в производственном процессе;

$-\Delta\tau_{\mathrm{q\,m}} = \Delta\tau_{0\,\mathrm{m}} N_m$–время обработки предмета на m-ой технологической операции с очередью деталей на обработку $(N_m - 1)$ и одной детали, которая находится в процессе обработки; N_m - общее количество деталей в очереди на обработку на m-ой операции;

$-T_d = \sum_{m=1}^{M} \Delta\tau_{\mathrm{q\,m}}$ – производственный цикл обработки предмета труда.

Движение предмета труда по технологическому маршруту представим в виде перемещения предмета труда по состояниям очереди ожидания в каждом межоперационном накопителе (принцип обслуживания: “первый пришел – первый обработан”), рис.1:

$$N_m \to (N_m - 1) \to (N_m - 2) \to \ldots\ldots \to 3 \to 2 \to 1. \tag{1}$$

Общее время обработки предмета труда с момента поступления в очередь на первую технологическую операцию и до окончания обработки на (m-1)-ой технологической операции составляет $\sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{\mathrm{q\,k}} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{0\,\mathrm{k}} N_k$. Введем обозначение τ_{m,N_i} –общее время, которое предмет труда находился в технологической обработке перед тем, как он оказался в очереди на обработку под номером N_{i} на m-ой технологической операции. Для предмета труда, который только что закончил обработку на (m-1)-ой технологической операции и ожидает обработку на m-ой технологической операции, находится последним в очереди (с номером на обработку N_m), справедливо равенство:

$$\tau_{m,N_m} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{\mathrm{q\,k}} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta\tau_{0\,\mathrm{k}} N_k .$$

Поступивший на обработку на m-ую технологическую операцию предмет труда находится в конце очереди. Его состояние в очереди на обработку определим как состояние N_m. Переход предмета труда $N_m \to (N_m - 1)$ из состояния в очереди на обработку N_m в состояние в очереди на обработку $(N_m - 1)$ произойдет в тот момент времени, когда будет закончена обработка предмета труда, который находился первым в очереди на обработку (состояние в очереди на обработку под номером 1)

$$\tau_{m,(N_m-1)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{1\ \mathrm{m}}, \tag{2}$$

где $\Delta\tau_{1\ \mathrm{m}}$ - время обработки технологическим оборудованием предмета труда, который находился в состоянии 1 (рис.1). Время обработки на m-ой технологической операции $\Delta\tau_{\mathrm{m}}$ есть случайная величина с известным законом распределения $f(\Delta\tau_{\mathrm{m}})$. Закон распределения $f(\Delta\tau_{\mathrm{m}})$ определяется технико-экономическими характеристиками используемого в технологическом процессе оборудования. Переход предмета труда $(N_m - 1) \to (N_m - 2)$ из состояния в очереди на обработку $(N_m - 1)$ в состояние $(N_m - 2)$ произойдет в момент времени

$$\tau_{m,(N_m-2)} = \tau_{m,(N_m-1)} + \Delta\tau_{2\ \mathrm{m}} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{1\ \mathrm{m}} + \Delta\tau_{2\ \mathrm{m}} \tag{3}$$

после начала обработки. Соответственно, для перехода $(N_m) \to (N_m - i)$ из состояния в очереди на обработку N_m в состояние $(N_m - i)$ следует равенство

$$\tau_{m,(N_m - i)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{1\ \mathrm{m}} + \Delta\tau_{2\ \mathrm{m}} + \ldots + \Delta\tau_{i\ \mathrm{m}} = \tau_{m,N_m} + \sum_{k=1}^{i} \Delta\tau_{\mathrm{k\ m}} \,. \qquad (4)$$

Сумма $\sum_{k=1}^{i} \Delta\tau_{\mathrm{k\ m}}$ в выражении (4) есть время обработки первых i – деталей очереди длиной N_m. В этой очереди под номером N_m на обработку находится рассматриваемый предмет труда. Запишем также выражение для перехода $(N_m - i_1) \to (N_m - i_2)$ из состояния в очереди на обработку $(N_m - i_1)$ в состояние в очереди на обработку $(N_m - i_2)$

$$\tau_{m,(N_m - i_2)} - \tau_{m,(N_m - i_1)} = \sum_{k=i_1+1}^{i_2} \Delta\tau_{\mathrm{k\ m}} \,, \qquad (5)$$

которое может быть получено из соотношения (4).

