Запропонована методика побудови системи багатомоментних рівнянь дворівневого опису виробничої потокової лінії. Отримані незамкнені балансові рівняння. Розглянуто відомі моделі, в яких використані різні способи замикання системи рівнянь. Показані обмеження, що дозволяють отримати перехід до одномоментної PDE-моделі опису конвеєрної лінії і двухмоментної PDE-моделі з використанням рівняння Бюргерса

Ключові слова: PDE-модель, конвеєр, кінетичне рівняння, виробничий процес, багатомоментні рівняння, дворівневе опис, предмет праці, технологічні ресурси, фазовий простір, модель конвеєр

Предложена методика построения системы многомоментных балансовых уравнений для двухуровневого описания производственной поточной линии. Полученные незамкнуты балансовые уравнения. Рассмотрены известные модели, в которых использованы разные способы замыкания системы уравнений. Показаны ограничения и уравнения связей, позволяющие осуществить переход к одномоментной PDE-модели описания конвейерной линии и двухмоментной PDE-модели поточной линии с использованием уравнения Бюргерса

Ключевые слова: PDE-модель, поточная линия, кинетическое уравнение, производственный процесс, многомоментные уравнения, двухуровневое описание, предмет труда, технологические ресурсы, фазовое пространство, модель конвейер

УДК 658.51.012
DOI: 10.15587/1729-4061.2016.81308

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ВЫВОД БАЛАНСОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ

О. М. Пигнастый
Доктор технических наук, доцент
Кафедра компьютерного мониторинга и логистики
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
ул. Багалея, 21, г. Харьков, Украина, 61002
E-mail: pom7@bk.ru

1. Введение

В последние десятилетие для проектирования производственных поточных линий разработаны модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-модели) [1–7]. PDE-модели дают возможность учитывать влияние внутренних факторов производства и технологические ограничения производственной системы. Существенным преимуществом данного класса моделей является то, что они позволяют описать движение предметов труда от операции к операции, допускают решение в аналитическом виде и не нуждаются в значительных вычислительных ресурсах. Появление нового типа моделей обусловлено тенденциями развития современного промышленного производства, основной из которых является тенденция к постоянному сокращению продолжительности жизненного цикла производимых изделий. Эта тенденция приводит к тому, что, с одной стороны, производственные линии значительную долю времени функционирует в переходном неустановившимся режиме [3–7], с другой стороны, время, отводимое на поиск режима управления технологическими участками поточной линии, в связи с этим, сокращается [9]. Такое сокращение привело к необходимости разработать совершенно новые типы моделей производственных поточных линий [3], а также программ и алгоритмов управления ими. Публикации, посвященные использованию PDE-моделей производственных линий, появились в 2003 г. [3, 5], однако вопрос обоснования метода построения замкнутых уравнений, определяющих модель, требует дальнейшего развития и в настоящее время, определяет актуальность выбранного направления исследования и его практическую значимость для современного поточного производства.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