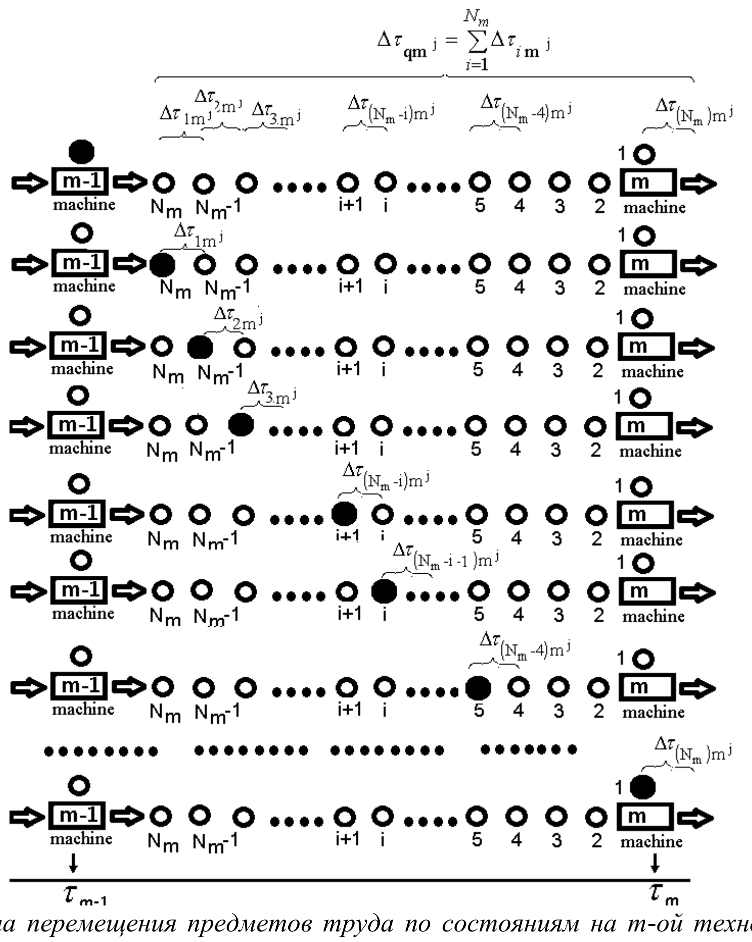

Рис.1. Схема перемещения предметов труда по состояниям на m-ой технологической операции

Введем случайную величину

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{m}} - \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}}{\sigma_m}, \tag{6}$$

где $\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}, \sigma_m$ – математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины $\Delta\tau_{\mathrm{m}}$ с плотностью распределения $f(\Delta\tau_{\mathrm{m}})$. Случайная величина ε_m, определенная соотношением (6) будет иметь плотность распределения [5,стр.338]:

$$g_m(\varepsilon_m) = \sigma_m f_m(\sigma_m \cdot \varepsilon_m + \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}), \qquad \langle\varepsilon_m\rangle = 0,\ \langle\varepsilon_m{}^2\rangle = 1 \tag{7}$$

с математическим ожиданием $\langle\varepsilon_m\rangle$ и среднеквадратичным отклонением $\langle\varepsilon_m{}^2\rangle$.

Время обработки i – детали из очереди на обработку может быть выражено через величину $\varepsilon_{i\,m}$, определяющую ее отклонение от математического ожидания $\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}$:

$$\Delta\tau_{i\ \mathrm{m}} = \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}} + \sigma_m \cdot \varepsilon_{i\,m}. \tag{8}$$

Это позволяет записать выражение (4) в виде

$$\tau_{m,(N_m - i)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}} \cdot i + \sigma_m \cdot (\varepsilon_{1\mathrm{m}} + \varepsilon_{2\,\mathrm{m}} + ... + \varepsilon_{i-1\mathrm{m}} + \varepsilon_{i\,\mathrm{m}}). \tag{9}$$

Используя свойство дисперсии линейной функции случайных величин [5,стр.270], получим

$$\varepsilon_{1\mathrm{m}} + \varepsilon_{2\,\mathrm{m}} + ... + \varepsilon_{i-1\mathrm{m}} + \varepsilon_{i\,\mathrm{m}} = \sqrt{i}\ \ \varepsilon_{\mathrm{m}}, \qquad \langle\varepsilon_m\rangle = 0,\ \langle\varepsilon_m{}^2\rangle = 1. \tag{10}$$

Подстановка (10) в (9) дает уравнение

$$\tau_{m,(N_m - i)} = \tau_{m,N_m} + \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}} \cdot i + \sigma_m \cdot \sqrt{i}\ \ \varepsilon_{\mathrm{m}}. \tag{11}$$

Рассмотрим переход из состояния, характеризующего координатой $\tau_{m,N_m} = \tau(t_0)$, в состояние, характеризующееся координатой $\tau_{m,(N_m - i)} = \tau(t)$ за промежуток времени

$$(t - t_0) = \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}} \cdot i. \tag{12}$$

Воспользуемся соотношением (12), запишем выражение (11) в виде

$$\tau(t) = \tau(t_0) + (t - t_0) + \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}}} \cdot \sqrt{t - t_0}\ \ \varepsilon_{\mathrm{m}}. \tag{13}$$

Решение уравнение (13) позволяет построить диффузионную модель производственной поточной линии и исследовать характеристики производственного процесса для предприятий с поточным типом организации производства. Возможность расширить класс PDE-моделей [6-10], используемых для описания производственных систем, определила актуальность настоящей работы.

2. Постановка проблемы и формулировка цели статьи

Целью настоящей статьи является построение модели движения партии предметов труда по производственной поточной линии, размер которой конечный и равен N_p. При этом выделим отдельные подзадачи:

А)оценить темп обработки предметов труда на технологической операции;

Б)оценить минимальную величину размера межоперационных заделов N_m, который позволяет обеспечить бесперебойную работу технологического оборудования при обработки партии изделий размером N_p;

В)определить режим последовательного запуска каждой единицы оборудования для обеспечения бесперебойной работы поточной линии при поступление партии предметов труда на обработку на технологические позиции, не содержащие межоперационных заделов. Определить программу запуска поточной линии;

Г)построить стохастическое уравнение для моделирования процесса обработки партии предметов труда на производственной линии.

3. Оценка среднего темп обработки предметов труда на технологической операции.

Определим среднюю производительность обработки партии N_p предметов труда на каждой технологической операции при заданной вероятности

$$P\left(\left|\Delta\tau_{0\ \mathrm{mN_p}} - \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}\right| < \delta \right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N_p}}{\sigma_m}\right) = \gamma\,, \tag{14}$$

где

$$\Delta\tau_{0\ \mathrm{mN_p}} = \frac{1}{\mathrm{N_p}}\sum_{1}^{\mathrm{N_p}}\Delta\tau_{i\ \mathrm{m}}\,. \tag{15}$$

$\Phi(\mathrm{x})$ - функция Лапласа. Смысл соотношения (14) следующий: с заданной надежностью $\gamma = 2\,\Phi(\mathrm{x})$ можно утверждать, что доверительный интервал

$$\left(\Delta\tau_{0\ \mathrm{mN_p}} - x\frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}},\ \ \Delta\tau_{0\ \mathrm{mN_p}} + x\frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}}\right) \tag{16}$$

покрывает среднее время обработки деталей на m-ой технологической операции $\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}$. Точность оценки

$$\delta = x\frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}}\,. \tag{17}$$

Для надежности оценки $\gamma = 0.95$ имеем $x = 1.96$. В пределах интервала (16) среднее выборочное значение $\Delta\tau_{0\ \mathrm{mN_p}}$ (15) на партии изделий размером N_p может иметь отклонение δ. С увеличением размера партии N_p величина отклонения δ уменьшается. Если за характерное время рассмотрения процесс обрабатывается большое количество изделий $N_p \to \infty$, то возможно полагать, что $\delta \approx 0$. Это обстоятельство, которое соответствует большим характерным временам протекания процесса производства $\Delta t \approx N_p \cdot \Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}$, позволяет использовать для описания движения предметов труда по поточной производственной линии кинетическое уравнение [2,11,12]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=\lambda_{Plant}\cdot\left\{\varphi(t,\mathrm{S},\mu)\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\right\},\quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{dt}}=f(t,S)\,, \qquad (18)$$

где $\chi(t,S,\mu)$ соответствующим образом нормированная функция распределения числа N предметов труда по состояниям в фазовом пространстве (t,S,μ), $f(t,S)$ - инженерно-производственная функция, определяющая нормативную траекторию движения предметов труда по технологическому маршруту [13,14]. Если же размер партии является небольшим или при исследовании изменения во времени темпа обработки партии изделий размером N_p за характерный промежуток времени Δt обрабатывается не слишком большое количество предметов труда $N_{p\tau}$:

$$\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}} << \Delta t << T_d\,,\quad \Delta t = N_{p\tau}\cdot\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}\,, \qquad (19)$$