В работах [1, 3–8] обсуждается новый класс моделей производственных систем с поточным способом организации производства, широко используемый в настоящее время для построения эффективных систем управления производством. Проведен обзор публикаций, посвященных наиболее употребительным PDE-моделям производственных поточных линий, и показаны предпосылки, которые привели к возникновению класса PDE-моделей, а также представлена история их развития. Дано описание PDE-модели, содержащей Graves-уравнение; нелинейной PDE-модели Lighthill-Whitham; квазистатической PDE-модели, использующей нелинейное Karmarkar-уравнение состояния; двухмоментной PDE-модели с уравнением Бюргерса; диффузионной PDE-модели. Особое внимание уделено замкнутой многомоментной PDE-модели для переходных неустановившихся режимов. Исторически сложилось, что при построении нового типа моделей производственных линий использованы два подхода – феноменологический подход [6–8] и статистический [1, 3, 4]. Феноменологический подход дал возможность построить ряд моделей производственных линий, дополнив уравнения переноса уравнением состояния в форме clearing-функции. Это позволило записать уравнения PDE-модели производственных линий для наиболее простых случаев функционирования. Обоснованность применения определялась сравнительным анализом результатов, полученных с помощью дискретно-событийной модели (DES-модели) и исследуемой PDE-моделью. Наглядно показано, что построенные PDE-модели с использованием феноменологического подхода являются ограниченными. Ограничение обусловлено следующим обстоятельством. Все основные закономерности поведения производственной системы устанавливаются экспериментально (феноменологически). При описании производственных явлений отказываются от лишней детализации технологического процесса. Отказ от строгого описания закономерностей поведения отдельных элементов, составляющих производственную систему, позволяет построит модель производственной системы с небольшим числом макроскопических величин. Наиболее часто используют в качестве таких макроскопических величин – темп движения предметов труда от одной технологической операции к другой и размер операционных заделов между ними. Феноменологическая модель дает удовлетворительную точность, когда производственный процесс является квазистационарным. Однако она не пригодна для описания переходных производственных процессов. Время существования данных процессов постоянно растет и в настоящей момент для многих ведущих компаний достигло половины длительности жизненного цикла. Если квазистационарный режим функционирования производства позволял устанавливать феноменологические закономерности между основными параметрами производства, то для переходных процессов такие закономерности установить практически невозможно в силу постоянного изменения во времени внешних и внутренних производственных факторов. Предпринятые попытки создать на производственном предприятии экспериментальные лаборатории (моделирующие на отдельных участках производственный процесс) для прогнозирования изменений феноменологических закономерностей между основными параметрами производства оказались безуспешными. Исследователи вынуждены искать новые подходы, позволяющие строить модели производственных систем с требуемой точностью описания.

Для построения моделей производственных систем предложен статистический подход [3], основанный на учете закономерностей взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием и между собой в ходе технологической обработки. В работах [1, 3] обсуждается оценка точности расчета параметров поточной. Уделяется внимание моделям статистической динамики систем управления поточным производством и демонстрируется их связь с классом PDE-моделей. Заостряется внимание на то, что существующие методы статистической динамики систем управления предоставляют мощный аппарат, который может быть использован для построения PDE-моделей систем управления и стабилизации параметров производственной линии.

Обзор публикаций, представленный в работах [1, 3, 4, 6, 9, 10], наглядно показывает, что дальнейшее развитие и использование PDE-моделей поточных линий требует решения следующих вопросов:

1. Вывод нестационарных уравнений состояния, основанных на детальной технологии обработки предмета труда с учетом схемы оборудования.

2. Построение многомоментных замкнутых балансовых уравнений для установившихся и переходных нестационарных режимов функционирования производственной линии.

3. Построение двухуровневых моделей управления параметрами производственной линии для установившихся и переходных режимов с учетом параметров оборудования, схемы его расстановки и приоритетов движения предметов труда.

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является развитие методики построения многомоментных замкнутых балансовых уравнений для установившихся и переходных нестационарных режимов функционирования поточной линии.

Для достижения поставленной цели были поставлена следующая задача: построить и обосновать систему уравнений потоковых параметров для модели производственной систем в одно-, двух-, трехмоментном описании производственного процесса с последующим обобщением полученных результатов для моделей в многомоментном описании.

4. Кинетическое уравнение производственного процесса

Состояние производственного процесса определяется через состояния общего числа N предметов труда [1, 4, 5]. При переходе предмета труда из одного состояния в другое происходит превращение ресурсов (сырья, материалов, живого труда) в готовый продукт в результате целенаправленного воздействия оборудования.

Состояние j-го предмета труда в фазовом пространстве может быть описано параметрами состояния

$$\vec{S}_j = \left(S_{j,1},..,S_{j,\alpha},..,S_{jA}\right),\ \ \vec{\mu}_j = \left(\mu_{j,1},..,\mu_{j,\alpha},..,\mu_{jA}\right),$$

где $S_{j,\alpha}$ (грн) стоимость перенесенного a-го технологического ресурса или его части на j-й предмет труда, $\mu_{j,\alpha}$ (грн/час) – интенсивность переноса стоимости a-го ресурса на j-й предмет труда, $0<j\le N$, $0<\alpha\le A$ [4]. Состояние параметров производственного процесса в некоторый момент времени будет определено, если определены параметры состояния предметов труда

$$\left(\vec{S}_1,\vec{\mu}_1....\vec{S}_N,\vec{\mu}_N\right)$$

и целевая функция $J\left(t,\vec{S}_j,\vec{\mu}_j\right)$, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояний предметов труда [3, 4]. Так как количество предметов труда N много больше единицы, то вместо решения системы из N уравнений второго порядка используем соответствующим образом нормированную функцию распределения $\chi(t, S, \mu)$ числа N предметов труда в фазовом пространстве (t, S, μ), удовлетворяющую кинетическому уравнению производственного процесса [4]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=$$
$$=\lambda_{Plant}\cdot\left\{\int_0^\infty\left[\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})\right]\cdot d\tilde{\mu}-\mu\cdot\chi\right\},$$
$$\frac{d\mu}{dt}=f(t,S)\ , \qquad (1)$$

где произведение $\chi(t,S,\mu)\cdot d\Omega$ представляет собой число предметов труда в ячейке $d\Omega$ фазового пространства с координатами $S_j\in\left[S,S+dS\right[,\ \mu_j\in\left[\mu,\mu+d\mu\right[$ (S_d – себестоимость продукции). Интегрирование по объему Ω фазового пространства (S,μ) дает общее количество N предметов труда, находящееся в незавершенном производстве [1, 8–10]:

$$\int_0^{S_d}\int_0^\infty\chi(t,S,\mu)d\mu dS=N,$$
$$\Omega=\int_0^{S_d}\int_0^\infty d\mu dS. \qquad (2)$$

Функция f(t, S) определяет закон изменения состояния предмета труда для нормативного технологического процесса, строится на основании данных об использовании технологических ресурсов при выполнении производственной операции. Стохастический процесс воздействия со стороны оборудования на предмет труда описывается плотностью распределения $\phi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$ случайной величины μ, где $\tilde{\mu}$ и μ – интенсивность переноса ресурсов на предмет труда до и после воздействия [1, 3]:

$$\int_0^\infty\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)d\mu=1. \qquad (3)$$

Детальный вывод кинетического уравнения производственного процесса (1) дан в [1, 4].

Макропараметры производственного процесса. Введем числовые характеристики, отражающие существенные черты распределения по состояниям находящихся в незавершенном производстве предметов труда

$$\int_0^\infty\mu^k\cdot\chi(t,S,\mu)d\mu=\left[\chi\right]_k, \qquad (4)$$

которые для функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ определим как моменты k-го порядка. Изменение функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ предметов труда по состояниям обусловлено стохастическим характером взаимодействием предметов труда с оборудованием и между собой [7]. В большинстве интересных с практической точки зрения случаях плотность распределения $\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)$ не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны технологического оборудования. Тогда интегрирование в правой части (1) приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=\lambda_{Plant}\cdot\left\{\phi(t,S,\mu)\cdot\left[\chi\right]_1-\mu\cdot\chi\right\},$$
$$\frac{d\mu}{dt}=f(t,S). \qquad (5)$$