то в соответствие с (17) обсолютное отклонение $\delta = x\frac{\sigma_m}{\sqrt{N_{p\tau}}}$ времени обработки предметов труда $\Delta\tau_{0\ \mathrm{mN}_{p\tau}}$ за характерный промежуток времени Δt от среднего времени обработки может быть существенным и использование (18) для построения модели производственной поточной линии приводит к значительной погрешности, что отражается на производительности обработки предмета труда за характерный промежуток времени:

$$[\chi]_{1\mathrm{m}} \approx \frac{1}{\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}-\delta} \approx [\chi]_{1\psi\ \mathrm{m}} + \Delta[\chi]_{1\psi\ \mathrm{m}}\,.$$

В выражении (19) длительность времени $\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}$ соответствует времени протекания быстрого процесса (непосредственно единичной обработки предмета труда на технологической операции), T_d – соответствует времени протекания медленного процесса (продолжительности производственного цикла обработки партии предметов труда). Наличие дополнительного слагаемого $\Delta[\chi]_{1\psi\ \mathrm{m}}$ приводит к образованию колебаний потоковых параметров производственной линии [15].

3. Оценка размера межоперационных заделов N_m

Оценим требуемый размер межоперационных заделов N_m, который позволяет обеспечить бесперебойную работу технологического оборудования при обработки партии изделий количеством N_p. Будем полагать, что предметы труда поступают в межоперационный задел с (m-1)-технологической операции (рис.2) с производительностью

$$[\chi]_{1(\mathrm{m}\text{-}1)} = \frac{1}{\Delta\tau_{0\ (\mathrm{m}\text{-}1)\mathrm{N_p}}} \approx \frac{1}{\Delta\tau_{0\ (\mathrm{m}\text{-}1)}+\delta} \approx [\chi]_{1\psi\,(\mathrm{m}\text{-}1)} - \Delta[\chi]_{1\psi\,(\mathrm{m}\text{-}1)}, \qquad (20)$$

$$[\chi]_{1\psi\,(\mathrm{m}\text{-}1)} = \frac{1}{\Delta\tau_{0\ (\mathrm{m}\text{-}1)}}\,,\quad \Delta[\chi]_{1\psi\,(\mathrm{m}\text{-}1)} = \frac{\delta}{\left(\Delta\tau_{0\ (\mathrm{m}\text{-}1)}\right)^2}\,, \qquad (21)$$

а убывают с производительностью

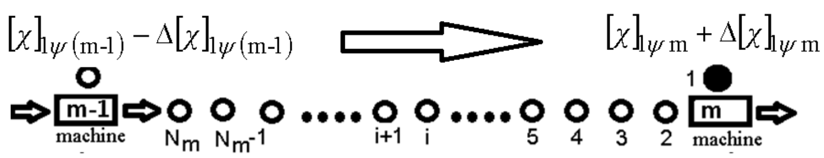

Рис.2.Модель изменения уровня межоперационных заделов

$$[\chi]_{1\,m} = \frac{1}{\Delta\tau_{0\ mN_p}} \approx \frac{1}{\Delta\tau_{0\ m} - \delta} \approx [\chi]_{1\psi\ m} + \Delta[\chi]_{1\psi\ m}, \tag{22}$$

$$[\chi]_{1\psi\ m} = \frac{1}{\Delta\tau_{0\ m}},\ \Delta[\chi]_{1\psi\ m} = \frac{\delta}{(\Delta\tau_{0\ m})^2}, \tag{23}$$

Изменение величины межоперационных заделов в единицу времени перед с m-технологической операции для синхронизированной производственной линии, для которой соблюдается условие синхронности работы технологического оборудования

$$[\chi]_{1\psi\,(m\text{-}1)} = [\chi]_{1\psi\ m} = \frac{1}{\Delta\tau_{0\ m}} = \frac{1}{\Delta\tau_0}, \tag{24}$$

определяется выражением

$$[\chi]_{1\psi\ m} - [\chi]_{1\psi\,(m\text{-}1)} = 2\Delta[\chi]_{1\psi\ m} = \frac{2\delta}{(\Delta\tau_{0\ m})^2}. \tag{25}$$

За промежуток времени $\Delta t = N_p \cdot \Delta\tau_{0\ m}$, который соответствует времени обработки на m-технологической операции всей партии предметов труда размером N_p, изменение межоперационного задела определяется величиной

$$\Delta N_m = \left([\chi]_{1\psi\ m} - [\chi]_{1\psi\,(m\text{-}1)}\right)\Delta t = 2\Delta[\chi]_{1\psi\ m}\,\Delta t = \frac{2\delta\cdot\Delta t}{(\Delta\tau_{0\ m})^2}. \tag{26}$$