Кинетическое уравнение (5) использовано для вывода балансовых уравнений PDE-модели производственного процесса, а его решение дает возможность получить закон распределения предметов труда по состояниям. Закон распределения исчерпывающим образом описывает распределение предметов труда по состояниям, позволяет определить числовые характеристики (4). Особое значение среди них представляют две числовые характеристики – плотность распределения предметов труда в незавершенном производстве по технологическим позициям $\left[\chi\right]_0(t,S)$ и темп обработки предметов труда $\left[\chi\right]_1(t,S)$ на операциях вдоль технологического маршрута [3–5, 7]. Часто требуется решить задачу, оставляя в стороне законы распределения, оперируя при этом одними числовыми характеристиками $\left[\chi\right]_0(t,S)$, $\left[\chi\right]_1(t,S)$. Потоковые параметры $\left[\chi\right]_0(t,S)$, $\left[\chi\right]_1(t,S)$, $\left[\chi\right]_2(t,S)$ и связанный с ними метод моментов играют важную роль при построении общей теории систем управления производственными поточными линиями. Если удалось выделить характеристики параметров состояний предметов труда, то потоковые параметры, описывающие состояние производственного процесса, определяются через моменты функции распределения предметов труда по состояниям $\chi=\chi(t,S,\mu)$. При этом введенные параметры должны совпадать с используемыми в производственной деятельности параметрами производственного процесса [2]. Под уравнением баланса k-го порядка относительно моментов функции распределения $\chi=\chi(t,S,\mu)$ предметов труда по состояниям понимается агрегированное по всему диапазону изменения величины μ балансовое равенство

$$\int_0^\infty\mu^k\frac{\partial\chi}{\partial t}d\mu+\int_0^\infty\mu^{k+1}\frac{\partial\chi}{\partial S}d\mu+\int_0^\infty\mu^k\frac{\partial\chi}{\partial\mu}fd\mu=$$
$$=\lambda_{Plant}\int_0^\infty\mu^k\left\{\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\left[\chi\right]_1-\mu\chi\right\}d\mu, \qquad (6)$$

$$\chi(t,S,\infty)=\chi(t,S,\infty)=0. \qquad (7)$$

Условия (7) указывают на то, что количество предметов труда в состоянии с бесконечно малым и бесконечно большим временем обработки равно нулю. Начальные моменты $\left[\chi\right]_k$ связаны балансными соотношениями (6). Связь микро и макроуровня описания производственного процесса в рамках заданного закона распределения предметов труда по состояниям осуществляется через кинетическое уравнение в виде самосогласованной задачи [1]. Для определения функции распределения предметов труда по состояниям необходимо знать поведение ее первых моментов, задающих вид функции f(t, S). С другой стороны, чтобы определить значения первых моментов необходимо получить вид функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ в результате решения кинетического уравнения (5). Закон распределения предметов труда по состояниям определяется особенностями технологического процесса в результате решения кинетического уравнения (5), а именно технологией изготовления предмета труда. Каждому технологическому процессу соответствуют свой вид инженерно-производственной функции f(t, S) и функции переноса технологических ресурсов на предмет труда $\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)$.

5. Балансовое уравнение для нулевого момента. Закон сохранения количества предметов труда в производственном процессе

Проинтегрируем слагаемые уравнения баланса (6) при k=0:

$$\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial t}d\mu+\int_0^\infty \mu\frac{\partial\chi}{\partial S}d\mu+\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\mu}f(t,S)d\mu=$$
$$=\lambda_{Plant}\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty \phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu}-\mu\chi(t,S,\mu)\right\}d\mu. \quad (8)$$

Воспользуемся обозначениями для начальных моментов (4), получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t}d\mu=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \chi(t,S,\mu)d\mu=\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot\mu d\mu=\frac{\partial}{\partial S}\int_0^\infty \mu\cdot\chi(t,S,\mu)d\mu=\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}, \quad (10)$$

$$\int_0^\infty f(t,S)\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}d\mu=f(t,S)\cdot\int_0^\infty d\chi(t,S,\mu)=0, \quad (11)$$

$$\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty\left[\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})\right]d\tilde{\mu}-\mu\chi(t,S,\mu)\right\}d\mu=$$
$$=\int_0^\infty \tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu}-\int_0^\infty \mu\chi(t,S,\mu)d\mu=0. \quad (12)$$

Подставляя (9)–(12) в (8), получим уравнение модели производственной поточной линии в одномоментном описании [4–6, 8].

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0, \quad (13)$$

представляющее закон сохранения количества предметов труда в производственном процессе. Уравнение (13) используется для моделирования поведения состояния параметров поточной линии в одномоментном описании, является незамкнутым. Существует рад моделей, использующих разные подходы для замыкания уравнения (13). Рассмотрим один из них подробнее. Для описания конвейерных линий используется приближенная PDE-модель, содержащая уравнение (13) и замыкающее Graves-уравнение состояния

$$[\chi]_1=\alpha\cdot[\chi]_0\cdot c,$$

где a=const – технологическая константа, c=const (метр/час) – скорость движения конвейера:

$$\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1(t,S)}{\partial S}=0,$$

$$[\chi]_1=\alpha\cdot[\chi]_0\cdot c. \quad (14)$$

Подставим второе уравнение в первое, получим

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+a\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial S}=0,$$

$$a=\alpha\cdot c=\text{const} \quad (15)$$

Дополним (15) начальными и граничными условиями

$$[\chi]_0(0,S)=\theta(S),$$

$$[\chi]_1(t,0)=\varphi(t), \quad (16)$$

вид которых определяет начальное распределение предметов труда вдоль поточной линии и интенсивность поступления предметов труда, определяемые портфелем заказов, на начало производственной линии, где

$$[\chi]_0(0,0)=\theta(0)=[\chi]_1(0,0)/a=\varphi(0)/a.$$

Запишем для (15) характеристическую систему уравнений и соответствующий ей первый интеграл движения:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dS}{a},\quad S-gt=\text{const}. \quad (17)$$

С учетом (17) решение уравнения (15) имеет вид

$$[\chi]_0(t,S)=W(R),\quad R=S-at. \quad (18)$$

Подставляя решение (18) в уравнение (15), получим тождество

$$\frac{dW(R)}{dR}\frac{\partial R}{\partial t}+a\frac{dW(R)}{dR}\frac{\partial R}{\partial S}=$$
$$=\frac{dW(R)}{dR}\left(\frac{\partial R}{\partial t}-a\frac{\partial R}{\partial S}\right)=\frac{dW(R)}{dR}(a-a\cdot 1)\equiv 0. \quad (19)$$

Используем начальное условие (16) и граничное условие (16) для уравнения (15), запишем решение

$$[\chi]_0(t,S)=\theta(R)H(R)+\varphi(R/a)H(-R),$$

$$H(R)=\begin{cases}0, & \text{если } R<0;\\ 0.5, & \text{если } R=0;\\ 1, & \text{если } R>0,\end{cases} \quad (20)$$

где H(R) – функция Хевисайда. В общем случае модель необходимо дополнить уравнениями связей, накладывающими ограничения на производительность технологического оборудования и на использование технологических ресурсов.

6. Балансовое уравнение для первого момента. Закон сохранения темпа движения предметов труда по технологическому маршруту

Проинтегрируем слагаемые уравнения баланса (6) при k=1:

$$\int_0^\infty \mu \frac{\partial \chi}{\partial t} d\mu + \int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi}{\partial S} d\mu + \int_0^\infty \mu \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f(t,S) d\mu =$$
$$= \lambda_{Plant} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu} - \mu\chi \right\} \mu d\mu. \qquad (21)$$

Воспользуемся обозначениями для начальных моментов (4), получим по аналогии с (9)–(12)

$$\int_0^\infty \mu \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial t} d\mu = \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t}, \quad \int_0^\infty \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S} \mu^2 d\mu = \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S}, \quad (22)$$

$$\int_0^\infty f(t,S) \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial \mu} \mu d\mu =$$
$$= f(t,S) \int_0^\infty \left(\frac{\partial [\mu\chi(t,S,\mu)]}{\partial \mu} - \chi(t,S,\mu) \right) d\mu = -f(t,S)[\chi]_0, \quad (23)$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty [\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \mu\chi(t,S,\mu) \right\} \mu d\mu =$$
$$= \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right). \qquad (24)$$