Подставим в (26) значение δ (17) при γ =0.95, получим

$$\Delta N_m = \frac{2\delta\cdot\Delta t}{(\Delta\tau_{0\ m})^2} = 1.96\frac{\sigma_m}{\sqrt{N_p}}\,\frac{2\cdot N_p\cdot\Delta\tau_{0\ m}}{(\Delta\tau_{0\ m})^2} \approx \frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ m}}\sqrt{N_p} \approx 4\cdot[\chi]_{1\psi\ m}\sigma_m\sqrt{N_p}. \tag{27}$$

Большинство единиц технологического оборудования работают со значением потоковых параметров $\frac{\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ m}} = (0.1 \div 0.2)$, которые накладывают ограничение на минимальный размер межоперационного задела

$$N_{m\ \min} \approx 4\cdot[\chi]_{1\psi\ m}\sigma_m\sqrt{N_p} \approx \frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ m}}\sqrt{N_p} \approx 0.8\sqrt{N_p}. \tag{28}$$

с требованием вместимости межоперационного накопителя

$$N_{m\,\psi} \geq 2N_{m\ \min} \approx 1.6\sqrt{N_p}\ . \qquad (29)$$

Выражения (28),(29) определяют режим непрерывной работы поточной линии, при котором не допускается остановка производственного процесса как из-за опустошения межоперационного накопителя (28), так и из-за его переполнения накопителя. При обработки партии изделий $N_p = 10^4$, соответственно минимальный требуемый межоперационный задел равен $N_{m\ \min} \approx 80$ изделий при требуемой емкости межоперационного накопителя $N_{m\,\psi} \geq 2N_{m\ \min} \approx 160$. Если заказ поступает в обработку на поточную линию с отсутствующими межоперационными заделами [18] в момент времени $t_{start} = 0$, то для обеспечения бесперебойной работы синхронизированной поточной линии с условием синхронизации (24) требуется управления запуском m-го технологического оборудования с заданной задержкой, определяемой условиями (28), (29) [16,17]. Для упрощения полагая

$$\sigma_{(\mathrm{m}\text{-}1)} = \sigma_m, \qquad \mathrm{m=1..M}, \qquad (30)$$

соответственно $N_{(\mathrm{m}\text{-}1)\ \min} = N_{m\ \min} = N_{0\ \min}$, определим время задержки $\Delta\tau_{\text{delay time}}$ последовательного запуска оборудования поточной линии

$$\Delta\tau_{\text{delay time}} = \Delta\tau_0 N_{0\ \min} \approx 0.8\cdot\Delta\tau_0\sqrt{N_p}\ , \qquad (31)$$

которое задаем времена старта $t_{start\mathrm{m}}$ m-ой единицы оборудования

$$t_{start\mathrm{m}} = m\cdot\Delta\tau_{\text{delay time}} = m\Delta\tau_0 N_{0\ \min} \approx 0.8\cdot m\cdot\Delta\tau_0\sqrt{N_p}\ . \qquad (32)$$

Для случая, когда партия деталей поступает на обработку не частями (подпартиями), а целиком, или же количество изделий в подпартии превышает значение $N_{m\ \min}$, то в задержке для первой технологической операции нет необходимости и выражение (32) принимает вид

$$t_{start\mathrm{m}} = (m-1)\cdot\Delta\tau_{\text{delay time}} = (m-1)\Delta\tau_0 N_{0\ \min} \approx 0.8\cdot(m-1)\cdot\Delta\tau_0\sqrt{N_p}\ . \qquad (33)$$

Соотношение (33) при обработки партии изделий $N_p = 10^4$ определяет время запуска каждой единицы оборудования ($\Delta\tau_{\text{delay time}} = 80\cdot\Delta\tau_0$):

$$t_{start1} = 0,\ t_{start2} = 80\cdot\Delta\tau_0,\ t_{start3} = 160\cdot\Delta\tau_0\ ,\ t_{start2} = (m-1)80\cdot\Delta\tau_0\,.$$

Таким образом, первое изделие партии поступит на обработку на М-ю технологическую операцию в момент времени

$$t_{start\mathrm{M}} = (M-1)\frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ \mathrm{m}}}\sqrt{N_p}\cdot\Delta\tau_0 = (M-1)80\cdot\Delta\tau_0\,, \qquad (34)$$