Подставляя (22)–(24) в (21), запишем уравнение баланса первого порядка относительно начальных моментов (6)

$$\frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} - f(t,S)[\chi]_0 = \lambda_{Plant} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right). \quad (25)$$

Уравнение (25) дополним уравнением (13), получим систему уравнений двухмоментного описания производственной поточной линии:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} - f(t,S)[\chi]_0 =$$
$$= \lambda_{Plant} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right). \qquad (26)$$

Система уравнений (26) является незамкнутой. Дополним ее уравнениями

$$\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 = 0, \quad [\chi]_{1\psi} = [\chi]_1, \quad f(t,S) = 0, \qquad (27)$$

получим систему уравнений для описания поточной линии, известной как двухмоментная PDE-модель с использованием уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + [\chi]_1 \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0. \qquad (28)$$

Система уравнений (28) является замкнута, на исследовании данной модели в настоящей работе останавливаться не будем.

7. Балансовое уравнение для второго момента. Общая система балансовых уравнений для потоковых параметров.

Проинтегрируем слагаемые уравнения баланса (6) при k=2:

$$\int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi}{\partial t} d\mu + \int_0^\infty \mu^3 \frac{\partial \chi}{\partial S} d\mu + \int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f(t,S) d\mu =$$
$$= \lambda_{Plant} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu} - \mu\chi \right\} \mu^2 d\mu. \qquad (29)$$

Воспользуемся введенными обозначениями для начальных моментов (4), получим по аналогии с (9)–(12)

$$\int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial t} d\mu = \frac{\partial [\chi]_2}{\partial t},$$
$$\int_0^\infty \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S} \mu^3 d\mu = \frac{\partial [\chi]_3}{\partial S}, \qquad (30)$$

$$\int_0^\infty f(t,S) \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial \mu} \mu^2 d\mu =$$
$$= f(t,S) \int_0^\infty \left(\frac{\partial [\mu\cdot\chi(t,S,\mu)]}{\partial \mu} - 2\mu\chi(t,S,\mu) \right) d\mu =$$
$$= -2f(t,S)[\chi]_1, \qquad (31)$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty [\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \mu\chi(t,S,\mu) \right\} \mu^2 d\mu =$$
$$= \left(\left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} \right)^2 \left(1 + \frac{\sigma_\psi{}^2}{\langle \mu_\psi \rangle^2} \right) [\chi]_1 - [\chi]_3 \right), \qquad (32)$$

Подставляя (30)–(32) в (29), запишем уравнение баланса

$$\frac{\partial [\chi]_2}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_3}{\partial S} - 2f[\chi]_1 =$$
$$= \lambda_{Plant} \left(\left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} \right)^2 \left(1 + \frac{\sigma_\psi{}^2}{\langle \mu_\psi \rangle^2} \right) [\chi]_1 - [\chi]_3 \right). \qquad (33)$$

Объединяя (13), (25), (33), запишем общую систему уравнений для потоковых параметров производственного процесса:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} - f(t,S)[\chi]_0 =$$
$$= \lambda_{Plant} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right),$$

$$\frac{\partial[\chi]_k}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_{k+1}}{\partial S}+kf[\chi]_{k-1}=$$
$$=\int_0^\infty \mu^k\lambda_{Plant}\left\{\int_0^\infty\left[\phi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})\right]d\tilde{\mu}-\mu\chi\right\}.$$

Заметим, что модели поточных линий в трех-моментном описании в литературе не приводятся.

8. Обсуждение результатов построения системы уравнений для многомоментной модели производственной поточной линии

В результате проведенных исследований обосновано применение кинетического уравнения при разработке метода построения системы уравнений для многомоментной модели производственной поточной линии, в основу которого положен статистический подход к описанию производственной системы. Формализованы основные наблюдаемые макроскопические потоковые величины, определяющие состояние производственной линии. Использование интегро-дифференциального кинетического уравнения производственного процесса, учитывающего обработку предметов труда при их движении по технологическому маршруту, позволило получить балансовые уравнения для двухуровневого описания поточной линии. Такая возможность построить замкнутую систему уравнений основана на способах замыкания самозацепляющей цепочки балансовых уравнений методами малого параметра или заданием уравнений состояний для моментов высшего порядка. Следует отметить тот факт, что в зарубежной литературе широко используется уравнение состояния в виде clearing-функции для замыкания балансового уравнения относительно нулевого момента. В связи с этим подробно обсуждены ограничения, связанные с таким методом построения замкнутой системы уравнений. Также важным обстоятельством является и то, что при описании производственных поточных линий начальные моменты $[\chi]_k$ (4) выше второго не используются, что объясняется как сложностью построения балансовых уравнений высоких порядков при использовании феноменологического подхода, так и определением условий для их замыкания. Данное обстоятельство придает предложенной в настоящей статье методике построения практический интерес.

9. Выводы

При построении системы уравнений для потоковых параметров производственной линии использован статистический подход, основанный на учете закономерностей взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием и между собой в ходе технологической обработки.

Продемонстрирован метод построения многомоментных балансовых уравнений, позволяющих, в отличие от известных методов, основанных на феноменологическом подходе, записать систему уравнений, содержащую требуемое количество потоковых параметров. Полученные результаты являются продолжением исследований, проведенных в работах [1, 3, 4] и представляют научных и практический интерес для проектирования систем управления современными производственными поточными линиями, функционирующими в переходных режимах.

Литература

1. Азаренков, Н. А. Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии [Текст] / Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 12. – С. 36–43. – Режим доступу: http://archive.kpi.kharkov.ua/View/51748/
2. Бусленко, Н. П. Математическое моделирование производственных процессов [Текст] / Н. П. Бусленко. – М.: Наука, 1964. – 363 с.
3. Демуцкий, В. П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок [Текст] / В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый. – Х.: ХНУ, 2003. – 272 с. – Available at: http://goo.gl/NAe5Du
4. Пигнастый, О. М. Статистическая теория производственных систем [Текст] / О. М. Пигнастый. – Харьков: ХНУ, 2007. – 388 с. – Режим доступа: http://archive.kpi.kharkov.ua/View/46701/
5. Armbruster, D. Kinetic and Fluid Model Hierarchies for Supply Chains [Text] / D. Armbruster, D. Marthaler, C. Ringhofer // Multiscale Modeling & Simulation. – 2003. – Vol. 2, Issue 1. – P. 43–61. doi: 10.1137/s1540345902419616
6. Armbruster, D. The production planning problem: Clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations [Text] / D. Armbruster, K. G. Kempf // Decision Policies for Production Networks, 2012. – P. 289–303. doi: 10.1007/978-0-85729-644-3_12
7. Armbruster, D. Continuous models for production flows [Text] / D. Armbruster, C. Ringhofer, T.- J. Jo // In Proceedings of the 2004 American Control Conference, 2004. – P. 4589–4594.
8. Armbruster, D. Thermalized kinetic and fluid models for reentrant supply chains [Text] / D. Armbruster, C. Ringhofer // Multiscale Modeling and Simulation. – 2005. – Vol. 3, Issue 4. –P. 782–800. doi: 10.1137/030601636
9. Tian, F. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning [Text] / F. Tian, S. Willems, K. Kempf // International Journal of Production Economics. – 2011. – Vol. 133, Issue 1. – P. 439–450. doi: 10.1016/j.ijpe.2010.07.011
10. Vollmann, T. E. Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management [Text] / T. E. Vollmann, L. Berry, D. C. Whybark, F. R. Jacobs. – McGraw-Hill, New York, 2005. – 520 p.