а завершит обработку в момет времени

$$t_{\text{finishM}} = (M-1)\frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}\sqrt{N_p}\cdot\Delta\tau_0 + \Delta\tau_0 = (M-1)80\cdot\Delta\tau_0 + \Delta\tau_0\,, \qquad (35)$$

в то время, как изделие будет находится в обработке в течение времени

$$t_{\text{time of processingM}} = M\cdot\Delta\tau_0\,. \qquad (36)$$

Приведенная оценка наглядно показывает, что время, которое находится в обработке первый предмет труда для рассматриваемого случае (35), во много раз превышает необходимое время для его обработки (36)

$$\frac{t_{\text{finishM}}}{t_{\text{time of processingM}}} = \frac{(M-1)\frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}\sqrt{N_p}\cdot\Delta\tau_0 + \Delta\tau_0}{M\cdot\Delta\tau_0} = \frac{(M-1)\frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}\sqrt{N_p}+1}{M}$$

Для современных поточных линий M>>1 [11,12,16], что соответствует отношению

$$\frac{t_{\text{finishM}}}{t_{\text{time of processingM}}} = \frac{(M-1)\frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}\sqrt{N_p}+1}{M} \approx N_{m\ \min} \approx \frac{4\cdot\sigma_m}{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}\sqrt{N_p}\,. \qquad (37)$$

4. Дифференциальное уравнение, моделирующее процесс обработки партии изделий

Преобразуем уравнение (13)

$$\tau(t) = \tau(t_0) + (t-t_0) + \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}}\cdot\sqrt{t-t_0}\ \ \varepsilon_{\text{m}}\,,$$

которое определяет время нахождения предмета труда в процессе обработки. Рассмотрим изменение времени обработки предмета труда

$$\mathrm{d}\tau(t) = \tau(t) - \tau(t_0) \qquad (38)$$

за бесконечно малый интервал времени

$$\mathrm{d}t = t - t_0\,. \qquad (39)$$

С учетом (38),(39) уравнение (13) запишем в виде

$$\mathrm{d}\tau(t) = \mathrm{d}t + \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}}\,\varepsilon_{\text{m}}\sqrt{\mathrm{d}t}\ \ . \qquad (40)$$

Процесс, подчиняющийся уравнению (40) является винеровским. С учетом обозначений:

$$\mathrm{a}(\tau,t) = 1; \qquad \mathrm{b}(\tau,t) = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\Delta\tau_{0\ \text{m}}}}; \qquad \delta\mathrm{W} = \varepsilon_{\text{m}}\sqrt{\mathrm{d}t} \qquad (41)$$

уравнение (40) представим в каноническом виде

$$\mathrm{d}\tau(t) = \mathrm{a}(\tau,t)\mathrm{d}t + \mathrm{b}(\tau,t)\,\delta\mathrm{W}\,, \qquad (42)$$

где $\delta W = \varepsilon_{\mathrm{m}} \sqrt{dt}$ – бесконечно малый винеровский шум, $\varepsilon_{\mathrm{m}} \approx N(0,1)$ (10). Функция $a(\tau, t)$ является коэффициентом сноса, а квадрат функции $b(\tau, t)$ является диффузией процесса:

$$b^2(\tau, t) = D(\tau, t). \tag{43}$$

В рассматриваемом случае (40) в силу особенности модели описания синхронизированного производственного процесса (24), (30) функции $a(\tau, t)$ и $b(\tau, t)$ является постоянными величинами. В этом случае уравнение (42) описывает обычное аддитивное винеровское блуждание.

Уравнение (42) позволяет моделировать динамику изменения во времени величины $\tau(t)$ при помощи реккурентной схемы (11), представленной в каноническом виде

$$\tau(t_{k+1}) = \tau(t_k) + a(\tau_k, t_k)\Delta t + b(\tau_k, t_k)\, \varepsilon_{k\,\mathrm{m}} \sqrt{\Delta t}\ . \tag{44}$$

Алгоритм моделирования следующий: выбирается начальное значение $\tau_0 = \tau(t_0)$ и малый интервал времени $\Delta t = (t_1 - t_0)$. Генерируется случайное число $\varepsilon_{0\,\mathrm{m}}$ (10) с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единицы. Функция распределения случайной величины является заданной и определяется техническими характеристиками используемого оборудования. Функция распределения может быть определена через паспортные параметры технологического оборудования или в результате нормирования технологических операций производственной поточной линии.

Дискретная схема Ито (44) позволяет определить смысл функций $a(\tau, t)$ и $b(\tau, t)$. Из уравнения (44) найдем значение величины $(\tau(t) - \tau(t_0))$ между произвольными моментами времени t и t_0, $\Delta t = (t - t_0)$:

$$\langle \tau(t) - \tau(t_0) \rangle = a(\tau_0, t_0)\Delta t + b(\tau_0, t_0) \langle \varepsilon_{\mathrm{m}} \rangle \sqrt{\Delta t}\ , \tag{45}$$

где $a(\tau_0, t_0)$, $b(\tau_0, t_0)$, Δt –не случайные величины. В силу определения случайной величины (10) имеем $\langle \varepsilon_{\mathrm{m}} \rangle = 0$, откуда из уравнения (45) следует

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \tau(t) - \tau(t_0) \rangle}{\Delta t} = a(\tau_0, t_0). \tag{46}$$

Среднее значение квадрата отклонения в силу определения $\langle \varepsilon_{\mathrm{m}} \rangle = 0$, $\langle (\varepsilon_{\mathrm{m}})^2 \rangle = 1$ может быть записано в виде

$$\langle (\tau(t) - \tau(t_0))^2 \rangle =$$

$$= \left\langle (a(\tau_0, t_0)\Delta t)^2 + a(\tau_0, t_0) b(\tau_0, t_0)\, \varepsilon_{\mathrm{m}} \Delta t^{3/2} + \left(b(\tau_0, t_0)\, \varepsilon_{\mathrm{m}} \sqrt{\Delta t}\right)^2 \right\rangle =$$

$$= a^2(\tau_0, t_0)\Delta t^2 + a(\tau_0, t_0) b(\tau_0, t_0) \langle \varepsilon_{\mathrm{m}} \rangle \Delta t^{3/2} + b^2(\tau_0, t_0) \langle (\varepsilon_{\mathrm{m}})^2 \rangle \Delta t =$$

$$= \mathrm{a}^2(\tau_0, t_0)\Delta t^2 + \mathrm{b}^2(\tau_0, t_0)\,\Delta t\,, \qquad (47)$$

откуда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left\langle (\tau(t) - \tau(t_0))^2 \right\rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{a}^2(\tau_0, t_0)\Delta t + \mathrm{b}^2(\tau_0, t_0) = \mathrm{b}^2(\tau_0, t_0)\,. \qquad (48)$$

Несложно показать, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left\langle (\tau(t) - \tau(t_0))^k \right\rangle}{\Delta t} = 0\,, \qquad \text{при} \qquad k > 2 \qquad (49)$$

Класс производственных процессов, свойства которых определяются соотношениями (46), (48), (49) относятся к диффузионным.

Выводы

В работе рассмотрено диффузионное описание процесса изготовления партии изделий размером N_p. Движение предмета труда по технологическому маршруту представлено в виде перемещения предмета труда по состояниям очереди ожидания в каждом межоперационном накопителе с принципом обслуживания: “первый пришел – первый обработан”). Рассмотрены характерные времена протекания производственных процессов и определены условия применимости диффузионного приближения. Получены уравнения, позволяющие оценить отклонение темпа обработки части партии предметов труда за рассматриваемый характерный промежуток времени Δt. Представленные в работе результаты позволяют сделать следующие выводы:

–существуют производственные процессы с характерными временами протекания, в течение которых отклонение темпа обработки изделий может значительно отклоняться от нормативного значения, определенного паспортными данными технологического оборудования;

–величина требуемого размера заделов от среднего темпа обработки предметов труда и размера партии, поступившей в обработку. Для обеспечения непрерывной работы синхронизированной поточной линии требуются межоперационные заделы. Требуемый объем межоперационных заделов и требуемая емкость накопителей является расчетной величиной, которая определяется технологическими параметрами поточной линии;

–для обеспечения бесперебойной работы синхронизированной поточной линии требуется управление запуском каждого m-го технологического оборудования с заданной задержкой, определяемой величиной размеров межоперационных накопителей, определяющих бесперебойный режим работы.

Перспективами дальнейших исследований труда является

–построение уравнения Фоккера-Планка, моделирующее процесс обработки партии деталей на поточной производственной линии;

–основываясь на уравнении Ито для моделирования движения партии предметов труда (40) построение уточненной формулы расчета продолжительности производственного цикла изготовления партии изделий

ЛИТЕРАТУРА

1. Пигнастый О.М. Сетевая модель многоресурсной поточной производственной линии / О.М.Пигнастый // Научный результат. Серия «Информационные технологии». Белгород: БГУ. –2016. – Т.1. №2. –С.31–45.
2. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем. / О.М. Пигнастый. – Х.: Изд. ХНУ им. Каразина, 2007. – С. 388. –Available at: https://goo.gl/dzcEZk
3. Разумов И. М. Организация и планирование машиностроительного производства / И. М. Разумов, Л. Я. Шухгалтер – М.: Машиностроение, 1974. – 592 с.
4. Управление гибкими производственными системами / Е. Д. Воронина и др. / общ. ред. С. В. Емельянов. – М.:Машиностроение, 1987. – 368 с.
5. Венцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С.Венцель, Л.А.Овчаров – Москва: Высшая школа, 2000. – 480 с.
6. Пигнастый О. М. О новом классе динамических моделей поточных линий производственных систем / О. М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Белгород: БГУ. - 2014. - № 31/1. - С. 147-157 –Available at: https://goo.gl/9k3v1r
7. Пигнастый О. М. Использование PDE-моделей для построения единой теории производственных линий / О. М. Пигнастый // Вісник Херсонського національного технічного університету. Херсон: ХНТУ. - 2014. - № 3 (50). - С. 405 –412. –Available at: https://goo.gl/WU87S1
8. Власов В.А. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции / В. А. Власов, И. А. Тихомиров, И. И. Локтев.– Томск, 2006. – 300 с.
9. Berg R. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. / R. Berg, E. Lefeber, J. Rooda // IEEE Transactions on Control Berg R. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. / R. Berg, E. Lefeber, J. Rooda // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2008. – vol. 16, №1. – P. 130 – 136.
10. Armbruster D. A Continuum Model for a Re-entrant Factory / D. Armbruster, D. Marthaler, C, Ringhofer, K. Kempf, Jo T -C. // Operations research. – 2006. – VOL 54 – №5. – P. 933 - 950 .
11. Pihnastyi O.M. Statistical validity and derivation of balance equations for the two-level model of a production line// O.M.Pihnastyi//Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Kharkiv: PC "TECHNOLOGY CENTER". - 2016. – vol 5. –№ 4 (83). - P. 17 – 22. –Available at: https://goo.gl/4Jwn2r
12. Пигнастый О. М. О выводе кинетического уравнения производственного процесса / О. М. Пигнастый // Вісник Херсонського національного

технічного університету. Херсон: ХНТУ. - 2015. - № 3 (54). - С. 439 –446. –Available at: https://goo.gl/z5pLdE
13. Пигнастый О.М. Инженерно-производственная функция предприятия с серийным или массовым выпуском продукции / О.М. Пигнастый // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. - Харьков: НАКУ. - 2005. - № 42(3). - С. 111-117.
14. Демуцкий В.П. Целевая функция производственной системы с массовым выпуском продукции / В.П.Демуцкий, О.М.Пигнастый, В.Д.Ходусов, М.Н.Азаренкова // - Вісник Харківського національного університету. - Харків: ХНУ. - 2006. - N746. Сер. ”Фізична” - С.95-103. –Available at: https://goo.gl/KzUDqO
15. Ходусов В.Д., Пигнастый О.М. Использование методов физической кинетики для исследования колебания параметров поточной линии // - Восточно-европейский физический журнал. - Харков: ХНУ. - 2014. - Vol.1. –№4. – С. 88-95.
16. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л.Г.Раскин. – М.: Сов.радио, 1976. – 344 с.
17. Раскин Л.Г. Решение многономенклатурной задачи управления запасами по вероятностному критерию / Л.Г.Раскин, П.Е.Пустовойтов // Системный анализ, управление, информационные технологии.–Х.: НТУ «ХПИ. – 2002. – №. 13. – С. 49-53.
18. Заруба В. Я. Моделирование движения предмета труда по технологическому маршруту в двухкоординатном описании / В. Я. Заруба О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут”. Збірник наукових праць. Серія: Технічний прогрес та ефективність виробництва. – Харків: НТУ „ХПІ”. - 2015. - № 60 (1169) – С. 39-45.
19. Пигнастый О. М. К вопросу использования статистической теории для расчета производственного цикла / В. Д. Ходусов, О. М. Пигнастый // - Вісник Харківського національного університету. - Харків: ХНУ. -2009. - №868, вип.3/43/ Сер. ”Фізична”. с.112-118.
20. Пигнастый О. М. О построении целевой функции производственной системы / О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академперіодика". - 2007. - №5. - С. 50-55.

Надійшла – 28.10.2017.